Okruh č.3: Sémantický výklad predikátové logiky

Predikátová logika 1.řádu formalizuje úsudky o vlastnostech předmětů a vztazích mezi předměty pevně dané předmětné oblasti (univerza). Nebudeme se zabývat formalizací úsudků, které navíc vypovídají i o vlastnostech vlastností a vztahů a o vztazích mezi vlastnostmi a vztahy. Tím se zabývají ***predikátové logiky druhého a vyšších řádů***.

/jazyk predikátové logiky/**:**

I) ***Abeceda predikátové logiky*** je tvořena následujícími skupinami symbolů:

a. Logické symboly
   - i. předmětové (individuové) proměnné: *x, y, z*,... (příp. s indexy)
   - ii. symboly pro spojky: $\neg, \wedge, \vee, \supset, \equiv$
   - iii. symboly pro kvantifikátory $\forall$, $\exists$
   - iv. případně binární predikátový symbol = (predikátová logika s rovností)

b. Speciální symboly (určují specifiku jazyka)
   - i. predikátové symboly: p, q, r,... /příp. s indexy/
   - ii. funkční symboly: f, g, h,... /příp. s indexy/

   Ke každému funkčnímu a predikátovému symbolu je přiřazeno nezáporné číslo n ($n \geq 0$), tzv. ***arita***, udávající počet individuových proměnných, které jsou argumenty funkce nebo predikátu.

c. Pomocné symboly /závorky/: (,) /případně i [,],{,}/

II) ***Gramatika,*** která udává, jak tvořit:

a. ***termy*:**
   - i. každý symbol proměnné je term
   - ii. jsou-li $t_1,\dots,t_n$ ($n \geq 0$) termy a je-li f n-ární funkční symbol, pak výraz f($t_1,\dots,t_n$) je term; pro $n = 0$ se jedná o nulární funkční symbol, neboli individuovou konstantu (značíme a, b, c, …)
   - iii. jen výrazy dle i. a ii. jsou termy

b. ***atomické formule***:
   - i. je-li p n-ární predikátový symbol a jsou-li $t_1,\dots,t_n$ termy, pak výraz p($t_1,\dots,t_n$) je atomická formule
   - ii. jsou-li t_1 a t_2 termy, pak výraz ($t_1 = t_2$) je atomická formule

c. ***formule*:**
   - i. každá atomická formule je formule
   - ii. je-li výraz A formule, pak $\neg$A je formule
   - iii. jsou-li výrazy A a B formule, pak výrazy (A $\vee$ B), (A $\wedge$ B), (A $\supset$ B), (A $\equiv$ B) jsou formule
   - iv. je-li x proměnná a A formule, pak výrazy $\forall x$A a $\exists x$A jsou formule
   - v. jen výrazy dle i. – iv. jsou formule

Jazyk predikátové logiky, jak byl vymezen výše, je jazyk logiky 1. řádu, pro niž je charakteristické to, že *jediný přípustný typ proměnných jsou individuové proměnné.* Pouze individuové proměnné lze vázat kvantifikátory. (V logice 2. řádu jsou povoleny i predikátové proměnné.)

Výskyt proměnné x ***ve formuli*** A ***je vázaný***, jestliže je součástí nějaké podformule $\forall x$B(x) nebo $\exists x$B(x) formule A.

Proměnná** x **je vázaná ve formuli A, má-li v A vázaný výskyt. Výskyt proměnné x ve formuli A, který není vázaný, nazýváme ***volný***.

Proměnná** x **je volná ve formuli A, má-li v A volný výskyt.

Formule, v níž každá proměnná má buď všechny výskyty volné nebo všechny výskyty vázané, se nazývá ***formulí s čistými proměnnými***.

Formule se nazývá ***uzavřenou***, neobsahuje-li žádnou volnou proměnnou. Formule, která obsahuje aspoň jednu volnou proměnnou se nazývá ***otevřenou***.

Převod z přirozeného jazyka do symbolického jazyka PL^1.

Jde o analýzu výrazů přirozeného jazyka v rámci PL^1. Volba predikátových (a funkčních) konstant je libovolná potud, že nesmí dojít ke ”kolizi vlastností, funkcí či vztahů”. Výrazy jako ”všichni”, ”každý”, ”nikdo”, apod. ”překládáme” všeobecným kvantifikátorem $\forall$, výrazy jako ”někdo”, ”někteří”, apod. ”překládáme” existenčním kvantifikátorem $\exists$.

Pravdivost formule, interpretace, ohodnocení

Budeme-li chtít hovořit o pravdivosti formule například $\forall x\ P(x)$, je potřeba ji nejprve nějak interpretovat.
V čem spočívá interpretace formule? Nejprve musíme stanovit, ”o čem mluvíme”, tedy jaká je předmětná oblast – obor proměnnosti (individuových) proměnných, tj. zvolíme jistou *neprázdnou* množinu – **universum diskursu,** jejíž prvky jsou **individua.** Jelikož predikátové symboly mají vyjadřovat vztahy mezi těmito předměty – prvky universa, přiřadíme každému n-árnímu **predikátovému symbolu** jistou n-ární **relaci** (tj. podmnožinu Kartézského součinu M^n) nad universem M. Specielně, jedná-li se o unární predikátový symbol (n = 1), pak přiřadíme podmnožinu universa. Podobně **funkční symboly** budou vyjadřovat n-ární **funkce** nad universem: $M^n \rightarrow M$. Teprve poté, co je daná formule interpretována, můžeme **vyhodnotit** její **pravdivost** či nepravdivost **v dané interpretaci.** Je zde však ještě jeden problém, a to jsou proměnné. Proměnným jazyka PL^1 přiřazujeme **valuací** individua, tj. prvky universa. (Proměnným jazyka PL2 mohou být přiřazeny také vlastnosti či funkce.)
Pravdivostní hodnota formule nezávisí na hodnotě vázaných proměnných:
Vyhodnocení formule s vázanými proměnnými:
$\forall x A(x)$, $\exists x A(x)$:

1. $\models_I \forall x \mathbf{A}(x)[e]$, jestliže pro *libovolné* individuum $i \in U$ platí
   $\models_I A[e(x/i)]$, kde $e(x/i)$ je valuace přiřazující proměnné x individuum i
   $\models_I \exists x \mathbf{A}(x)[e]$, jestliže *existuje alespoň jedno* individuum
   $i \in U$ takové, že platí $\models_I A[e(x/i)]$, kde $e(x/i)$ ...

(Z definice kvantifikátorů je zřejmé, že nad konečným univerzem $U = \{a1,\ldots,an\}$, platí následující ekvivalence formulí:

- $\forall x\ A(x) \Leftrightarrow A(a1) \wedge \ldots \wedge A(an)$
- $\exists x\ A(x) \Leftrightarrow A(a1) \vee \ldots \vee A(an)$

A tedy všeobecný kvantifikátor je zobecněním konjunkce a existenční kvantifikátor je zobecněním disjunkce.

Obsahuje-li však formule nějaké volné proměnné, můžeme vyhodnotit její pravdivost v interpretaci pouze v **závislosti na ohodnocení** (valuaci) **volných proměnných**. Při některé valuaci může být formule v dané interpretaci pravdivá, při jiné nepravdivá. Tak např. formule

$$\forall x\ p(f(x), y)$$

může být interpretována nad množinou celých čísel tak, že symbolu p je přiřazena relace větší nebo rovno ($\geq$), symbolu f funkce druhá mocnina (tedy $f(x)$ ”znamená” x^2). Pak formule ”říká”, že pro každé celé číslo x platí, že x^2 je větší než nebo rovno **jistému číslu** $\boldsymbol{y}$**.** Tedy pravdivost formule v této interpretaci závisí na ohodnocení (valuaci) proměnné y. Přiřadíme-li např. y číslo 5, je formule nepravdivá, přiřadíme-li třeba číslo -3 nebo 0, je formule pravdivá. Obecně bude formule pravdivá (v této interpretaci) pro každou valuaci proměnné y, která přiřadí y záporné číslo nebo nulu, nepravdivá pro všechny valuace, které

Interpretace jazyka predikátové logiky 1. řádu je tato trojice objektů (která je někdy nazývána *interpretační struktura*):

A) *Neprázdná* množina M, která se nazývá **universum diskursu** a její prvky jsou **individua.**

B) Interpretace funkčních symbolů jazyka, která přiřazuje každému n-árnímu funkčnímu symbolu f určité **zobrazení** $\mathbf{f_M: M^n \rightarrow M}$.

C) Interpretace predikátových symbolů jazyka, která přiřazuje každému n-árnímu predikátovému symbolu P jistou n-ární relaci $\boldsymbol{P_M}$ nad M, tj. **podmnožinu Kartézského součinu** $\mathbf{M^n}$**.**

Splnitelnost a pravdivost v interpretaci

- ***Formule A je splnitelná v interpretaci I***, jestliže *existuje* ohodnocení e proměnných takové, že platí $\models_I A[e]$.
- ***Formule A je pravdivá v interpretaci I***, značíme $\models_I \mathbf{A}$, jestliže pro *všechna* možná ohodnocení e platí, že $\models_I A[e]$.
- ***Model formule A*** je interpretace I, ve které je A pravdivá (tj. pro všechna ohodnocení volných proměnných).
- ***Formule A je splnitelná***, jestliže existuje interpretace I, ve které je splněna, tj. jestliže existuje interpretace I a valuace e takové, že $\models_I A[e]$.
- ***Formule A je tautologií*** (logicky pravdivá), značíme $\models \mathbf{A}$, jestliže je pravdivá v každé interpretaci.
- ***Formule A je kontradikcí***, jestliže neexistuje interpretace I, která by formuli A splňovala, tj. neexistuje interpretace a valuace, ve které by byla A pravdivá: $\not\models_I A[e]$.

Př:

A: $\forall x\, P(f(x), x)$ B: $\exists x\, P(f(x), x)$

C: $P(f(x), x)$

- Interpretace I: U=N, $f \rightarrow x^2$, P $\rightarrow$ relace >
- Platí, že: $\models_I$ B. Formule B je v $\langle N, x^2, > \rangle$ pravdivá.
- Formule A a C jsou v $\langle N, >, x^2 \rangle$ splněny, ale nejsou v ní pravdivé:
  - pro $e_0(x) = 0$, $e_1(x) = 1$ není $\langle 0,0 \rangle$, $\langle 1,1 \rangle$ prvkem >, ale pro $e_2(x) = 2$, $e_3(x) = 3$, atd., jsou dvojice $\langle 4,2 \rangle$, $\langle 9,3 \rangle$**, …** prvkem relace >.
- Formule A, C nejsou v $\langle N, x^2, > \rangle$ pravdivé:

  $\not\models_I A[e_0]$, $\not\models_I A[e_1]$, $\not\models_I C[e_0]$, $\not\models_I C[e_1]$,

  pouze je: $\models_I A[e_2]$, $\models_I A[e_3]$, $\models_I C[e_2]$, $\models_I C[e_3]$, …

Příklady pro názornost a lepší pochopení:

(!neučit se, pouze si přečíst, aby bylo výše uvedené na praktic. příkladech pochopeno!)

Uvažme následující jednoduché formule:

A. $P(a) \vee Q(f(a))$, A': $P(a) \wedge Q(f(a))$, A'': $P(a) \supset Q(f(a))$
B. $\exists x\, [P(x) \vee Q(x)]$ B': $\forall x[P(x) \vee Q(x)]$
C. $\exists x\, [P(x) \wedge Q(x)]$ C': $\forall x[P(x) \wedge Q(x)]$
D. $\exists x\, [P(x) \supset Q(x)]$ D': $\forall x[P(x) \supset Q(x)]$
E. $\exists x\, P(x)$ F: $\forall x\, P(x)$

Formule jazyka PL1 zastupují (podobně jako ve výrokové logice) výroky, které mohou být pravdivé či nepravdivé. Ovšem abychom mohli odpovědět na otázku, zda jsou výše uvedené formule pravdivé (či nepravdivé), musíme nejprve vědět, jaký je jejich význam, „co říkají“.

Ve výrokové logice mohly být jednotlivé výroky pravdivé za jistých okolností a nepravdivé za jiných. Přitom ty „okolnosti“ jsme mapovali pouze jako kombinace pravdivostních hodnot elementárních výroků (0-1 tabulky) – ***ohodnocení*** výrokových proměnných.

Rovněž v PL1 mohou být formule za jistých okolností pravdivé a za jiných okolností nepravdivé. Zde ovšem budeme ty „okolnosti“ mapovat složitěji – dle struktury elementárního výroku – jako ***interpretace speciálních symbolů*** *(predikátových nebo funkčních)*.

Mohli bychom říct, že např. formule B „říká“, že „existuje x takové, že x je P nebo x je Q“, ale to k vyhodnocení pravdivosti nestačí. Musíme vědět, „o čem mluvíme“ – co může být hodnotou proměnné x – prvek jakého ***universa diskursu*** (předmětné oblasti)***,*** a o čem mluví to „P“ a „Q“ – co je tím v daném universu označeno.

Zvolme tedy universum U = předmětnou oblast, o které chceme něco vypovídat:

Nechť **U = množina přirozených čísel N**.

Predikátové symboly slouží k označování „vlastností“ a „vztahů“, přesněji podmnožin Kartézského součinu U ×...× U, dle arity symbolu. Je-li arita = 1, označují prostě podmnožiny universa. V našem případě zvolme tedy dvě podmnožiny N, např.

P^U = sudá čísla, Q^U = čísla dělitelná třemi: {0, 3, 6, 9, 12, ...}

a dohodněme se, že P označuje P^U a Q označuje Q^U ($\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P^U}$), ($\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q^U}$).

Abychom mohli vyhodnotit formule A, A‘, A‘‘, zbývá se dohodnout, co znamenají symboly „*a*“ a „f“. Symbol „*a*“ je funkční symbol s aritou 0, tedy konstanta: V rámci zvoleného universa má označovat jeden určitý prvek (na rozdíl od proměnné).

Nechť $\boldsymbol{a} \rightarrow \mathbf{9}$.

Symbol „f“ je funkční symbol s aritou 1, musí tedy označovat zobrazení (tj. funkci) z universa do universa: $N \rightarrow N$. Zvolme např. funkci f^U = násobení 3 (každému číslu přiřadí jeho trojnásobek): $\mathbf{f} \rightarrow \mathbf{f^U}$ (= $3x$)

Říkáme, že jsme zvolili ***interpretační strukturu*** **I**: $\langle N, \{P^U, Q^U\}, \{f^U, 9\}\rangle$ a *interpretovali predikátové symboly* P, Q ($P \rightarrow P^U$, $Q \rightarrow Q^U$) a *funkční symboly* f, *a* ($f \rightarrow f^U$, $a \rightarrow 9$).

Nyní teprve můžeme vyhodnocovat **pravdivost** jednotlivých **formulí v interpretaci I**:

Formule A „říká“, že prvek, který obdržíme interpretací *a* má ležet v množině, kterou obdržíme interpretací symbolu P, nebo *prvek, který obdržíme interpretací termu* f(*a*) má ležet v množině, kterou obdržíme interpretací symbolu Q. Musíme proto nejprve vyhodnotit hodnotu termu f(*a*) v dané interpretaci: 3.9 = 27. Tedy ptáme se, zda:

$9 \in P^U$ ***nebo*** $27 \in Q^U$?

Odpověď je ANO, neboť 9 sice není sudé číslo, ale 27 je násobek tří.

Říkáme, že **formule A je pravdivá v interpretaci I**, nebo že struktura I je **modelem formule A,** zapíšeme: $\models_I$ **A**

Formule **A’** však **není v uvedené interpretaci pravdivá**, neboť má platit, že

$9 \in P^U$ ***a*** $27 \in Q^U$, avšak to neplatí, neboť $9 \notin P^U$.

Formule A’’ je pravdivá v interpretaci I, struktura I je rovněž **modelem formule A’’,** zapíšeme: $\models_I$ **A’’.**

Vyhodnocení formulí B – F je komplikováno tím, že se zde vyskytují symboly ***kvantifikátorů*** ($\forall$, $\exists$). Zkusme nejprve jednoduchý případ E: $\exists x$ P(*x*), „existuje *x,* které je P“ a F: $\forall x$ P(*x*), „všechna *x* jsou P“.

Proměnná *x* je rovněž term, označuje prvek universa, ale ne konstantní prvek (jako tomu bylo u konstanty *a*). Označený prvek závisí na ***ohodnocení (valuaci)*** **e** proměnné *x*. Tak např.

$e_1(x) = 0$, $e_2(x) = 1$, $e_3(x) = 2$, ...

Ovšem formule $\exists x$ P(*x*), $\forall x$ P(*x*) jsou *uzavřené* (vzhledem k valuaci proměnné *x*), to znamená, že jejich pravdivostní hodnota v dané interpretaci *nezávisí* na zvolené valuaci *x.* Jak je tedy vyhodnotíme?

Formule $\exists x$ P(*x*) bude pravdivá v dané interpretaci, jestliže ***existuje alespoň jedna valuace e*** taková, že prvek označený jako e(*x*) leží v množině P^U, která je přiřazena symbolu P (v dané interpretaci). Jinými slovy, jestliže P^U je *neprázdná*. To je jistě pravda, neboť např. $2 \in P^U$, $4 \in P^U$, množina sudých čísel je neprázdná.

$\models_I \exists x\, P(x)$

Formule $\forall x$ P(*x*) bude pravdivá v dané interpretaci, jestliže ***pro všechny valuace e*** platí, že prvek označený jako e(*x*) leží v množině P^U, která je přiřazena symbolu P (v dané interpretaci). Jinými slovy, jestliže množina P^U je *celé universum*. To však není pravda, neboť např. $1 \notin P^U$, $3 \notin P^U$, atd. (stačí najít jednoho „svědka nepravdivosti“).

$\not\models_I \forall x\, P(x)$

K tomu, abychom vyhodnotili formule B – C’, stačí, když si uvědomíme, že formule v hranatých závorkách definují jistý vztah mezi množinami přiřazenými symbolům P, Q (tedy mezi jejich ‘obory pravdivosti’), a to takto:

$[P(x) \vee Q(x)]$ „*x* je v P nebo *x* je v Q“, se vztahuje na ***sjednocení*** množin: $P^U \cup Q^U$
$[P(x) \wedge Q(x)]$ „*x* je v P a *x* je v Q“, se vztahuje na ***průnik*** množin: $P^U \cap Q^U$

Tedy formule $\exists x[P(x) \vee Q(x)]$ bude pravdivá, když *alespoň pro jednu* valuaci *x* bude platit, že získaný prvek leží v P^U nebo v Q^U, tj. $P^U \cup Q^U$ je neprázdná. To je jistě pravda, např. číslo 2, číslo 9, atd. Proto

$|=_I \exists x[P(x) \vee Q(x)]$ (některá čísla jsou sudá nebo násobky 3)

Naproti tomu formule $\forall x[P(x) \vee Q(x)]$ bude pravdivá, jestliže *pro všechny* valuace x bude platit, že získaný prvek leží v tomto sjednocení, tj. $P^U \cup Q^U$ musí být celé universum. To však není pravda. Např. číslo 5 neleží ani v P^U ani v Q^U (není ani sudé ani násobek 3). Proto

$|\neq_I \forall x[P(x) \vee Q(x)]$ (není pravda, že všechna čísla jsou sudá nebo násobky 3)

Podobně vyhodnotíme:

$|=_I \exists x[P(x) \wedge Q(x)]$ (některá sudá čísla jsou násobky 3, např. číslo 6)

$|\neq_I \forall x[P(x) \wedge Q(x)]$ (není pravda, že všechna čísla jsou sudá a násobky 3)

Složitější je situace s formulí tvaru $[P(x) \supset Q(x)]$. Tato formule říká, že „*pokud* je x v P, pak je také v Q". Jinými slovy (dle definice implikace), „x není v P nebo je v Q".

Tedy formule $\forall x[P(x) \supset Q(x)]$ je pravdivá, když pro všechny prvky universa platí uvedená podmínka. Ta je splněna, pokud je $P^U \subseteq Q^U$ (P^U je ***podmnožinou*** Q^U). Proto v naší interpretaci I není tato formule pravdivá:

$|\neq_I \forall x[P(x) \supset Q(x)]$
(není pravda, že množina sudých čísel je podmnožinou množiny násobků 3)

Ovšem formule $\exists x[P(x) \supset Q(x)]$ je „**skoro vždy pravdivá**" !!!

Stačí nalézt jednu valuaci x takovou, aby byla splněna uvedená podmínka. Tedy stačí nalézt jediný prvek, který neleží v P^U! Např. číslo 9. Proto je

$|=_I \exists x[P(x) \supset Q(x)]$.

Podmínka zadaná implikací je ve spojení s existenčním kvantifikátorem velice slabá.
Formule $\exists x[P(x) \supset Q(x)]$ bude pravdivá v každé interpretaci takové, že

$P^U \subset U$ nebo $Q^U = U$: P^U není celé universum nebo Q^U je celé universum.

Shrnutí:

$\exists x[P(x) \vee Q(x)]$	iff $(P^U \cup Q^U) \neq \emptyset$ (sjednocení je neprázdné)
$\forall x[P(x) \vee Q(x)]$	iff $(P^U \cup Q^U) = U$ (sjednocení je celé universum)
$\exists x[P(x) \wedge Q(x)]$	iff $(P^U \cap Q^U) \neq \emptyset$ (průnik je neprázdný)
$\forall x[P(x) \wedge Q(x)]$	iff $(P^U \cap Q^U) = U$ (průnik je celé universum)
$\exists x[P(x) \supset Q(x)]$	iff $P^U \subset U$ ($P^U \neq U$) nebo $Q^U = U$
$\forall x[P(x) \supset Q(x)]$	iff $P^U \subseteq Q^U$ (obor pravdivosti P je podmnožinou oboru pravdivosti Q)

Úloha: Zvolte jiné interpretační struktury (nad stejným i nad jiným universem) a vyhodnoťte pravdivost formulí A – F.