Okruh č.2 sémantický výklad výrokové logiky

Výroková logika analyzuje věty až do úrovně elementárních výroků. Strukturu těchto elementárních výroků již dále nezkoumá. *Výrok je tvrzení, o němž má smysl prohlásit, zda je pravdivé či nepravdivé.*

Úsudek $P_1, \ldots, P_n$ / Z je deduktivně ***správný (platný)***, značíme $\mathbf{P_1, \ldots, P_n \models Z}$, jestliže závěr Z ***logicky vyplývá*** z předpokladů $P_1, \ldots, P_n$, tj. za všech okolností takových, že jsou pravdivé všechny předpoklady $P_1, \ldots, P_n$, je (za těchto okolností) pravdivý i závěr Z. ***Okolnostmi se ve VL rozumí valuace výrokových proměnných***, tj. jejich ohodnocení Pravda (1) nebo nepravda (0).

Abeceda jazyka výrokové logiky je množina následujících symbolů:

- Výrokové symboly: p, q, r, ... /případně s indexy/
- Symboly logických spojek /funktorů/: $\neg, \vee, \wedge, \supset, \equiv$
- Pomocné symboly /závorky/: (,) /případně [,],{,}/

  Symboly $\neg, \vee, \wedge, \supset, \equiv$ nazýváme po řadě funktory ***negace***, ***disjunkce***, ***konjunkce***, ***implikace***, ***ekvivalence***.

Gramatika jazyka výrokové logiky rekurzivně definuje ***formule***:

(1) Výrokové symboly jsou formule /báze definice/.

(2) Jsou-li výrazy A, B formule, pak jsou formulemi i výrazy

$$(\neg A), (A \wedge B), (A \vee B), (A \supset B), (A \equiv B) \qquad (*)$$

/indukční krok definice/.

(3) Jiných formulí výrokové logiky, než podle bodů (1), (2) není /uzávěr definice/.

Jazyk výrokové logiky je množina všech formulí výrokové logiky.

Formule vzniklé podle bodu (1) nazýváme ***elementárními /atomárními***, ***primitivními/ formulemi***, formule vzniklé podle bodu (2) ***složenými formulemi***.

sémantika (význam) formulí

Pravdivostní ohodnocení (valuace) výrokových symbolů je zobrazení *v*, které ke každému výrokovému symbolu p přiřazuje pravdivostní hodnotu, tj. hodnotu z množiny {1,0}, která kóduje množinu {Pravda, Nepravda}: $\{pi\} \to \{1,0\}$.

Pravdivostní ohodnocení (valuace) výrokových symbolů je zobrazení *v*, které ke každému výrokovému symbolu přiřazuje pravdivostní hodnotu, tj. hodnotu z množiny {1,0}, která kóduje množinu {pravda, nepravda}.
Pravdivostní ohodnocení všech výrokových symbolů jazyka definuje ***model jazyka výrokové logiky***.

Pravdivostní funkce formule výrokové logiky je funkce *w*, která ke každému pravdivostnímu ohodnocení výrokových symbolů přiřazuje pravdivostní hodnotu celé formule. Tato hodnota je určena takto:

(1) Pravdivostní hodnota elementární formule je rovna pravdivostní hodnotě výrokového symbolu, tj.

$$w(p)_v = v(p) \text{ pro všechny výrokové proměnné p.}$$

(2) Jsou-li dány pravdivostní funkce formulí A, B, pak pravdivostní funkce formulí $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \supset B$, $A \equiv B$ jsou dány následující tabulkou 2.1:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \supset B$	$A \equiv B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Výrokově logická analýza.

Analýza na základě výrokové logiky nám umožňuje studovat strukturu vět z hlediska skládání jednoduchých výroků do složených výroků pomocí logických spojek. Elementární výroky zde považujeme za *nestrukturované "cihly",* které skládáme do strukturovaných bloků. Elementární výroky vstupují do spojení *jen* svou pravdivostní hodnotou a jsou navzájem zcela nezávislé. V dané větě proto označíme jednotlivé elementární výroky různými výrokovými symboly a místo spojek přirozeného jazyka použijeme odpovídající výrokové symboly pro spojky.

Výrokové spojky jsou zpřesněnou analogií příslušných spojek přirozeného jazyka (zejména v případě disjunkce a implikace), a to:

Spojka **negace** $\neg$ odpovídá "**není pravda, že**"
Je to unární spojka, nespojuje dva výroky.
Příklad: "Není pravda, že Praha je velkoměsto" (analyzujeme $\rightarrow$) $\neg p$
Spojka **konjunkce** $\wedge$ odpovídá "**a**"
Je to binární, komutativní spojka.
Příklad: "Praha je hlavní město ČR a v Praze je sídlo prezidenta ČR" $\rightarrow$ $p \wedge q$

Spojka **disjunkce** $\vee$ odpovídá **"nebo"** (binární, komutativní spojka)
Pozor! Spojka "nebo" se často používá v přirozeném jazyce ve *vylučujícím* smyslu "buď, anebo", pak při analýze použijeme jinou spojku – **alternativu** (neboli **nonekvivalenci**),
"Osobní auta mají přední nebo zadní náhon" (nebo obojí) $\rightarrow$ $p \vee q$
!!!Ale**!!!** Tento muž je ženatý nebo svobodný" $\rightarrow$ $\neg (p \equiv q)$

Spojka **implikace** $\supset$ odpovídá "**jestliže, pak", "když, tak", "je-li, pak**", apod.
Je to jediná binární spojka, která není komutativní, proto nazýváme první člen implikace **antecedent**, druhý **konsekvent.** Implikace nepředpokládá *žádnou obsahovou souvislost* mezi antecedentem a konsekventem, proto bývá někdy nazývána *materiálová implikace* (středověk "*suppositio materialis"*).
Implikace tedy (na rozdíl od častých případů v přirozeném jazyce) nezachycuje ani příčinnou ani časovou vazbu.
"Jestliže 1+1=2, pak železo je kov" (pravdivý výrok) $\rightarrow$ $p \supset q$
Spojka **ekvivalence** $\equiv$ odpovídá "**právě tehdy, když", "tehdy a jen tehdy, když"**, apod. , ale ne "tehdy, když" – to je implikace!
„Náš národní tým to utkání vyhraje jen tehdy a tehdy když hráči budou hrát srdcem.“

Mohou nastat dvě situace: budeme hrát srdcem a pak vyhrajeme, nebudeme hrát srdcem a nevyhrajeme.
Implikace, <u>rozdíl mezi nutnou a postačující podmínkou:</u>

Následující dva výroky jsou ekvivalentní.
Náš národní tým utkání vyhraje pouze tehdy, jestliže hráči jsou v dobré fyzické kondici.
Jestliže národní tým utkání vyhraje, pak hráči jsou v dobré fyzické kondici.
To, že hráči budou v dobré fyzické kondici je u obou **nutnou**, nikoli postačující podmínkou k tomu, aby vyhráli. Tedy může se stát, že budou v kondici a stejně nevyhrají. Je ale jasné, že **jestliže vyhrají, pak nutně byli v dobré fyzické kondici**. Nutná podmínka je tedy na pozici konsekventu: $p \supset q$
p…národní tým vyhraje utkání
q…hráči budou v dobré fyzické kondici

Náš národní tým utkání vyhraje tehdy, jestliže si hráčibudou věřit.
Jestliže si hráči budou věřit, pak náš národní tým to utkání vyhraje.
To, že si hráči budou věřit je u obou **postačující** podmínkou k tomu, aby náš tým utkání vyhrál. Tedy pokud bude pravdivé tvrzení, že si budou věřit, pak nutně bude pravdivé i tvrzení, že vyhrají.
Postačující podmínka je tedy na pozici antecedentu $q \supset p$.
p…národní tým vyhraje utkání
q…hráči budou v dobré fyzické kondici

Je-li formule A vytvořena z *k* různých výrokových symbolů, pak existuje celkem 2^k různých ohodnocení (valuací) *v* formule A. Každé ohodnocení *v* výrokových symbolů obsažených ve formuli A, pro které je hodnota pravdivostní funkce rovna 1, tedy $w(A)_v = 1$, se nazývá ***model*** této ***formule***.
Formule A výrokové logiky je ***splnitelná***, existuje-li aspoň jeden model formule A.
Formule A výrokové logiky je ***tautologií /logickým zákonem/***, je-li každé ohodnocení modelem formule A. Skutečnost, že formule A je tautologií, označujeme zápisem |= A.
Formule A výrokové logiky je ***kontradikcí***, jestliže nemá model.
Množina formulí M je ***splnitelná***, jestliže existuje valuace *v* taková, že $w(A)_v = 1$ pro *každou* formuli $A \in M$. Takové ohodnocení *v* se pak nazývá ***model množiny M.***
Formule A ***výrokově logicky vyplývá*** *z množiny formulí M,* značíme *M* |= A, jestliže A je pravdivá v každém modelu množiny *M.*