Místo předmluvy

AUTOR S ČTENÁŘEM SHODU HLEDÁ

Máš rozum? „Mám.“
Proč ho tedy neužíváš?
Neboť když ten plní svou povinnost,
co jiného ještě chceš?
Marcus Aurelius, Hovory k sobě

Vážený čtenáři, následující body by měly ukázat, zda jsme schopni si porozumět (a také předvést několik příkladů problematiky, kterou se budeme v textu zabývat). Podle výsledku uvedeného minitestu vám autor nabízí tři možná pokračování (výstupy A–C).

1) Jestliže prvé, pak druhé. Avšak prvé. Tedy druhé. — Takto vyjadřovali jedno ze základních pravidel vyvozování důsledků již v antice. Rozumíte-li a souhlasíte-li, přejděte k bodu 3.

2) Pokud nebyl první bod zcela jasný, pokusme se ještě jednou: Přijmeme-li (uvěříme-li, považujeme-li za správné, pravdivé, atd.), že z jakéhosi předpokladu („prvé“) plyne jakýsi závěr („druhé“) a jestliže současně akceptujeme správnost předpokladu, musíme také přijmout správnost závěru. Například jsme-li přesvědčeni, že „Jestliže je Cyril doma, pak si čte.“ a nadto zjistíme, že „Cyril je doma.“, musíme vyvodit, že „Cyril si čte.“.

Zcela analogicky, jestliže nám někdo dokáže (v jakémkoli pořadí) tvrzení „Číslo $\mathfrak{c}$ je větší než *0*.“ a rovněž tvrzení „Je-li číslo $\mathfrak{c}$ větší než *0*, pak $\mathfrak{c} =$ *1*.“, nezbude nám než uznat, že dokázal také tvrzení „Číslo $\mathfrak{c}$ je rovné *1*.“.

Souhlasíte-li po dodatečném vysvětlení, přejděte k dalšímu bodu, jinak se znovu zamyslete nad prvními dvěma body; pokud neporozumíte ani na druhý pokus, přejděte k výstupu A.

3) Předpokládejme, že jsme přijali za správná tvrzení „Každý člověk je smrtelný.“ a „Sókrates je člověk.“ Umíte na základě těchto předpokladů přisoudit Sókratovi ještě jinou vlastnost než tu, že je člověkem[1)]? — Že je odpověď zcela jednoduchá! — Pochopitelně, když Sókrates je člověk, musí mít všechny vlastnosti, které má každý člověk, tedy např. musí být podle prvního přijatého předpokladu smrtelný. — Není-li tato úvaha zcela jasná, zamyslete se ještě jednou

[1)] Jedná se opět o klasický příklad, tentokrát však již ne antický.

a pokud opravdu nesouhlasíte ani poté, přejděte k výstupu A, jinak pokračujte dalším bodem.

4) Text nepředpokládá *žádné* předběžné znalosti. Jeho čtení však vyžaduje minimální schopnost a zejména *ochotu* myslet. Říká se, že „myšlení bolí“ — pokud nejste ochoten ani trochu námahy podstoupit, přejděte k výstupu A.

Jste ochoten se smířit s trochou formalismu? Například psát místo slova „prvé“ písmeno $\mathtt{p}$, slovo „druhé“ nahrazovat písmenem $\mathtt{q}$, vazbu „...jestliže, pak ...“ vyjadřovat např. znakem $\rightarrow$ a vazbu „není pravda, že ...“ zapisovat např. symbolem $\neg$? Bod 1) pak užívajíce uvedených znaků převedeme na tvar: Z tvrzení $\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q}$ a z tvrzení $\mathtt{p}$ vyvodíme tvrzení $\mathtt{q}$.

Nahlížíte (nebo jste alespoň ochoten přijmout) fakt, že vyvození z daných předpokladů závisí na *tvaru* (struktuře) předpokladů, nikoli na jejich konkrétním obsahu? Například ve třetím bodě bychom z předpokladů „Každý homo je mortalis.“ a předpokladu „Sókrates je homo.“ měli vyvodit „Sókrates je mortalis.“ bez jakékoli znalosti významu latinských slovíček „homo“ a „mortalis“.

Nehodláme zápisu užívajícího znaky (symboly) nadužívat, avšak v některých případech činí jeho užití text mnohem přehlednější. Pokud zcela odmítáte jakýkoli symbolický zápis, přejděte k výstupu A, jinak pokračujte následujícím bodem.

5) A teď něco podstatně těžšího. Mám 3 vnoučata: Jakuba, Terezku a Kačenku. S vnukem bych rád mluvil, mám však tak málo času, že za ním dnes pojedu jen tehdy, když si *budu jist*, že je doma. Dozvěděl jsem se:

Je-li Jakub doma, není doma Terezka.
Jestliže je Kačenka doma, je doma i Terezka.
Není-li Kačenka doma, je doma Jakub.

Mám za vnukem jet? Mám za ním jet, pokud jsem se místo první informace dověděl:

Není-li Jakub doma, není doma ani Terezka.

Znáte již odpovědi? — Skutečně již víte, jak odpovíte? — Správná odpověď na první otázku je „ne“ a na druhou otázku „ano“. Pokud jste odpověděl jinak nebo pokud jste si nebyl s odpověďmi jist, bude vám k užitku si přečíst první paragraf kap. I. V takovém případě chápejte další body této ne-předmluvy jako představení některých okruhů, které pro vás knížka z bohatství logiky vybírá, a jejich čtení zakončete přechodem k bodu C. Jestliže si jste dostatečně jist, že vždy budete znát správnou odpověď na problémy podobné úlohám z tohoto bodu, pokračujte v našem minitestu s nadějí, že zvítězíte nad všemi léčkami v něm nastraženými (a propracujete se k výstupu B).

6) O jakési školní třídě jste získali následující informace:

Každý vysoký student umí anglicky.

Žádný student, který sedí vpředu, nečte básně.
Některý student, který rozumí fyzice, neumí anglicky.
Každý student, který nesedí vpředu, je vysoký.

Rozhodněte, zda z těchto informací lze vyvodit:

Některý student rozumí fyzice a nečte básně.

Jako variaci čtvrté informace uvažme větu:

Žádný vysoký student nesedí vpředu.

Změní se vaše odpověď, zaměníme-li čtvrtou informaci její variací?

Již jste si rozmyslel správné odpovědi? — Pokud jste neodpověděl „ano“ na první otázku nebo pokud jste nezjistil změnu odpovědi na „ne“ při záměně čtvrté informace za její variaci nebo pokud jste si nebyl dostatečně jist, je vhodné, abyste nahlédl do §1 kap. II. Neměl byste proto skončit bodem B, nýbrž bodem C.

7) V jakémsi městečku mají jen jednoho holiče a tvrdí, že ten holí přesně ty muže, kteří se neholí sami. Toto tvrzení se zdá rozumné do doby než si položíme otázku, zda holič holí sám sebe. Kdyby se holil, nesměl by se podle tvrzení holit a kdyby se neholil, musel by se holit. Takovéto paradoxy[2)] jsou známy od 4. stol. př. Kr. a jejich řešení bylo v průběhu staletí bezvýsledně věnováno mnoho úsilí. Proto se považuje za úspěch, že Bertrand Russell popsal důvod, který vede ke vzniku podobných paradoxů a dal tak návod (viz §2 kap. III), jak se paradoxům

[2)] Logické paradoxy pronikly i do krásné literatury; asi nejhezčí příklad je v 51. kap. Cervantovy knihy Duchaplný rytíř Don Quijote de la Mancha, kde je paradox podán jako otázka pro Sancho Panzu v roli vladaře:
Před Sancha předstoupil jakýsi muž a řekl: „Pane, velká řeka dělila panství na dvě části, . . . přes tu řeku vedl most a na jeho konci stála šibenice . . . a pán té řeky, toho mostu a celého toho panství vydal zákon, který zněl takto: ‚Kdokoli chce přejít po tomto mostě, musí nejdříve odpřisáhnout, kam má namířeno a co tam hodlá dělat; a jestliže bude přísahat podle pravdy, budiž ihned propuštěn na druhou stranu, selže-li však, ať zemře na této šibenici, a nikomu nebudiž udělována milost!‘ . . . Co se však jednou nestalo! Když vzali zase do přísahy jednoho člověka, prohlásil a odpřisáhl jim, že přišel jenom proto, aby skončil svou pozemskou pouť na té šibenici u mostu a za jinou záležitostí prý nepřišel. Soudcům byla ovšem ta přísaha divná a řekli si: ‚Pustíme-li toho muže svobodně na druhou stranu, pak nám tu právě křivě přísahal a podle zákona by měl skončit na šibenici, a jestliže ho dáme oběsit, sám přece přísahal, že sem přišel, aby zemřel na šibenici, a kdo podle pravdy přísahá, má být podle téhož zákona propuštěn bez překážek.‘ A teď je na vás, pane vladaři, abyste sám rozhodl, co by měli ti soudcové udělat s oním mužem, neboť dosud nevědí kudy kam a jde jim již z toho hlava kolem.“ Cervantův Sancho si uvědomil logický paradox a řekl: „. . . ten váš pocestný může zrovna tak lehce skončit na šibenici jako zůstat naživu, neboť pravda ho před smrtí ochrání a lež ho na smrt odsuzuje.“ Sancho proto doporučil onoho člověka propustit s (mimologickým) odůvodněním, ve kterém vědomě rezignuje na rozumové řešení úlohy: „Když mají soudci stejně mnoho důvodů k tomu, aby jej na hrdle potrestali, jako k tomu, aby jej osvobodili, ať ho jen nechají přejít volnou nohou na druhý břeh, neboť chvályhodnější je přece vždycky konat dobro než rozmnožovat zlo.“ a dodává, že je-li spravedlnost na váhách, je lépe upustit v oné věci od trestů a přiklonit se spíše k milosrdenství. (překlad Z. Šmíd)

vyhnout (od té doby, za celých sto let, se nenašel žádný nový paradox, který by vyžadoval další zdůvodňování). Jestliže neznáte Russellovo kritérium, přejděte na závěr k výstupu C.

8) Najít důkaz nějakého zadaného tvrzení může být stejně obtížné jako najít pověstnou „jehlu v kupce sena". Možných důkazů v predikátovém počtu je dokonce nekonečně mnoho („kupka sena je nekonečně velká") a zdá se proto těžko představitelné, že existují metody prokazující, že důkaz *zadaného* tvrzení vůbec neexistuje (metoda ukazující, že „jehla v kupce sena" není, se musí vypořádat se skutečností, že „nekonečně velkou kupku se nám nikdy nepodaří postupným probíráním prohlédnout celou"). Nicméně metody, jež ukazují, že důkaz tvrzení v nějaké teorii nemůže existovat, jsou známy a popis nejběžnější z nich najde čtenář v prvním paragrafu třetí kapitoly. Ve druhém paragrafu téže kapitoly je při popisu Gödelových vět o neúplnosti aritmetiky předvedena jiná metoda, která vede k nalezení tvrzení, jež je nedokazatelné v zadané teorii samo a sobě, avšak navíc není v uvažované teorii dokazatelná ani jeho negace (tj. tvrzení, které získáme uvedením našeho tvrzení souslovím „není pravda, že ..."). Gödelovy věty představují jeden z vrcholných výsledků dosažených ve dvacátém století, a to nejen v logice, avšak v celé matematice. Pokud se s těmito metodami chcete seznámit, přejděte k bodu C, jsou-li vám známy a i jinak jste úspěšně zvládli všechny nástrahy našeho minitestu, přejděte k výstupu B.

Výstup A) Autor se vám hluboce omlouvá, obává se, že přes veškerou snahu není schopen pro vás uspokojivě látku vysvětlit; ve druhém a třetím bodu se snažil na konkrétních případech objasnit vyvození závěru z předpokladů a neuspěl — nebo jste vy, čtenáři, odmítl nadále spolupracovat obávav se námahy či zápisu v symbolech. Nebyla by pro vás zajímavější nějaká poezie? Například krásné verše a příběhy Homéra? Začtěte se např. do XII zpěvu Odysseje, do veršů[3]:

K ostrovu Thrínakiji pak připluješ. Četná tam stáda
tučných ovcí a krav má Hélios, jež se tam pasou.
...pakli je přepadat budeš, tu zvěstuji záhubu tobě,
lodi i soudruhům tvým! A sám-li se záhubě vyhneš,
pozbudeš však svých druhů a vrátíš se pozdě a bídně.

Nenaříkejte, vážený čtenáři, že zde máme zase „Jestliže prvé, pak druhé.", a smiřte se s tím, že logické usuzování se vyskytuje i v poezii — každý, kdo slyšel ten příběh dokonce už ví, že „prvé" nastalo:

Hned z bohova skotu si přihnali nejlepší kusy,
které u temné přídi se pásaly korábu mého,
...a krávy skláli a stáhli, ...

[3] překlad O. Vaňorný

a také je mu známo — a na základě logického vyvození ho to nepřekvapuje — že příběh pokračoval:

> Zároveň Kronovec zahřměl a mrštil do lodi bleskem:
> koráb se celý zvrátil, byv udeřen Diovým bleskem,
> sirný jej naplnil pach — vtom druhové vypadli z lodi.
> Oni jak rackové mořští kol černého korábu všichni
> vlnami zmítáni byli — však bůh jim odnímal návrat.

Když už i v těch nejslavnějších básních se objevují logická vyvození (pohádky ani nezkoušejte, tam jsou úvahy předvedeného druhu velice časté), nechcete se přemoci a přece jen to s logikou zkusit? — Opravdu ne? — Autor se tedy s vámi loučí, avšak Logika za vámi sebevědomě (a poněkud výsměšně) volá: Na shledanou!

Výstup B) Autor se obává, že vám v tomto textu mnoho nového nesdělí. Bude pochopitelně rád, pokud text prolistujete a něco zajímavého pro sebe objevíte. Nechcete však raději vzít do ruky knihu, která je vás více hodna? Je řada hezkých a podnětných knih, které vám otevřou dveře do překrásného světa matematické logiky; některé texty jsou dokonce v češtině. Co takhle začít s knihou [So] nebo s knihou [Šv]? Z cizojazyčných doporučuji zejména [Sh], o teorii modelů pak [Ch-K].

Výstup C) Ano, vám je tento text určen.

*

Nenechte se odradit řadou tabulek a zápisů v symbolech, které se objeví při zběžném prolistování, tabulky a diagramy jsou spíše ilustracemi napomáhajícími k pochopení textu. KNIHA JE PSÁNA JAKO STAVEBNICE, vy sám si rozhodnete do jakých podrobností chce v tom kterém okamžiku a v té které partii zajít. Základní text tvoří asi dvě třetiny knihy a není v něm příliš mnoho formalismu, tabulek, a dokonce ani mnoho složitějších úvah. Tento základní text získáte vynecháním dodatků k jednotlivým kapitolám, vypuštěním veškerého textu psaného petitem, navíc je možno vynechat některé úlohy a cvičení. Pokud se seznámíte s tímto základním textem, získáte celkový přehled o logice. Autor však doufá, že studium základního textu vzbudí ve vás, milý čtenáři, zájem o další poznatky a pro tento případ je připraven zbytek textu. Ten je možno číst spolu se základním textem, nebo se k jednotlivým částem vracet při opakovaném čtení podle libosti a času.

Než začnete číst, vznáší k vám autor jednu jedinou prosbu: až něčemu neporozumíte na prvý pokus, nenadávejte autorovi moc květnatě za neschopnost vám to lépe vysvětlit — vězte, že autor si sám mnohokrát naříkal nad svými schopnostmi a mnohokrát se snažil text učinit srozumitelnější; snad se nakonec shodneme.

* * *

V době psaní tohoto textu byla autorova práce podporována z grantu IAA 1019401 GA AV ČR a výzkumného záměru AV 0Z10190503. Kniha byla napsána v TEXu.

Ke knize vznesly řadu připomínek dvě skupiny studentů. První skupinu tvořili studenti H. Svobodová, P. Fiala a J. Vácha z Gymnázia Christiana Dopplera, kteří prokázali, že je možno knihu číst i bez předběžného výkladu. Studenti A. Nohejl a M. Volek z Gymnázia Jana Keplera a student A. Liška z Gymnázia J. Ortena v Kutné Hoře měli četbu ulehčenou předběžným výkladem, avšak jejich úkolem byla mnohem podrobnější kontrola textu. Práce druhé skupiny probíhala v rámci projektu Otevřená věda. Autor velmi děkuje všem uvedeným studentům za upozornění na mnohé chyby a nejasná místa v předběžném textu.

Děkuji své dceři M. Vomlelové, Ph.D. za program řešící úlohy typu „zebra“. Program mi umožnil v reálném čase sestrojit úlohy různé obtížnosti.

V Praze dne 24. dubna 2006 A. S.

ÚVOD

Rozum, právě tak jako oko, zatímco nám
umožňuje vidět a vnímat ostatní věci,
nezaznamenává sám sebe;
vyžaduje obratnost a úsilí
poodsunout ho na jistou vzdálenost
a učinit ho sobě samému objektem.
John Locke, Esej o lidském rozumu.

Lidé si váží rozumu, vždyť dokonce jako název pro sebe samé jako biologický druh zvolili označení „člověk rozumný“. Lidská úcta k rozumu jde tak daleko, že již středověcí myslitelé „omezovali“ Boží *všemohoucnost* rozumem (bezespornosti)[1]. Mnozí lidé se téměř „chlubí“, že neumí matematiku (mnohokrát slyšíte „Já jsem měl vždy potíže s matikou.“), avšak je nepravděpodobné, že bychom se setkali s člověkem, který by říkal „Já jsem se nikdy nenaučil logicky myslet.“

Považujeme za samozřejmé, že umíme správně uvažovat, avšak téměř nikdy si neklademe výslovně otázky typu: Nemůže nastat situace, kdy samo usuzování nás dovede do neřešitelných rozporů? Co to doopravdy znamená něco dokázat? V jakém rozsahu může být při dokazování (matematikova) intuice nahrazena mechanickým kalkulem? Existují meze našeho usuzování? Shodujeme se všichni v tom, co je správné vyvozování? — Těmito a mnohými podobnými otázkami se zabývá logika a alespoň v minimální míře budou předmětem i tohoto textu.

Již na začátku však zdůrazněme, že v logice jde o to, *jak* usuzujeme (jak máme správně vyvozovat důsledky), a nikoli *na podkladě čeho* k závěrům přicházíme. Logika formuluje výslovně ty vyvozovací kroky, které pokládáme intuitivně za správné, a zkoumá takto vzniklý systém. Logika však nevyšetřuje jakým způsobem a proč volíme předpoklady. Ověřování předpokladů, z nichž vyvozujeme (odvozujeme, dokazujeme, atd.) důsledky, je otázkou zkušenosti, jiné vědy, nebo víry (přijímané někdy vědomě, často však podvědomě). V logice se dokonce nestaráme o to, zda a v jakém smyslu jsou předpoklady pravdivé, ale pouze o to, zda je správné *vyvození*. (Způsob vyvození může být v pořádku i v případě, že předpoklady nejsou správné.)

Na základě jejího středověkého chápání definujeme obvykle logiku jako vědu o správném usuzování (vyvozování důsledků), i když původní řecké chápání bylo poněkud širší („logos“ — $\lambda \acute{o} \gamma o \varsigma$ — má více významů: řeč, slovo, myšlenka, ro-

[1] Sv. Tomáš Akvinský (1225–1274) v Teologické sumě shrnuje své stanovisko: „Musí se říci, že pod všemohoucnost Boží nespadá, co obsahuje odporování.“

zum, smysl, atd.). Pokusíme se čtenáři předvést, že při zkoumání správného vyvozování — tedy při vyšetřování podstatné oblasti lidského rozumu — dosahuje matematická logika hlubokého poznání.

*

Několik slov k historii logiky nalezne čtenář v dodatku o kořenech logiky, teď učiňme jen několik zcela základních poznámek.

Za zakladatele logiky je všeobecně pokládán Aristotelés (384–322 př. Kr.), který svou naukou o sylogismech (viz §1 kap. II) položil základy *systematickému* zkoumání našeho způsobu vyvozování důsledků. Zkoumání logiky se rozvíjelo také v megarsko-stoické škole, za jejíhož prvního představitele se uvádí Eukleidés z Megary (†360 př. Kr.). Rozkvět logiky u Řeků trval asi 150 let.

Na antické výsledky navázali středověcí myslitelé, např. formulací dalších principů logiky. Vrchol středověké logiky je kladen krátce po jejích začátcích, tzn. do 13. stol.; po 14. stol. nastává útlum. Scholastická systematičnost ovlivnila nejen následující pojetí logiky, ale velice významně i její výuku.

V devatenáctém století začíná rozvoj *matematické* [2)] logiky, vyvolaný zejména potřebou upřesnit základy matematiky (obzvláště analýzy). Používání matematických metod a s ním spojená *idealizace* a *formalizace našeho vyvozování* se staly jedním z nejdůležitějších rysů matematické logiky. Při tomto přístupu zanedbáváme veškeré psychologické aspekty a zůstávají nám jen postupy, které je možno kdykoli znovu opakovat; dokonce ověřování, zda naše vyvozování bylo korektní, je již natolik mechanické, že je lze svěřit stroji (při hledání cesty, která vede k prokázání tvrzení, se však uplatňuje lidská intuice). Formalizace vyvozování (dokazování) jednak vede k přesnému vymezení, co vyvozováním rozumíme, a jednak umožní myslet o myšlení, přesněji řečeno myslet o formalizovaném myšlení. Zdůrazněme, že právě formalizace (matematizace) umožnila ukázat řadu hlubokých vět o našem (takto vymezeném) vyvozování. Za nejvýznamnější osobnosti počátků matematické logiky je nutno počítat Georgea Boolea (1815–1864) a Gottloba Fregeho (1848–1925). Mezi matematickými logiky vynikli obzvláště Bertrand Russell (1872–1970) a brněnský rodák Kurt Gödel (1906–1978).

*

V Kritice slov Karel Čapek s půvabem jemu vlastním napadá logiku: „O logickém důkazu je jediná pravda, že se nic nedá logicky dokazovat; což vám dokážu logicky. Buď dokazuji své tvrzení samými evidentními soudy; ale kdyby mé tvrzení plynulo evidentně z evidentních vět, bylo by samo evidentní, a tu by ovšem naprosto nepotřebovalo být dokazováno. Nebo dokazuji své tvrzení větami neevidentními, ale pak bych musel logicky dokazovat všechny tyto věty „usque ad infinitum“, . . . , z čehož logicky plyne, že logický důkaz je nemožný; a není-li tento

[2)] nazývané též symbolickou

logický důkaz naprosto přesvědčující, vidíte z toho, že logické dokazování opravdu za nic nestojí".

K. Čapek zpochybňuje samu podstatu logiky, neboť pojem důkazu je jedním z jejích nejdůležitějších pojmů. Pokud bychom však přijali Čapkovy výhrady, musili bychom revidovat náš přístup k mnohem širší oblasti zahrnující celé lidské rozumové vyvozování. Připomeňme, že Eukleidés (315–271 př. Kr.) ve svých Základech jako prvý vyvozuje z několika axiomů celou nauku (geometrii, ale protože aritmetiku chápe jako součást geometrie, je možno říci, že celou tehdejší matematiku). Deduktivní metoda však neovlivnila pouze matematiku a vědy blízké matematice (např. teoretickou fyziku), ale zasahuje — a to dokonce i ve své formalizované podobě — do velice mnoha oblastí lidského poznání; jako příklad uveďme knihu Barucha Spinozy Ethica more geometrico demonstrata z let 1662–1665, kde je podávána filozofie metodou věta – důkaz[3].

Naštěstí není těžké nahlédnout, že Čapkovy námitky naprosto nereflektují lidskou zkušenost. Parafrázujeme-li jeho úvahu, můžeme také jednoduše „dokázat", že nikdy nedojdeme z Prahy do Prčic: při každém kroku se naše pozice změní jen málo a Prčice jsou od Prahy dost daleko. Chyba Čapkovy úvahy spočívá v tom, že mnoha (byť malými) kroky je možno urazit velkou vzdálenost, což řada účastníků pochodu na uvedené trase prakticky prokázala. Analogicky není možno popřít, že i pomocí evidentních důkazových kroků je možno dojít (je-li jich hodně) k tvrzením značně neevidentním.

Dokonce je možno říci, že právě rozložení důkazu do řady jednoduchých „kroků" způsobuje snadné ověření, zda důkaz jako celek je přesvědčivý.

* * *

Během dlouhého zkoumání korektního lidského vyvozování bylo shromážděno množství poznatků. Každý pisatel díla o logice musí (subjektivně) z tohoto bohatství vybírat to, co je podle jeho názoru nejdůležitější. Autor se přiznává k zaměření na výsledky matematické logiky. To však neznamená, že bychom zcela pomíjeli ostatní části logiky. Z hlediska matematického pojetí např. poklesl význam aristotelské sylogistiky, v textu ji však věnujeme více než jeden paragraf vzhledem k její aplikovatelnosti. Mnoho antických nebo scholastických zákonů vyvozování se ukazuje jako klíčová tvrzení rovněž pro matematickou logiku. Budeme se snažit upozornit na tato místa, jež jsou významná jak z intuitivního, tak i z formálního hlediska.

Autor se snažil vybrat do základního textu jen ta nejzákladnější a nejpodstatnější fakta; mnohdy je však těžké odolat a nezodpovědět ani ty otázky, které

---

[3] Celý název českého vydání z r. 1926 zní: Ethika *po geometricku* vyložená, ve vydání v nakladatelství Dybbuk, Praha 2004 se název překládá Etika vyložená *způsobem užívaným v geometrii* ... Pro zajímavost uveďme první Spinozův axiom: „Vše co jest, jest buďto samo v sobě, anebo v něčem jiném."

si téměř jistě položí každý trochu zvídavější čtenář. Z toho důvodu připojujeme dodatky k jednotlivým kapitolám. Pro vážnější zájemce také zmiňujeme odkazy na literaturu, ve které lze nalézt prokázání uvedených tvrzení. Autor si je vědom, že je běžné uvádět citace[4)] v odborném textu a nikoli v textu určeném k základnímu seznámení s problematikou, a prosí tedy ty čtenáře, kterým by citace vadily, aby je prostě pominuli. Drobnějším písmem vyznačujeme ty části, které jsou o poznání méně důležité než zbytek textu.

*

Při výkladu zachováváme tradiční rozdělení na **výrokový** a **predikátový** počet, které se datuje již od antiky, neboť Aristotelés a jeho následovníci se zabývali význačnými aspekty predikátového počtu, megarsko-stoická škola pak počtem výrokovým. Stoikové dokonce kladou základy axiomatického přístupu k výrokovému počtu a předznamenávají tak přístup, který byl do důsledku doveden až v matematické logice.

Podle jiného hlediska dělíme logiku na **syntax**, ve které se budeme zabývat budováním formulí a vztahy mezi nimi, zejména dokazatelností, a **sémantiku**, v níž se budeme zajímat o význam formule, obzvláště o její pravdivost (podrobněji nahlédneme význam těchto pojmů v dalším textu). Zlatým hřebem je pak ukázání vztahu mezi sémantikou a syntaxí — dokazatelné jsou přesně[5)] všechny vždy pravdivé formule (viz první paragraf kapitoly I a §2 druhé kapitoly).

*

Kvantifikací proměnných a dalšími podstatnými vlastnostmi proměnných se budeme zabývat až ve druhé kapitole. Avšak velice důležitý pojem „proměnné“ užijeme již v první kapitole textu (výroková proměnná), a proto již teď krátce připomeňme, co si máme pod „proměnnou“ představovat. Předpokládejme, že máme jakýsi soubor objektů (soubor může být konečný i nekonečný); proměnná pak představuje blíže neurčený objekt z tohoto souboru („proměnná probíhá uvažovaný obor“). Například v bodě 3 z ne-předmluvy proměnná „člověk“ zastupovala kteréhokoli konkrétního člověka.

* * *

V textu budeme několikrát budovat objekty rekurzí (např. formule a důkazy výrokového počtu v kap. I, termy, formule a rovněž důkazy predikátového počtu ve druhé kapitole). Základní myšlenka je vždy stejná a velice jednoduchá, liší se jen její provedení. Protože se však v textu idea opakuje několikrát, zdá se vhodné

---

4) Odkazy budou směřovat zejména do česky psaných knih [So] a [Šv], v řadě případů budeme také citovat původní práci, ve které se výsledek poprvé objevil.

5) tzn. každá dokazatelná formule je vždy pravdivá a současně každá vždy pravdivá formule je dokazatelná

ji popsat jednou pro celý text, a to na jeho počátku. Pro popis zvolíme příklady mimo matematiku, které snad čtenáři ukáží, o jak prostou ideu jde.

Zkusme popsat rekurzí (pěší) pochod. Stavebním kamenem bude jeden krok, základním pochodem bude vykonání jednoho kroku (tj. jednokrokový „pochod“ již pokládáme za pochod) pravidlem pro rekurzivní vytváření pochodů bude „každý pochod můžeme prodloužit o jeden krok“. Doufám, že souhlasíte, že takto popíšeme naše chápání idealizovaného pochodu. Idealizace spočívá zejména v tom, že při definici zanedbáváme lidské omezení časem. Je jistě nemožné, aby reálný člověk udělal tolik kroků, kolik je atomů v naší sluneční soustavě. Ovšem pohled zanedbávající lidskou konečnost[6)] je příznačný pro celou matematiku — o dvou přímkách jen málo se lišících od rovnoběžek také prohlásíme, že se protnou, i když nikdy reálně nemůžeme dosáhnout jejich průsečíku.

V této knize budou všechny konstrukce rekurzí objektů toho kterého typu určeny zadáním tří parametrů, kterými jsou:

(1) *stavební kameny* (v předchozím případu kroky),

(2) *základní objekty* konstrukce (v předchozím případu pochod tvořený jediným krokem)

(3) a hlavně *pravidla určující jak* z již sestrojených objektů *vytvořit objekt nový* (v předchozím případě „prodloužením pochodu o jeden krok dostaneme opět pochod“).

Konstruované objekty budou ve všech našich případech řady stavebních kamenů, avšak nikoli jakékoli řady — jen ty řady stavebních kamenů, které můžeme vybudovat ze základních objektů užívajíce postupně pravidel pro tvorbu objektů.

Jako další pojem popišme lichokrokový pochod, a to tak, že stavebními kameny jsou znovu kroky a základním lichokrokovým pochodem je opětovně jednokrokový pochod. Pravidlem pro vytváření lichokrokových pochodů však budiž „každý lichokrokový pochod můžeme prodloužit o dvojici kroků“. Je každá trasa (systém kroků) vytvořitelná pochodem také sestrojitelná lichokrokovým pochodem? — Už znáte odpověď? — Žádná trasa pochodu se sudým počtem kroků není vytvořitelná lichokrokovým pochodem (uvědomte si, že základním lichokrokovým pochodem je jednokrokový pochod). Na druhé straně každý lichokrokový pochod je pochodem (místo přidání dvojkroku můžeme postupně dvakrát přidat jeden krok), pročež každá trasa lichokrokového pochodu je vytvořitelná pochodem.

Při popisu spojitelného pochodu znovu neměňme první dva parametry: stavební kameny budou opět kroky a základním spojitelným pochodem nechť je znovu jednokrokový pochod. Ze dvou již vytvořených spojitelných pochodů však dovolme vytvořit nový spojitelný pochod jejich prostým spojením (prodloužením). Jsou systémy tras pochodů a spojitelných pochodů stejné? — Víte již, co

[6)] V matematice běžně zaujímáme (přinejmenším) postoj, který by asi nejpřesněji odpovídal řeckým bohům: ti byli nesmrtelní, měli však vlastnosti podobné lidským.

odpovědět? — Protože připouštíme jednokrokové pochody, je zřejmě každý pochod také spojitelným pochodem (prodloužit pochod o jeden krok je totéž jako ho spojit s jednokrokovým pochodem). Nadto místo prodloužení spojitelného pochodu o jiný spojitelný pochod můžeme ho prodloužit o jeden krok a opět o jeden krok, atd., a to tolikrát, kolik kroků má přidávaný spojitelný pochod. Takto postupně (indukcí) zjistíme, že trasa každého spojitelného pochodu je rovněž trasou pochodu.

Ukázali jsme, že systémy tras pochodů a spojitelných pochodů jsou tytéž. Zkuste si však představit, že třídy vaší školy budou soutěžit o to, která vykoná za den pochod, který má nejvíce kroků. Pokud budou soutěžit podle pravidel pochodu, pojedou doprovodná vozidla kolem jdoucího zástupce třídy a při projevu únavy jej někdo vystřídá ve tvoření kroků — zbývající spolužáci se mohou zapojit pouze povzbuzováním. Při soutěži podle pravidel spojitelného pochodu bude soutěž probíhat zcela jinak. Spolužáci odhadnou úseky, které jsou schopni ujít, na jejich počátky se rozmístí a každý se bude snažit projít svůj úsek během jednoho dne. Pokud se spolužáci nepřecenili a každý skutečně svůj úsek překoná, podaří se jim vytvořit mnohonásobně delší trasu pochodu než v prvém případě.

Předchozí úvahy o spojitelném pochodu ukázaly, že je možná změna pravidel, která sice zachovává systém objektů sestrojitelných za pomoci původně uvažované rekurze, avšak mění systém objektů vytvořitelných vzhledem k nějakému omezení. V případě soutěže tříd o co nejdelší trasu pochodu byla takovým omezením vytvořitelnost pochodu během jednoho dne.

V našem textu budeme úvahy o konstrukci rekurzí aplikovat zejména na pojem důkazu. Navrhneme více možných systémů pravidel dovolujících z již vytvořených důkazů vytvářet důkazy další. Tyto jednotlivé systémy sice nebudou měnit systém formulí, které lze dokázat, avšak výrazně budou měnit sestrojitelnost důkazů vzhledem k určitým omezením. Omezením nebude sestrojitelnost důkazu během jednoho dne; jako omezení budeme uvažovat zejména přehlednost důkazu a jeho sdělitelnost jiným matematikům. Vzpomeňte si na poučení plynoucí z našeho triviálního příkladu, až se v §1 první kapitoly (a v §2 kap. II) změnou pravidel sice nezmění pojem dokazatelné formule, avšak dramaticky se změní přehlednost tvorby důkazů.

* * *

V ne-předmluvě jsme představili některé partie, kterými se budeme v předkládaném textu zabývat, není proto snad nutné nyní shrnovat obsah jednotlivých kapitol. Vhodné je však teď znovu výslovně upozornit na to, že třetí paragrafy kapitol I a II nejsou nezbytné pro pochopení dalšího textu. Druhý paragraf kap. II by měl být čten až po prostudování výrokového počtu, naproti tomu §1 druhé kapitoly je na ostatním textu téměř nezávislý. První dva paragrafy třetí kapitoly navazují na druhý paragraf kap. II, avšak v případě potřeby je možno druhý paragraf kap. III číst před prvním.

Nadto je třeba zdůraznit, že text začíná popisem naprostých základů matematické logiky, postupně však uvádí podstatné výsledky, a to zejména ve druhém paragrafu třetí kapitoly. Gödelovy věty o neúplnosti bývají mnohdy interpretovány bez pochopení jejich podstaty; ve snaze tyto vrcholné výsledky matematické logiky čtenáři přiblížit je v našem textu nejen přesně vyslovíme, avšak navíc dokonce ukážeme i metody jejich prokazování. Se stoupající závažností popisovaných výsledků roste i obtížnost čtení textu; pochopení některých částí třetí kapitoly již vyžaduje úsilí. Při experimentálním čtení textu nečinily studentům gymnázií potíže ani přípravné úvahy ke Gödelovým větám, ani jejich přesná matematická formulace, centrální myšlenky prokazování vět o neúplnosti (aplikace vlastností Gödelovy a Rosserovy formule) však zvládli až po opakovaném čtení. Je tudíž možné, že budete muset, vážený čtenáři, číst závěr druhého paragrafu třetí kapitoly několikrát. Úvahy, které na počátku třicátých let minulého století zaskočily celý matematický svět, se už autorovi nepodařilo vyjádřit jednodušeji.

V textu bude uvedena řada příkladů. Ty jsou rozděleny do tří skupin. *Příklady* jsou řešeny přímo v textu a slouží pro ilustraci definovaných pojmů. *Úlohy* jsou také obsaženy ve vlastním textu, avšak jejich řešení je nejprve ponecháno čtenáři; řešení x-té úlohy je pak uvedeno v poznámce pod čarou označené ux. Jednotlivé paragrafy jsou zakončeny *cvičeními*, jejichž stručná řešení jsou uvedena na konci textu. Zkušenost s prvními studenty, kteří četli text, ukázala, že větší zájem byl o úlohy formulované jako hlavolamy (v první kapitole např. „zebry“ a úlohy o Porcii). Úlohy zaměřené abstraktněji (žádající např. sestrojení důkazu) se zdály méně zajímavé. V matematice však jde velmi často právě o dokázání jakéhosi tvrzení a jednoduché úlohy ukládající sestrojení důkazu jsou přípravou na tuto matematickou činnost. Proto prosím, nespokojte se tím, že výsledky takovýchto úloh zkontrolujete, avšak skutečně se AKTIVNĚ SNAŽTE ŽÁDANÉ DŮKAZY SESTROJIT. Naproti tomu cvičení typu „zebra“ je v textu poměrně dost a čtenář si z nich může vybírat lehčí nebo těžší úlohy (např. cv. I-1.28, I-1.36, I-2.17–I-2.20) podle své potřeby a chuti.

*

Ve snaze o zpřehlednění textu používáme pro různé druhy objektů různé typy písma[7)]; již podle druhu písma se pozná, zda se jedná o formuli výrokového (znak $\mathcal{A},\ldots$) nebo predikátového počtu (znak $\varphi,\ldots$), o proměnnou výrokového (znak $\mathtt{p},\ldots$) nebo predikátového počtu (znak $x,\ldots$), že mluvíme o funkci (znak $\mathfrak{F},\ldots$) či predikátu (znak $\mathcal{P},\ldots$) atd. Pokud by to čtenáři nevyhovovalo, nechť prostě zanedbává různost druhů písma.

Důležitá místa (definice a tvrzení) jsou zvýrazněna po obou stranách textu svislými čarami; silnějšími čarami jsou označeny čtyři nejvýznamnější výsledky matematické logiky zařazené do našeho textu.

7) Shrnutí používaného značení je zařazeno na konec textu do rejstříku symbolů. Pro (intuitivní) přirozená čísla používáme znaky $m, n, \ldots$; nulu řadíme mezi přirozená čísla. Kladná (intuitivní) přirozená čísla označujeme pomocí symbolů $i, j, k, \ldots$

KAPITOLA I

VÝROKOVÝ POČET

Robot Radius: Nechci žádného pána.
Vím všechno sám.
Karel Čapek, RUR

§1

ZÁKLADY VÝROKOVÉHO POČTU

Výrokový počet (někdy se též hovoří o *výrokové logice*) je část logiky, kterou je možno přirovnat k mluvnickému rozboru souvětí. Při rozboru souvětí se obsahem jednotlivých vět nezabýváme, zajímají nás pouze vztahy vzniklé spojováním vět do souvětí. Podobně teď nebudeme analyzovat výrok sám o sobě, budeme zkoumat jen vztahy jednotlivých výroků s útvarem z nich složeným.

Výrokem rozumíme[1)] tvrzení (intuitivně řečeno oznamovací větu), které je dostatečně smysluplné, aby bylo *možno* říci, že je pravdivé nebo nepravdivé (nemusíme ale být schopni o pravdivosti rozhodnout; slovní spojení „Český kníže Bořivoj měl 1. 1. 880 rýmu.“ je výrok[2)]). Pravdivým výrokům je zvykem přiřazovat **pravdivostní hodnotu** 1, nepravdivým hodnotu 0.

Příklady pravdivých výroků: „Trosky Pompejí se nacházejí v Itálii.“, „17. 11. 1989 napadly policejní síly studenty.“, „Dvě různé kružnice se protínají nejvýše ve dvou bodech.“ a „Neexistuje racionální číslo, jehož druhá mocnina by byla rovna 2.“.

Příklady nepravdivých výroků: „Praha leží na Dunaji.“, „Český král Václav III. byl synem Přemysla Otakara II.“, „Čtverec má alespoň tři různé úhlopříčky.“ a „Druhá mocnina každého komplexního čísla je nezáporným reálným číslem.“.

---

1) Podané vysvětlení není přesná definice, ale pouhé vymezení, přesně tak jako v geometrii „přímka je délkou bez šířky“ nedefinuje přímku, ale pouze ukazuje, jak si máme přímku představovat. Pojem přímky je pro geometrii pojmem základním (nedefinujeme ho na základě jiných pojmů), chování přímek je popsáno axiomy. Analogicky se ve výrokovém počtu nesnažíme pojem výroku formálně definovat, ale „pouze“ zkoumáme jeho vlastnosti a vztahy výroků. Nemožnost definovat všechny pojmy je v principu věci: definovat mohu jen pomocí „jednodušších“ pojmů a musím tedy některé pojmy přijmout za zřejmé bez definice.

2) Jiný příklad volně podle Abélarda (1079-1142): „Počet hvězd je sudý.“.

Pro snazší vyjadřování budeme používat **výrokové proměnné** $\mathrm{p}, \mathrm{q}, \ldots$, které zastupují výroky (stejně jako v aritmetice užíváme proměnné zastupující čísla). Výroková proměnná tedy, intuitivně řečeno, představuje blíže neurčený výrok.

Z výroků je možno vytvářet výroky složitější, jež budeme nazývat **složenými výroky**.

V tomto paragrafu budeme zkoumat jen dva způsoby tvorby složitějších výroků: negaci a implikaci. Tím se lišíme od převážné většiny textů o výrokovém počtu, které zavádějí také další způsoby tvorby složených výroků hned v počátcích popisu výrokového počtu. K tomuto přístupu nás vede snaha o co nejrychlejší předložení významných výsledků matematické logiky. Čtenář nemusí mít obavy, že by byl ochuzen; dalšími způsoby budování složených výroků se budeme zabývat ve druhém paragrafu.

Negace matematizuje úpravu výroku prováděnou v běžné češtině obraty „Není pravda, že …“, „Neplatí, že …“ nebo vznikající změnou slovesa přidáním předpony „ne-“ (popř. z latiny převzaté „non …“). Negaci výroku p budeme označovat pomocí zápisu[3] $\neg\mathrm{p}$.

Například negací výroku „Karlova univerzita byla založena r. 1348.“ je výrok „Karlova univerzita nebyla založena r. 1348.“; pozor: negací *není* výrok typu „Karlova univerzita byla založena r. 1349.“. Slovní spojení „Karlova univerzita nebyla založena r. 1348.“ je výrok, má proto smysl vytvořit jeho negaci, což je výrok „Není pravda, že Karlova univerzita nebyla založena r. 1348.“. Poté pochopitelně nic nebrání znovu negovat posledně uvedený výrok; ve vytváření negací je samozřejmě možno neustále pokračovat. Srovnáním významu výroku a jeho dvojité negace se budeme zabývat na několika místech následujícího textu.

Nabídli jsme několik možností, jak vyjádřit negaci výroku v běžné mluvě. To předpokládá, že všechna tato vyjádření mají stejný význam. Ve většině případu je tomu skutečně tak: slovní spojení

„Není pravda, že Karlova univerzita byla založena r. 1348.“,
„Neplatí, že Karlova univerzita byla založena r. 1348.“,
„Karlova univerzita nebyla založena r. 1348.“

mají týž význam. V některých případech však může vyjádření pomocí „Není pravda, že … “ mít jiný význam než slovní spojení vzniklé přidáním předpony „ne-“ a v takovém případě negaci vyjadřuje pouze slovní spojení vzniklé uvozením „Není pravda, že … “ (nebo uvozením „Neplatí, že … “). Uvažujeme-li např. výrok

„Někdo je černovlasý.“

(jenž má význam „Existuje člověk, který má černé vlasy.“), pak negací je

[3] Používají se též zápisy $\sim\mathrm{p}$, $\overline{\mathrm{p}}$ a p'.

„Neplatí, že někdo je černovlasý.“

(ve významu „Nikdo nemá černé vlasy.“) a to je něco zcela jiného než výrok

„Někdo není černovlasý.“,

protože význam posledního výroku je týž jako výroku „Existuje člověk, který nemá černé vlasy.“. Zcela analogicky negací výroku „Přišla Eva a Jana.“ chceme vyjádřit, že alespoň jedna z nich nepřišla. Naproti tomu běžným významem slovního spojení „Nepřišla Eva a Jana.“ je, že nepřišla ani jedna.

Použití předpony „ne-“ může také připouštět více výkladů. Například význam věty „Každý není černovlasý.“ se podle české mluvnice[4)] určuje podle větného přízvuku a věta má buďto význam stejný jako výrok „Nikdo není černovlasý.“ (je-li zdůrazněno „každý“), nebo jako výrok „Někdo není černovlasý.“, tzn. „Ne-každý je černovlasý.“. Protože nechceme ponechat význam výroku na přízvuku (což by ostatně bylo v psaném textu obtížné) a ani na kontextu, budeme se vyhýbat používání slovním spojením tvaru „Každý není černovlasý.“. O významu negací výroků tvaru „Každý je černovlasý.“ a „Někdo je černovlasý.“ pojednáme rovněž v souvislosti s kvantifikací v §2 kap. II.

V běžném obchodě se prodávají různé druhy nápojů. Jistě si však umíte představit malý krámek, kde se prodávají jen dva druhy nápojů, např. cola a minerálka. Negaci výroku „Tento nápoj je cola.“ je pochopitelně výrok „Tento nápoj není cola.“. Avšak se znalostí poměrů v krámku můžeme uvedenou negaci vyjádřit také „Tento nápoj je minerálka.“. V běžném obchodě by takováto reformulace negace nebyla možná.

Nechť pro každý jednotlivý následující výrok je $\mathfrak{c}$ pevně dané číslo. Negací výroku „Číslo $\mathfrak{c}$ je menší nebo rovno 5.“ je výrok „Číslo $\mathfrak{c}$ není menší nebo rovno 5.“ a pracujeme-li v racionálních nebo reálných číslech, můžeme tuto negaci vyjádřit také „Číslo $\mathfrak{c}$ je (ostře) větší než 5.“. Pokud se naše úvahy týkají jen čísel přirozených (v takovém případě i zadané číslo $\mathfrak{c}$ musí být přirozené), můžeme negaci dokonce formulovat slovy „Číslo $\mathfrak{c}$ je větší nebo rovno 6.“; posledně uvedený výrok však nevyjadřuje negaci výroku „Číslo $\mathfrak{c}$ je menší nebo rovno 5.“ ani v oboru racionálních ani v oboru reálných čísel.

Úloha 1. Co je negací výroku „Tento trojúhelník je rovnostranný.“? Se znalostí geometrie vyjádřete negaci pomocí zcela jiných pojmů.

Úloha 2. Vyjádřete negaci výroku „Kvadratická rovnice $x^2 + 5x - 1 = 0$ má nejvýše dvě řešení.“ bez použití slova „dvě“. Prozkoumejte pravdivost výroku a jeho negace.

[4)] viz např. B. Havránek a A. Jedlička, Česká mluvnice, SPN, Praha 1988

[u1)] Negaci vyšetřovaného výroku, tj. výrok „Tento trojúhelník není rovnostranný.“ vyjádříme např. slovy „Alespoň dvě strany tohoto trojúhelníku mají různou délku.“ nebo slovním spojením „Alespoň jeden úhel tohoto trojúhelníka je různý od 60°.“ nebo pomocí „Alespoň dvě výšky tohoto trojúhelníku mají různé délky.“.

[u2)] Negaci popisuje např. spojení „Kvadratická rovnice $x^2 + 5x - 1 = 0$ má alespoň tři různá řešení.“. Původní výrok je pravdivý, jeho negace nikoli.

Na základě dvou výroků můžeme vytvořit také výrok popsaný v běžné řeči obraty „Jestliže …, pak …“, „Z … plyne …“[5], „… implikuje …“. Tento způsob sestrojení nového výroku se matematizuje **implikací**. Pro implikaci vytvořenou na základě výroků p, q (pořadí je podstatné!) je zvykem používat[6] soustavy znaků $(\mathsf{p} \to \mathsf{q})$. Místo „$\mathsf{p}$ implikuje q“ říkáme také, že „p je **postačující podmínkou** pro q“ nebo že „q je **nutnou**[7] **podmínkou** pro p“. První výrok v implikaci budeme nazývat **antecedent**, někdy se také užívá *předpoklad implikace*, či *premisa*; pro druhý výrok budeme užívat název **konsekvent**, někteří autoři používají *důsledek*, nebo *závěr implikace*.

Implikaci $(\mathsf{q} \to \mathsf{p})$ nazýváme **obrácenou implikací** k implikaci $(\mathsf{p} \to \mathsf{q})$. Pozor: obrácená implikace mívá naprosto jiný význam než původní implikace. Zmiňme ještě jeden způsob vyjadřování implikace: pro implikaci $(\mathsf{p} \to \mathsf{q})$ užíváme slovní spojení „p jen tehdy, když q“ a obrácenou implikaci $(\mathsf{q} \to \mathsf{p})$ popisujeme[8] slovy „p tehdy, když q“. Tato slovní spojení se používají zejména, nastane-li současně jak implikace, tak také obrácená implikace; pak se užívají obraty „p tehdy, a jen tehdy, když q“ nebo „p právě tehdy, když q“.

Například implikací složenou z výroku „U moře bývá písek.“ a z výroku „$2 + 2 = 5$.“ je výrok „Jestliže u moře bývá písek, pak $2 + 2 = 5$.“ Obrácenou implikací k uvedené je implikace „Z toho, že $2+2 = 5$, plyne, že u moře bývá písek.“. Pozor: vědomě jsme zvolili případ ukazující, že mezi antecedentem a konsekventem implikace nemusí být viditelná souvislost a že implikaci je možno vytvářet jak z pravdivých, tak také z nepravdivých výroků.

Úloha 3. Vyjádřete implikaci „Prší-li, jsem doma.“ co nejvíckrát pomocí jiných slovních spojení. Vytvořte obrácenou implikaci a znovu ji alespoň třikrát různě formulujte. Je význam obou implikací týž?

Úloha 4. Utvořte implikaci z výroků „Trojúhelník je rovnostranný.“ a „Trojúhelník má alespoň dvě výšky stejně velké.“ a také obrácenou implikaci. Je některá z nich v běžné geometrii pravdivá?

---

[5] viz terminologickou poznámku na konci rejstříku symbolů

[6] Někdy se pro označení implikace používá též symbolu $\Rightarrow$, případně $\supset$.

[7] Termín „nutná podmínka“ asi není tak intuitivní jako „postačující podmínka“; poznamenejme proto, že v dalším textu nahlédneme, že implikace $(\mathsf{p} \to \mathsf{q})$ má z jistých hledisek stejný význam jako implikace $(\neg\mathsf{q} \to \neg\mathsf{p})$, takže nenastane-li q, nenastane ani p, tzn. k tomu, aby nastalo p je „nutné“, aby nastalo q.

[8] Zde *není* slovní spojení „tehdy, když“ míněno jako časové určení!

[u3] Např. „Z toho, že prší plyne, že jsem doma.“ nebo „Postačující podmínkou pro to, abych byl doma, je déšť.“ a také „Déšť implikuje, že jsem doma.“. Obrácenou implikaci můžeme formulovat např. „Jsem-li doma, prší.“ nebo „Nutnou podmínkou pro to, abych byl doma, je déšť.“ nebo „Postačující podmínkou pro déšť je moje přítomnost doma.“. Význam není týž, obrácená implikace žádá, abych nebyl doma nikdy, když neprší.

[u4] Výrok „Je-li trojúhelník rovnostranný, má alespoň dvě výšky stejně velké.“ je pravdivý;

Negace výroku je výrok a výrokem je rovněž implikace vzniklá spojením jakýchkoli dvou výroků. Tyto složené výroky následně mohou sloužit jako základ pro tvorbu další negace nebo implikace a tak můžeme pokračovat k stále složitějším a složitějším výrokům. Například pro dva výroky $\mathtt{p}, \mathtt{q}$ můžeme vytvořit negaci $\neg\mathtt{p}$ a pak implikaci $(\neg\mathtt{p} \to \mathtt{q})$. Nic nám však nebrání začít implikací a vytvořit $(\mathtt{p} \to \mathtt{q})$, a tento výrok následně negovat, tzn. vytvořit výrok $\neg(\mathtt{p} \to \mathtt{q})$. Pak můžeme ze vzniklých výroků vytvořit implikaci, tu pak negovat atd.

Výroky obsažené v předchozím příkladu také vysvětlují potřebu užití závorek kolem implikace. Pokud bychom vynechali závorky, budou zápisy $(\neg\mathtt{p} \to \mathtt{q})$ a $\neg(\mathtt{p} \to \mathtt{q})$ zcela totožné. Závorky popisují způsob výstavby, jinak řečeno: rozhodují, jak zápis číst. Řadu symbolů $(\neg\mathtt{p} \to \mathtt{q})$ čteme: jestliže neplatí $\mathtt{p}$, pak $\mathtt{q}$, avšak $\neg(\mathtt{p} \to \mathtt{q})$ čteme: neplatí, že z $\mathtt{p}$ plyne $\mathtt{q}$.

Označují-li $\mathtt{p}, \mathtt{q}$ po řadě pravdivé výroky „Voda se vaří při 100^oC." a „Veverka je savec.", pak formule $(\neg\mathtt{p} \to \mathtt{q})$ označuje pravdivý složený výrok „Jestliže se voda nevaří při 100^oC, je veverka savec." (pravdivost výroku je zaručena mj. pravdivostí konsekventu — podrobnější rozbor viz o několik stránek dále při popisu sémantiky výrokového počtu). Naproti tomu formule $\neg(\mathtt{p} \to \mathtt{q})$ označuje nepravdivý výrok „Neplatí: vaří-li se voda při 100^oC, je veverka savec.", (jehož nepravdivost nahlédneme okamžitě z pravdivosti implikace „Jestliže se voda vaří při 100^oC, je veverka savec." — v posledně zmíněné implikaci je opět pravdivý konsekvent); význam popsaných složených výroků je tedy zcela jistě různý.

*

První pojem matematické logiky, který budeme definovat rekurzí, bude pojem formule výrokového počtu. Tento pojem slouží k popisu složených výroků vzniklých ze zadaných výroků[9].

Formulí výrokového počtu je jakýkoli zápis, který dokážeme sestrojit rekurzí s následujícími parametry[10]:

Stavební kameny: znaky pro výrokové proměnné $\mathtt{p}, \mathtt{q}, \ldots$, znaky $\neg$ a $\to$ a závorky (jakožto pomocné symboly);
Základní formule: znaky pro výrokové proměnné;
Pravidla pro vytváření dalších formulí:
(a) je-li $\mathcal{A}$ formule výrokového počtu, je formulí výrokového počtu také její negace $\neg\mathcal{A}$,
(b) jestliže $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ jsou formule výrokového počtu, je formulí výrokového počtu rovněž implikace $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ z nich vytvořená.

---

obrácená implikace nikoli.

9) Podrobněji: jestliže do formule výrokového počtu dosadíme za výrokové proměnné nějaké konkrétní výroky, dostaneme složený výrok vytvořený z výroků zadaných a naopak tímto způsobem dostaneme všechny složené výroky vytvořené ze zadaných výroků.

10) V tomto paragrafu se zabýváme pouze formulemi výrokového počtu vytvořenými pomocí negace a implikace; ve druhém paragrafu připustíme nadto konjunkci, disjunkci a ekvivalenci. Po rozšíření povolených spojek se pochopitelně zvětší i systém formulí výrokového počtu.

Pro formule výrokového počtu budeme používat znaky $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}, \dots$

Řady zápisů

$$p, q, (p \to q), \neg(p \to q), \neg p, (\neg p \to \neg(p \to q))$$
$$p, \neg p, q, (p \to q), \neg(p \to q), (\neg p \to \neg(p \to q))$$

ukazují příklady posloupností postupně vznikajících formulí výrokového počtu, jejichž posledním členem je zápis $(\neg p \to \neg(p \to q))$ (v první posloupnosti nejprve užijeme dvakrát pravidlo o základních formulích a pak postupně pravidla (b), (a), opět (a) tentokrát aplikované na prvý člen posloupnosti a (b) aplikované na poslední dva členy dosud sestrojené posloupnosti v obráceném pořadí). Konstrukce kterékoli z těchto posloupností prokazuje, že zápis $(\neg p \to \neg(p \to q))$ je formulí výrokového počtu.

Naproti[11] tomu např. zápis $(p \to\to q)$ nemůže být formulí výrokového počtu podle naší definice, protože podle ní v každé formuli výrokového počtu kolem znaku $\to$ musí být opět formule výrokového počtu, avšak žádná formule výrokového počtu ani nezačíná ani nekončí znakem $\to$.

Jestliže bude ze souvislosti patrné, že se jedná o formule výrokového počtu, zamlčíme někdy slova „výrokového počtu“. Umluvme se také, že budeme vynechávat závorky v zápisu formulí, pokud to neohrozí čitelnost zápisu. Poznamenejme, že pro usnadnění čtení se v matematickém textu běžně používá více typů závorek.

Úloha 5. Rozhodněte, zda zápisy $(\neg p \to \neg q)$ a $\neg(p \to \neg\neg p)$ jsou formulemi výrokového počtu a své rozhodnutí zdůvodněte.

Úloha 6. Prokažte, že zápis $\big([p \to (\neg\neg q \to \neg p)] \to p\big)$ je formulí výrokového počtu. Existuje více posloupností zápisů prokazujících, že zadaný zápis je formulí?

---

[11] V osmém bodě ne-předmluvy jsme slíbili, že ukážeme neexistenci důkazů určitých tvrzení. Výpověď, že určitý zápis není formulí je analogický, avšak mnohem jednodušší případ. Prohlašujeme totiž, že neexistuje posloupnost formulí postupně vznikajících z výrokových proměnných podle pravidel (a) a (b) pro vytváření formulí, a to posloupnost končící zadaným zápisem.

[u5] Oba zápisy jsou formulemi výrokového počtu a následující posloupnosti formulí ukazují vytváření našich formulí rekurzí:

$$p, q, \neg p, \neg q, (\neg p \to \neg q),$$
$$p, \neg p, \neg\neg p, (p \to \neg\neg p), \neg(p \to \neg\neg p)$$

— při tvorbě první posloupnosti použijeme nejprve pravidlo (a) na obě základní formule a na závěr pravidlo (b) na takto vniklé formule; ve druhém případě použijeme pravidlo (a) nejprve na základní formuli a poté na takto vniklou formuli, pak pravidlo (b) na základní formuli a na poslední člen dosud sestrojené posloupnosti a nakonec pravidlo (a) na poslední člen posloupnosti.

[u6] Posloupností zaručující, že zkoumaný zápis je formulí výrokového počtu, je např.

Úloha 7. Ukažte, že zápisy $(\mathrm{p} \to \mathrm{r}))$ a $(\mathrm{p} \to \mathrm{q}\mathrm{p})$ nejsou formulemi.

Úloha 8. Ukažte, že zápis $[\mathrm{p} \to (\mathrm{q} \to \mathrm{p}) \to \mathrm{q}]$ není formulí.

* * *

Příklad 1. Zajisté znáte Shakespearova Benátského kupce. A pravděpodobně si také vzpomínáte, že o výběru ženicha pro Porcii rozhodovala zkouška, v níž nápadník měl uhodnout ve které skřínce se skrývá Porciina podobizna, neboť jak říká Nerissa Porcii: „Váš otec byl povždy ctnostný muž. A lidé svatého života mívají v smrti šťastná vnuknutí. Proto v luterii se třemi skřínkami, zlatou, stříbrnou a olověnou . . . nemůže zvolit tu pravou, než kdo vás doopravdy miluje.“[12]. Nápadník musí přísahat, že pokud neuhodne, nikdy se neožení.

R. J. Smullyan v knize [Sm] (kterou velmi doporučuji pro její krásné hádanky) uvažuje „luterii“, ve které by ženich byl vybírán nikoli podle toho, jak je ctnostný, ale jen podle logičnosti jeho uvažování. Předložme nyní několik variací na hádanky uváděné Smullyanem.

Porcie přivede nápadníka ke třem skřínkám a sdělí mu, že nejvýše jeden z nápisů na skříňkách je pravdivý. A pak už jen čeká na rozhodnutí o svém osudu (a o osudu nápadníka). Kterou skřínku byste si vybrali vy, abyste se mohli oženit, a to dokonce s krásnou a chytrou Porcií?

zlatá	stříbrná	olověná
Podobizna není v této skřínce.	Podobizna není v olověné skřínce.	Podobizna je v této skřínce.

Už jste vybrali tu pravou? — V olověné podobizna být nemůže, protože by pak byly pravdivé nápisy jak na zlaté skřínce, tak i na olověné. Když už víme, že

posloupnost

$$\mathrm{q}, \neg\mathrm{q}, \neg\neg\mathrm{q}, \mathrm{p}, \neg\mathrm{p}, (\neg\neg\mathrm{q} \to \neg\mathrm{p}), [\mathrm{p} \to (\neg\neg\mathrm{q} \to \neg\mathrm{p})], \big([\mathrm{p} \to (\neg\neg\mathrm{q} \to \neg\mathrm{p})] \to \mathrm{p}\big).$$

Ovšem stejnou službu vykoná rovněž např. posloupnost

$$\mathrm{p}, \mathrm{q}, \neg\mathrm{p}, \neg\neg\mathrm{p}, \neg\mathrm{q}, \neg\neg\mathrm{q}, (\neg\neg\mathrm{q} \to \neg\mathrm{p}),$$
$$(\neg\neg\mathrm{q} \to \neg\neg\mathrm{p}), [\mathrm{p} \to (\neg\neg\mathrm{q} \to \neg\mathrm{p})], \big([\mathrm{p} \to (\neg\neg\mathrm{q} \to \neg\mathrm{p})] \to \mathrm{p}\big),$$

ve které je jiné pořadí členů a některé členy navíc. Naproti tomu posloupnost

$$\mathrm{p}, \neg\neg\mathrm{p}, \mathrm{q}, \neg\mathrm{q}, [\mathrm{p} \to (\neg\neg\mathrm{q} \to \neg\mathrm{p})], \big([\mathrm{p} \to (\neg\neg\mathrm{q} \to \neg\mathrm{p})] \to \mathrm{p}\big)$$

není dostatečně vhodným popisem konstrukce naší formule.

[u7] První zápis není dobře uzávorkován, každá formule má stejně pravých jako levých závorek; v druhém zápise se vyskytují bezprostředně za sebou dvě výrokové proměnné a žádné z našich pravidel tvorby formulí toto nepovoluje.

[u8] Počet levých a pravých závorek je stejný, přesto však zápis není dobře uzávorkován — můžeme číst jednak $\big([\mathrm{p} \to (\mathrm{q} \to \mathrm{p})] \to \mathrm{q}\big)$, avšak také $\big(\mathrm{p} \to [(\mathrm{q} \to \mathrm{p}) \to \mathrm{q}]\big)$. Nemůže se vám proto podařit sestrojit potřebnou posloupnost.

[12] překlad E. A. Saudka

podobizna není v olověné, pak víme, že na stříbrné je pravdivý nápis. Kdyby byla podobizna ve stříbrné skřínce, byl by pravdivý také nápis na zlaté skřínce, což je zadáním vyloučeno. Podobizna proto musí být ve zlaté skřínce. Pro kontrolu si uvědomme, že v takovém případě je text na zlaté i olověné skřínce nepravdivý a pravdivý je jen na stříbrné skřínce.

Následující odstavec se bude snažit přesvědčit o výhodách symbolického zápisu ty čtenáře, kteří nejsou jeho příznivci. Podobně budeme vedle sebe používat slovní a symbolický zápis při řešení úloh 9 a 10. Nechť z, s a o vyjadřují po řadě výroky „Podobizna je ve zlaté skřínce.“, „Podobizna je ve stříbrné skřínce.“ a „Podobizna je v olověné skřínce.“

Na řádku (i) uvádíme u každého z výroků $\mathsf{z}, \mathsf{s}, \mathsf{o}$ ty z vyšetřovaných výroků a jejich negací, které jsou v daném případě pravdivé (např. za předpokladu výroku z — uložení podobizny do zlaté skřínky — je pochopitelně pravdivý výrok z a negace výroků s a o):

$$(i) \qquad \mathsf{z}:\ \mathsf{z}, \neg\mathsf{s}, \neg\mathsf{o} \qquad \mathsf{s}:\ \neg\mathsf{z}, \mathsf{s}, \neg\mathsf{o} \qquad \mathsf{o}:\ \neg\mathsf{z}, \neg\mathsf{s}, \mathsf{o}.$$

Při zadání našeho příkladu jsou na jednotlivých skřínkách výroky: $\neg\mathsf{z}, \neg\mathsf{o}, \mathsf{o}$. Prostým srovnáním posledně uvedené trojice výroků s trojicemi v (i) zjistíme, že trojice ze zadání se shoduje *nejvýše v jednom* výroku pouze s jednou trojicí, a to s příslušející uložení portrétu do zlaté skřínky.

Úloha 9. Nápadníci Porcie se moc nehrnuli a ti, co přišli, neuspěli. I začala Porcie zvažovat, jestli otec skutečně nařídil, jaké mají být nápisy na skřínkách, a zda by neměla dávat hádanku lehčí — sama měla tolik inteligence (vzpomeňte, jak později převlečená za mladého soudce brilantně zachránila Antonia), že hádanky nejen řešila, avšak bez zaváhání i vytvářela. A tak si připravovala nové nápisy a při zadávání úlohy chtěla nápadníkovi oznámit, že přesně jeden nápis je pravdivý.

zlatá	stříbrná	olověná
Podobizna je ve stříbrné skřínce.	Podobizna je v olověné skřínce.	Podobizna je v této skřínce.

Kterou skřínku vyberete při tomto zadání? Kdybychom ponechali z původního zadání slova „nejvýše jeden z nápisů na skříňkách je pravdivý“ byla by úloha jednoznačně řešitelná?

[u9)] Kdyby byla podobizna v olověné skřínce, byly by pravdivé nápisy na stříbrné a olověné skřínce, pročež tam být nemůže. Takže nápisy na stříbrné i olověné skřínce jsou nepravdivé, pravdivý musí být zápis na zlaté skřínce (tato úvaha je podmíněna tím, že víme, že alespoň jeden nápis je pravdivý), a tudíž je podobizna ve stříbrné skřínce. (V tomto případě je pravdivý nápis na zlaté skřínce a žádný jiný.) Pokud víme pouze, že nejvýše jeden nápis je pravdivý, nevyloučíme možnost ukrytí podobizny ve zlaté skřínce.
Pomocí symbolů: Na skřínkách jsou zapsány výroky: $\mathsf{s}, \mathsf{o}, \mathsf{o}$. Tato trojice se z trojic z (i)

Úloha 10. Současně si však Porcie připravila také trochu těžší úlohu pro případ, kdyby se nápadník nejevil přijatelným. Takového chtěla zavést před skřínky

zlatá	stříbrná	olověná
Podobizna není v této skřínce.	Podobizna není ve zlaté skřínce.	Podobizna je v této skřínce.

a oznámit mu, že alespoň jeden nápis je pravdivý a alespoň jeden je nepravdivý. Pořád však nebyla spokojená, pro naprosto nepřijatelné nápadníky chtěla vymyslet ještě něco těžšího, ale když on mezitím přišel Bassanio a . . .

Příklad 2. Obávám se, že hádanku, jež vám nyní předložím, již znáte, je však tak hezká, že ji nemohu pominout. Na rozcestí dvou cest stojí dva bratři, z nichž jeden vždy mluví pravdu a druhý nikdy pravdu neřekne, avšak vy nevíte, který je který. Chcete se jich zeptat, která z cest vede k cíli vašeho putování. Pokud smíte položit dvě otázky, je vaše úloha jednoduchá. — Opravdu? — Jak se zeptáte? Stačí položit jakoukoli otázku, u které je jasná odpověď, např. „Je 2+2=4?". Podle odpovědi poznáte, zda mluvíte s pravdomluvným nebo s lhářem, a pak se už prostě zeptáte, která cesta vede k vašemu cíli. Pravdomluvnému uvěříte a dáte se cestou, kterou ukáže; při odpovědi lháře se dáte přesně tou druhou, než vám poradil. Teď je však úloha těžší: smíte se zeptat jen jednoho bratra, a to jen jednou, a nadto otázkou, na kterou je odpověď ano–ne! Na co se zeptáte? — Ještě se zamyslete a nečtěte řešení, které následuje.

Nedaří se? — Otázka, která váš problém vyřeší zní: „Co mi řekne váš bratr, když se ho zeptám, zda tato cesta vede k mému cíli?". Při odpovědi „Ne." se tou cestou dáte, při odpovědi „Ano." vykročíte tou druhou. Pokud bratr odpovídajícího je lhář, dá vám totiž nesprávnou odpověď a odpovídající, který je pravdomluvný, jeho odpověď zopakuje, celkově tudíž dostanete nesprávnou odpověď. Pokud bratr odpovídajícího je pravdomluvný, dá správnou odpověď a lhář odpovídající jako druhý jeho odpověď zneguje. I v tomto případě dostanete nepravdivou odpověď. Divíte se ještě, že vám doporučuji udělat přesně opak toho, co vám poradí bratři ve své dvoj-odpovědi[13]?

shoduje v přesně jednom případě pouze při uložení portrétu do stříbrné skřínky; v nejvýše jednom výroku se shoduje při schování portrétu do stříbrné nebo zlaté skřínky.

[u10] Kdyby podobizna byla ve zlaté skřínce, nebyl by žádný nápis pravdivý, tam se tudíž nacházet nemůže. Kdyby se podobizna nacházela v olověné skřínce, byly by všechny nápisy pravdivé, takže podobizna musí být ve stříbrné skřínce. (V tomto případě je nepravdivý výrok na olověné skřínce a žádný jiný.)
Pomocí symbolů: Nyní jsou na skřínkách zapsány výroky $\neg z$, $\neg z$, o; tato trojice se s trojicemi z (i) shoduje alespoň v jednom výroku a neshoduje alespoň v jednom výroku pouze při vložení portrétu do stříbrné skřínky.

[13] Uvedená otázka není jediná, která řeší úlohu. Můžeme se také jednoho z bratří dotázat: „Odpovíte mi ano na otázku, zda tato cesta vede k mému cíli?" Je-li dotázaný pravdo-

Úloha 11. Teď o dvou bratrech víme pouze, že každý z nich buď vždy mluví pravdu nebo vždy lže (tedy buď oba jsou pravdomluvní nebo oba lháři nebo jeden pravdomluvný a druhý lhář). Zeptáte se prvního, zda je lhář nebo pravdomluvný. Odpovědi však nerozumíte, a proto se zeptáte druhého „Co říkal tvůj bratr?“. Dostanete odpověď, že prvý se prohlásil za lháře. Je druhý z bratří lhář nebo je pravdomluvný? Co můžete říci o prvním?

Úloha 12. Každý ze dvou bratří je opět buď notorický lhář, nebo vždy mluví pravdu. První z nich prohlásí: „Alespoň jeden z nás je lhář.“ Kdo jsou tito bratři?

Úloha 13. Ze tří bratří je každý zase buď notorický lhář, nebo vždy mluví pravdu. První ze tří bratří vyhlásí: „Moji bratři jsou lháři.“, druhý ho částečně podpoří s prohlášením, že třetí bratr je lhář, avšak třetí označí za lháře prvního z bratří. Kdo jsou tito bratři?

* * *

V sémantice výrokového počtu budeme zkoumat pravdivostní hodnotu složeného výroku v závislosti na pravdivostních hodnotách jeho složek. Celou sémantiku naprosto rozhodujícím způsobem ovlivní přirozený požadavek, aby hodnota složeného výroku *nezáležela na ničem jiném než na pravdivostních hodnotách jeho složek.* Přijetí tohoto předpokladu umožní mj. popsat pravdivostní hodnoty složených výroků pomocí tabulek pravdivostních hodnot.

Naším prvním úkolem je popsat pravdivostní hodnoty složených výroků vzniklých pomocí negace a implikace. Kromě slovního vyjádření je vyjádříme v tabulkách 1 a 2 představujících **základní tabulky pravdivostních hodnot** pro negaci a implikaci. Na přirozené chápání pravdivosti negace a implikace jsme

---

mluvný, odpoví po pravdě na otázku, zda tato cesta vede k cíli (pokud cesta vede k cíli, odpoví ano; jestliže nevede, odpoví ne) a tuto pravdivou odpověď při odpovědi na otázku, zda odpoví ano, pouze zopakuje. Je-li však lhář odpoví nepravdivě (pokud cesta vede k cíli, odpoví ne; jestliže nevede, odpoví ano) a tuto nepravdivou odpověď při odpovědi na otázku, zda odpoví ano, změní, takže pokud cesta vede k cíli, odpoví celkově ano; jestliže nevede, odpoví celkově ne. Nezávisle na tom, kterého bratra se dotazujeme, dostáváme na právě zkoumanou dvoj-otázku pravdivou odpověď. Další řešení je uvedeno v úloze 10 druhého paragrafu.

[u11)] Je-li první lhář, odpoví nepravdivě, že je pravdomluvný. Jestliže je pravdomluvný, odpoví po pravdě, že je pravdomluvný. Takže odpověď prvého zcela jistě vždy zní „Pravdomluvný.“. Druhý je tudíž lhář. O prvním nelze rozhodnout.
Uvědomme si, že otázka „Jsi lhář?“ má velice zvláštní charakter - je „samovztažná“ (při odpovědi „lžu“ vypovídám o této odpovědi samotné) a nelze na ni odpovědět „ano“, a to ani v případě, že pravdu mluvíme, ani v případě, že pravdu nemluvíme (jiné podobné „samovztažné“ formulace jsme uvedli v bodě 7 naší ne-předmluvy); tuto „samovztažnost“ budeme podrobněji rozebírat ve druhém paragrafu třetí kapitoly.

[u12)] Je-li mluvící lhář, je mezi bratry alespoň jeden lhář, a proto lhář takovouto větu vyslovit nesmí. Mluvící je pravdomluvný, druhý z bratří musí být lhář.

[u13)] První bratr nemůže být pravdomluvný, protože by druhý byl lhář, avšak oba tvrdí o třetím bratru, že je lhář. Protože první z bratří je lhář, musí třetí mluvit pravdu a následně je druhý lhářem.

se již v předchozím textu odvolávali, nyní pouze toto obvyklé pojetí popíšeme výslovně.

Je přirozené pokládat negaci výroku za nepravdivou, jestliže původní výrok pokládáme za pravdivý, a naopak v případě, že nějaký výrok pokládáme za nepravdivý, jeho negaci pokládáme za pravdivou. Ostatně na takovémto pojetí negace byly založeny předchozí příklady a úlohy a vy, čtenáři, jste jistě souhlasil, když jste dočetl až sem. Popsané pojetí pravdivosti negace vyjadřuje první tabulka.

p	¬p
0	1
1	0

Tabulka 1

Hodnocení pravdivosti implikace v závislosti na ohodnocení pravdivosti výroků, z nichž je implikace složena, již nemusí být na první pohled tak zřejmé, avšak již jsme zdůraznili, že pravdivostní hodnotu implikace musíme určit *jednoznačně pouze* v závislosti na pravdivostních hodnotách výroků do ní vstupujících. Řeknu-li „Jestliže bude zítra pršet, pak budu celý den doma.“ a druhý den venku lije a já jsem z domova pryč, pak jsem lhal; jestliže lije a jsem doma, pak jsem mluvil pravdu; jestliže svítí sluníčko, pak mohu dělat cokoli a vždy jsem mluvil pravdu, protože o tom, co budu dělat, když bude hezky, jsem nic netvrdil[14)]. V souladu s intuitivním chápáním důsledku nám tedy nezbude než implikaci pokládat za nepravdivou jenom v případě, že antecedent je pravdivý a konsekvent je nepravdivý. Přesně toto chápání je doložitelné již v megarsko-stoické škole[15)]. Nicméně spor o význam implikace pokračoval až do 20. stol., a to včetně, většinou však probíhá *vně* matematické logiky.

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Tabulka 2

Implikace „Je-li $c > 2$, je $c^2 > 4$.“ je pravdivá pro každé reálné číslo c — nemůže být současně $c > 2$ (pravdivý antecedent) a $c^2 \leq 4$ (nepravdivý konsekvent). Naproti tomu ostatní případy pravdivosti a nepravdivosti antecedentu a konsekventu jsou možné, a skutečně nastanou. Například pro $c = 3$ je pravdivý jak antecedent, tak také konsekvent. V případě nepravdivosti antecedentu může být konsekvent jak pravdivý (např. pro $c = -3$), tak také nepravdivý (např. pro $c = 1$).

V souvislosti s pravdivostí implikace vznikají často dohady o implikacích typu „Jestliže $1 + 1 = 3$, pak $2 + 2 = 5$.“ V první řadě je třeba si uvědomit, že uvedená implikace je (složený) výrok, protože vzniká z (nepravdivých) výroků $1+1 = 3$ a $2+2 = 5$ podle pravidla (b) pro vytváření formulí výrokového počtu. Nadto je pravdivá, protože

14) Gramatika rozlišuje věty příčinné, které (podle pravidel českého pravopisu) vyjadřují „příčinu (důvod) obsahu věty řídící“ a jsou připojovány spojkami protože, poněvadž, že, jelikož a věty podmínkové, které vyjadřují „podmínku, při které může nastat děj věty řídící“ a které se připojují spojkami jestliže, -li, kdyby, jestli, když. Není vhodné formalizovat implikací věty příčinné: větu „Přišel jsem pozdě, protože nejela tramvaj.“ budeme brát za lživou v případě, že tramvaje jezdily.

15) u Filóna z Megary (kolem 300 př. Kr.), podrobněji viz dodatek o kořenech logiky

antecedent je nepravdivý. Přesto se nám podvědomě zdá tato implikace „podezřelá“, zřejmě právě proto, že *předem víme* o nepravdivosti antecedentu. Právě vzhledem k nepravdivosti antecedentu nemůže být pravdivost implikace ovlivněna pravdivostí, nebo nepravdivostí konsekventu. Pročež implikace *nemůže posloužit* k rozhodnutí zda je konsekvent pravdivý, či nepravdivý. A právě to zapříčiňuje pocit „podezřelosti“ implikace. Přesně stejně bychom se s velikým překvapením dívali na člověka, který by nám na pláži při blankytně modrém nebi oznamoval, že „Prší-li, jsem doma.“, a to bez ohledu na pravdivost jeho výroku. Pokud by stejné prohlášení učinil v okamžiku, kdy nevíme, jaké je počasí, přijali bychom jeho sdělení se zájmem (a z jeho nepřítomnosti doma vyvodili, že neprší).

Oblíbeným způsobem výpočtu pravdivostních hodnot dané formule (v závislosti na pravdivostních hodnotách proměnných, které se v ní vyskytují) jsou **tabulky pravdivostních hodnot**[16)]. Jednu z nich ukazuje následující příklad (jenž je výpočtem pravdivostních hodnot formule $\mathsf{p} \to [\mathsf{q} \to \neg(\mathsf{p} \to \neg\mathsf{q})]$), ve kterém každý řádek přísluší jednomu ohodnocení dvojice výrokových proměnných p, q a v každém políčku se nachází pravdivostní hodnota formule uvedené v záhlaví sloupce při tomto ohodnocení. Je zapotřebí si uvědomit, že existují přesně čtyři různá ohodnocení dvojice výrokových proměnných p a q, proto má následující tabulka čtyři řádky. Obecně tabulka pravdivostních hodnot formule vytvořené z k výrokových proměnných má 2^k řádků a tolik sloupců, kolik kroků jsme použili při vytvoření dané formule rekurzí. Každé vyplnění jednotlivého políčka v následujících tabulkách je naprosto triviální aplikací tabulek 1 a 2. V celém textu je však tak málo rozsáhlejších výpočtů, že tabulky pravdivostních hodnot představují nejrozsáhlejší kalkulace celé knihy.

Prohlásili jsme, že vyplnění políčka je zcela evidentní, pro jistotu však podrobněji popišme způsob vyplnění např. prvních dvou políček v prvním řádku následující tabulky. Ve sloupci se záhlavím $\neg\mathsf{q}$ si uvědomíme, že v tomto řádku předpokládáme, že proměnná q nabývá hodnoty 0, takže podle prvé tabulky musí být pravdivostní hodnotou formule $\neg\mathsf{q}$ jednička. Do políčka v sloupci se záhlavím $\mathsf{p} \to \neg\mathsf{q}$ máme napsat pravdivostní hodnotu implikace, jejíž antecedent (výroková proměnná p) má hodnotu 0 a jejíž konsekvent (formule $\neg\mathsf{q}$) má hodnotu 1. Nahlédnutím do druhé tabulky (druhý řádek) zjistíme, že jsme povinni políčko vyplnit znakem 1.

p	q	$\neg\mathsf{q}$	$\mathsf{p}\to\neg\mathsf{q}$	$\neg(\mathsf{p}\to\neg\mathsf{q})$	$\mathsf{q}\to\neg(\mathsf{p}\to\neg\mathsf{q})$	$\mathsf{p}\to[\mathsf{q}\to\neg(\mathsf{p}\to\neg\mathsf{q})]$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1

Tabulka 3

16) Tabulky pravdivostních hodnot zavedl Ch. S. Peirce (1839–1914), jenž prý si přál, aby jeho jméno bylo čteno [Piərs].

Tautologií (nebo podrobněji *výrokovou tautologií*) nazýváme formuli $\mathcal{A}$ výrokového počtu, jejíž pravdivostní hodnota je 1 při *každém* ohodnocení výrokových proměnných, které se v ní vyskytují. **Kontradikcí** nazýváme formuli, jejíž pravdivostní hodnota je 0 při každém ohodnocení výrokových proměnných, jež se v ní vyskytují. Kontradikce jsou negacemi tautologií.

Tautologie jsou formule, které nabývají pravdivostní hodnoty 1 nezávisle na konkrétním ohodnocení výrokových proměnných. Jedná se tedy o „vždy pravdivé“ formule, tzn. o formule jejichž pravdivost je zaručena pouze jejich formou (strukturou formule) a nikoli pravdivostí nebo nepravdivostí výroků, z nichž je vytvořena. Analogicky kontradikce nabývají pravdivostní hodnoty 0 nezávisle na ohodnocení výrokových proměnných, a představují tudíž „vždy nepravdivé“ formule.

Z tabulky 3 nahlédneme, že formule výrokového počtu $\mathsf{p} \to [\mathsf{q} \to \neg(\mathsf{p} \to \neg\mathsf{q})]$ je tautologií, formule $\mathsf{q} \to \neg(\mathsf{p} \to \neg\mathsf{q})$ nikoli.

Pro plné porozumění dalšímu textu je vhodné vyšetřit pravdivost několika formulí. To bude úkolem následujícího příkladu a úloh 14–17.

Příklad 3. Prokažte, že formule **VP2** tvaru $[\mathsf{p}\to(\mathsf{q}\to\mathsf{r})]\to[(\mathsf{p}\to\mathsf{q})\to(\mathsf{p}\to\mathsf{r})]$ je tautologií. Tato formule je někdy nazývána **Fregeův zákon.**

Ve zkoumané formuli se vyskytují tři výrokové proměnné, takže její tabulka pravdivostních hodnot bude mít $2^3 = 8$ řádků; sestavování tabulek pravdivostních hodnot je natolik jednoduché, že už i tu následující by se měl nejprve pokusit čtenář sestavit sám.

p	q	r	$\mathsf{q}\to\mathsf{r}$	$\mathsf{p}\to(\mathsf{q}\to\mathsf{r})$	$\mathsf{p}\to\mathsf{q}$	$\mathsf{p}\to\mathsf{r}$	$(\mathsf{p}\to\mathsf{q})\to(\mathsf{p}\to\mathsf{r})$	**VP2**
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabulka 4

Úloha 14. Prokažte, že formule **VP1** tvaru $\mathsf{p} \to (\mathsf{q} \to \mathsf{p})$ a rovněž formule **VP3** tvaru $(\neg\mathsf{p} \to \neg\mathsf{q}) \to (\mathsf{q} \to \mathsf{p})$ jsou tautologiemi. Jak se liší tabulky

*u*14)

p	q	$\mathsf{q}\to\mathsf{p}$	**VP1**	$\neg\mathsf{p}$	$\neg\mathsf{q}$	$\neg\mathsf{p}\to\neg\mathsf{q}$	**VP3**	$\neg\mathsf{q}\to\neg\mathsf{p}$	$(\mathsf{q}\to\mathsf{p})\to(\neg\mathsf{q}\to\neg\mathsf{p})$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	1	0	0	1	1	1	1

Tabulka A

pravdivostních hodnot formule $\neg p \to \neg q$ a formule $q \to p$? Ukažte, že formule $(q \to p) \to (\neg q \to \neg p)$ *není* tautologií.

Úloha 15. Ukažte, že formule $\neg p \to (p \to q)$, tzv. **zákon Dunse Scota**, je tautologií.

Úloha 16. Uvědomte si, že pravdivostní hodnoty formule $\neg\neg p$ jsou přesně ty samé jako pravdivostní hodnoty p. Ukažte, že výrokové formule $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ nabývají týchž hodnot (při ohodnocení výrokových proměnných, které se v nich vyskytují), právě když je pravdivá jak implikace $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, tak také obrácená implikace $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$.

Úloha 17. Sémanticky (tj. tabulkou pravdivostních hodnot) prokažte **tranzitivitu implikace**, tzn. že tautologií výrokového počtu je formule

$$(p \to q) \to [(q \to r) \to (p \to r)].$$

*

Příklad 4. Uvažujme variaci úlohy o vnoučatech z ne-předmluvy a označme výroky „Jakub je doma.“, „Terezka je doma.“ a „Kačenka je doma.“ po řadě písmeny j, t a k. Předpokládejme pravdivost výroků:

(1) Jestliže není Jakub doma, není doma ani Terezka, tzn. $\neg j \to \neg t$.
(2) Jestliže je Kačenka doma, je doma i Terezka, tj. $k \to t$.
(3) Není-li doma Kačenka, je doma Jakub, tzn. $\neg k \to j$.

Tabulky pravdivostních hodnot formulí $\neg p \to \neg q$ a $q \to p$ se liší pouze svým záhlavím, hodnoty na jednotlivých řádcích jsou stejné.

u15)

p	q	$\neg p$	$p \to q$	$\neg p \to (p \to q)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

Tabulka B

u16) První tvrzení je triviální aplikací první tabulky. Druhé tvrzení získáme prohlédnutím druhé tabulky: pravdivost implikace $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zaručí, že při ohodnoceních, při nichž formule $\mathcal{A}$ nabývá hodnotu 1, musí rovněž formule $\mathcal{B}$ nabývat pravdivostní hodnotu 1 a pravdivost obrácené implikace $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ zajistí, že při ohodnoceních, při nichž formule $\mathcal{B}$ nabývá hodnotu 1, musí rovněž formule $\mathcal{A}$ nabývat pravdivostní hodnotu 1.

u17) Tranzitivita implikace bývá nazývána *zákon hypotetického sylogismu* (pokládáme za samozřejmé: jestliže z prvního tvrzení plyne druhé a z druhého plyne třetí, pak z prvého tvrzení již určitě musí plynout třetí) a uvádí ho již Theofrastos z Eresu (asi 371–286). Pokud byste chtěl vyjádřit tranzitivitu implikace pomocí spojky „a“ — kteroužto formulaci jsme právě uvedli jako samozřejmé — konzultujte prosím čtvrtý příklad druhého paragrafu.
Kromě prostého ověření tabulkou pravdivostních hodnot můžeme také prokázání provést následující úvahou. Implikace $p \to r$ je nepravdivá, pouze pokud p je pravdivá a současně r nepravdivá. Z pravdivosti p a z pravdivosti implikace $p \to q$ však vyvodíme pravdivost q a z pravdivosti implikace $q \to r$ nám následně nezbude než vyvodit pravdivost formule r. Za předpokladu pravdivosti implikací $p \to q$ a $q \to r$ je tedy implikace $p \to r$ určitě pravdivá.

Chceme zjistit, zda existuje ohodnocení výrokových proměnných takové, že j je nepravdivé, avšak všechny předpoklady (1)–(3) jsou pravdivé (v takovém případě domů za Jakubem nepojedu, neboť nemusí být doma). Stačí tedy vyšetřovat jen čtyři případy pro různá ohodnocení proměnných t a k. (Jakmile při nějakém ohodnocení zjistíme, že některý ze složených výroků $\neg j \rightarrow \neg t$ a $k \rightarrow t$ je při daném ohodnocení nepravdivý, nemusíme již pro toto ohodnocení vyhodnocovat další složené výroky.)

j	t	k	$\neg j$	$\neg t$	$\neg k$	$\neg j \rightarrow \neg t$	$k \rightarrow t$	$\neg k \rightarrow j$
0	0	0	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	1	0	
0	1	0	1	0	1	0		
0	1	1	1	0	0	0		

Tabulka 5

Spočítali jsme, že Jakub nemůže nebýt doma (tj. je doma; tedy má smysl za ním jet domů). Nicméně si ještě ověřme, zda jsme nezadali sporné předpoklady, tzn. zda vůbec existuje ohodnocení, při kterém je Jakub doma.

j	t	k	$\neg j$	$\neg t$	$\neg k$	$\neg j \rightarrow \neg t$	$k \rightarrow t$	$\neg k \rightarrow j$
1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	
1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	1	1	1

Tabulka 6

Po nabytí určitého cviku *nebudete většinou potřebovat tabulky skutečně vypisovat* (a tuto možnost si ponecháte jen pro případ absolutní nouze). Předvedení úvah, které můžeme provést místo vyplňování tabulky 5, bude úkolem příkladu 5, který poslouží i jako motivace pro některá dodatečná odvozovací pravidla.

* * *

Nejdůležitějším pojmem syntaxe je pojem **důkazu**. Před tím, než se začneme zabývat důkazy ve výrokovém počtu, zkusme formulovat, jak bychom si z intuitivního pohledu představovali zcela přesný důkaz v tom nejobecnějším případě.

Při dokazování se snažíme z tvrzení přijatých za správné dokázat další. Přitom užíváme jakýchsi principů vyvozování (dokazování), které by nám měla popsat a zaručit logika.

Začněme zcela triviálním příkladem. Představme si, že přijmeme za správné tvrzení

(1) Jestliže byla Martina v práci, upravila (počítačový) program.

Dále máme k jejím schopnostem takovou důvěru, že přijímáme

(2) Upravila-li Martina program, je program v pořádku.

Nakonec se dovíme, že

(3) Martina byla v práci.

Zcela evidentní úvahou dospějeme na základě předpokladů (1)–(3) k závěru, že program je v pořádku; zkusme však trochu podrobněji rozebrat, jak toto tvrzení nahlédneme: Nejprve z tvrzení (1) a (3) vyvodíme, že Martina upravila program, a poté na základě posledně uvedeného tvrzení a na základě předpokladu (2) vyvodíme, že program je v pořádku.

Naše usuzování je tedy možno strukturovat do velice jednoduchých kroků, které na sebe postupně navazují. V každém jednotlivém kroku vyvodíme z předpokladů přijatých na počátku a z již dokázaných tvrzení nějaké (další) tvrzení. Při jednom dokazovacím kroku nemusíme použít všechny předpoklady ani všechna již dokázaná tvrzení, můžeme užít jen ta z nich, která se nám právě hodí. Mějte tento jednoduchoučký příklad na paměti, když se nyní budeme ptát, co musí logika ozřejmit, aby ospravedlnila naše vyvozování (odvozování, dokazování).

V první řadě nám logika musí nabídnout (konečný) seznam **odvozovacích**[17] **pravidel**. Ta ukazují, jak bezprostředně vyvodit další tvrzení z tvrzení již dokázaných (příp. přijatých).

Po rozboru na začátku textu (vzpomeňte „Jestliže prvé, pak druhé. Avšak prvé. Tedy druhé.“) a také po prozkoumání našeho konkrétního příkladu se snad shodneme na tom, že dokážeme-li (příp. přijmeme-li jako předpoklad) jakoukoli formuli $\mathcal{P}$, a dokážeme-li (příp. přijmeme-li) současně také implikaci $\mathcal{P} \to \mathcal{Q}$, musíme považovat za dokázanou rovněž formuli $\mathcal{Q}$. Uvedené základní odvozovací pravidlo se tradičně nazývá **modus ponens** a česky *pravidlo odloučení*[18].

(Za okamžik uvidíme, že při jistém pojetí důkazů výrokového počtu bude stačit shoda na tomto jediném odvozovacím pravidlu; v §2 kap. II uvidíme, že pro predikátový počet postačí k pravidlu modus ponens přidat jedno jediné další odvozovací pravidlo. Avšak také — byť poněkud později v současném paragrafu — nahlédneme, že přijmeme-li vhodných odvozovacích pravidel více, zrychlí a zjednoduší se naše dokazování.)

Dohoda o tom, jak postupovat dále z již dokázaných tvrzení, pochopitelně nestačí. Musíme se rovněž dohodnout, z čeho začneme, tedy na **předpokladech**[19]. Je totiž zřejmé, že při zdůvodňování nějakého tvrzení se nemohu do nekonečna

[17] též *dedukčních*

[18] Z implikace $\mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ *odloučíme* $\mathcal{P}$ a zůstane $\mathcal{Q}$.

[19] V diskusích běžného života obvykle tyto předpoklady neformulujeme přesně, jsou přítomny v našem uvažování pouze implicitně a právě toto běžné neujasnění základních východisek vede v mnoha diskusích k nedorozuměním, neboť co pro jednoho diskutujícího je zcela zřejmé (a na čem staví svou argumentaci), může být pro druhého nejasné, nebo dokonce nepřijatelné. Naproti tomu v matematické logice žádáme, aby předpoklady, které můžeme v důkaze použít, byly vymezeny naprosto přesně, a to na počátku.

odvolávat na stále zřejmější a zřejmější fakta: někdy musím již prohlásit, že tato fakta jsou (alespoň pro mne) tak zřejmá, že je již nebudu dokazovat; pokud má být diskuse smysluplná, musíme se s partnerem shodnout na předpokladech[20].

Většina předpokladů v běžné diskusi se týká předmětu, o který jde. (V našem příkladu o programu Martiny byly takovéto všechny předpoklady.) Nicméně některé předpoklady se mohou týkat správného vyvozování. Tyto předpoklady budeme nazývat **axiomy logiky**.

Shrňme, že principy správného usuzování může popisovat logika dvojím způsobem: jako odvozovací pravidla a jako axiomy logiky. Matematicky přesnou definici pojmu důkazu uvedeme o několik stránek dále. Pojem důkazu závisí na volbě systému vyvozovacích principů, tato volba je pro pojetí důkazu rozhodující a k ní se bude vztahovat hlavní výsledek uvedený v paragrafu. Důkaz je následně popsán prostě rekurzí. Při konstrukci důkazů rekurzí zastávají odvozovací pravidla úlohu pravidel pro prodlužování důkazů; předpoklady a axiomy logiky hrají úlohu základních důkazů.

Systémů je možno v literatuře najít celou řadu, my si pro výrokový počet ukážeme dva[21], a už ty se budou rozcházet v počtu axiomů a pravidel. První bude minimalizovat počet pravidel a rozmanitost bude soustředěna do systému axiomů, druhý naopak bude mít bohatší systém pravidel a minimální systém axiomů výrokového počtu. V každém případě však od systémů principů usuzování požadujeme, aby *popisovaly, a to úplně, způsob lidského vyvozování*, a v tomto ohledu jejich volba naprosto nemůže být nahodilá — podstatným cílem logiky již od antiky bylo popsat ty principy, kterými se řídí lidské usuzování. Tedy přes svou různost musí být jednotlivé systémy principů vyvozování „stejně silné“.

Teď tudíž stojíme před úkolem vybrat nějaké formule výrokového počtu, které přijmeme za popis správného usuzování. Musíme je vybrat tak, abychom se s kýmkoli „logicky uvažujícím“ shodli, že takovéto principy jsou přijatelné, musíme je tedy být schopni intuitivně odůvodnit.

Čtenáři, který přijal náš předcházející popis pravdivosti složených výroků, je možno poskytnout ještě jedno vodítko při výběru logických axiomů: musí to být tautologie. Je přece nemyslitelné, abychom správnou úvahou vyvodili jakožto obecně správné tvrzení, které by nebylo pravdivé při určitém ohodnocení výroků. Tím spíše je vyloučeno vzít za *základ* vyvozování tvrzení, které není vždy pravdivé. (Požadavek, aby z axiomů výrokového počtu — tj. bez užití mimologických předpokladů — bylo možno vyvodit jen vždy pravdivá tvrzení se nazývá

[20] Při volbě předpokladů nejsme po formální stránce nijak omezeni, při nevhodné volbě se může „pouze“ stát, že z nich dokážeme jakýkoli nesmysl (tj. že předpoklady jsou sporné). Je však jasné, že z intuitivního hlediska nejsou jednotlivé systémy předpokladů rovnocenné. V obecném případě je popis vhodné volby závislý na filozofickém pojetí pravdy a skutečnosti, a přesahuje tedy rámec matematické logiky.

[21] Řadu dalších příkladů systémů najde čtenář např. v knihách [So], [Šv] a [Pe].

korektnost výrokového počtu.)

Stop! Požadavek pravdivosti se přece nemůže týkat jen výběru axiomů, avšak také odvozovací pravidlo musí z tautologií vyvozovat jen tautologie. A my jsme již o jednom pravidlu prohlásili, že ho hodláme přijmout. Takže nyní musíte, milý čtenáři, zjistit, zda modus ponens vyvozuje z tautologií výhradně jen tautologie. — Už to máte? — Pochopitelně, je to zcela prosté: základní tabulka pravdivostních hodnot pro implikaci zajistí, že je-li $\mathcal{P}$ pravdivé a je-li implikace $\mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ pravdivá (obojí nastane jen v posledním řádku tabulky 2), pak je pravdivá rovněž $\mathcal{Q}$. Modus ponens tedy vyhovuje požadavku, že z tautologií můžeme dokázat jen tautologie.

Sémantika výrokového počtu nám tedy ukáže, které formule nemáme přijímat za axiomy, ale nepomůže v pozitivním výběru.

V lidském usuzování je možno vysledovat mnoho správných dokazovacích postupů a v průběhu vývoje logiky bylo velmi mnoho vyvozovacích principů formulováno a vyučováno (stále s možností nalézání dalších a dalších principů). Je možno se obrátit do historie logiky a vybrat ty principy, které považovala z výrokového počtu za důležité antická a/nebo scholastická logika, nebo ty principy, které formulovala logika 19. stol. Vždy však budeme stát před dvěma otázkami:

(a) zda nevybíráme axiomů zbytečně moc — pokud bychom si s partnerem skutečně chtěli na počátku diskuse ověřit, že máme stejné pojetí vyvozování, nechceme věnovat většinu času pro diskusi odsouhlasování jednotlivých položek příliš bohatého seznamu vyvozovacích principů;

(b) zda vybíráme vše podstatné, tzn. vše, co je potřebné pro lidské vyvozování.

Odpovědi na tyto otázky dala až matematická logika.

Zabývejme se nejprve prvním problémem. V průběhu zkoumání vyvozování bylo popsáno mnoho a mnoho desítek vyvozovacích principů, avšak málokdo by v dnešní době byl ochoten se učit vyjmenovávat všechny tyto principy (i když ve středověku bylo vyjmenovávání mnoha pravidel logiky součástí výuky). V našem textu ukážeme jen zlomek bohatství klasických pravidel (přičemž u nejdůležitějších z nich uvedeme i jejich klasické názvy), ale dnes nás už ani nenapadne předpokládat, že se je bude čtenář učit jako násobilku. Principy budeme uvádět jako *příklady* toho, co máme *používat* (tj. jako příklady toho, o čem máme *vědět*, že užití při vyvozování důsledků *je v pořádku a v souladu s běžným chápáním vyvozování*), ale nikoli jako zákony, jejichž seznam by bylo potřeba odříkávat.

Takže i pokus využít historie logiky nám přinese jen ukázání slepé uličky — není praktické vzít za axiomy všechny principy poznané a formulované v průběhu vývoje logiky. Moderní logika je si vědoma, že musí dát jen několik principů — kolik jich, milý čtenáři, snesete? Budete smlouvat jako Abraham o počet spravedlivých v biblickém vypravování o zániku Sodomy a Gomory? Nestačilo by 50, a nemohlo by jich být alespoň o 5 méně, nebo nestačilo by 40, a co kdyby jich bylo jen 30 nebo 20, a vůbec nestačilo by v celé logice jen 10 principů? Nesmlouvejte však příliš, protože na druhou stranu požadujeme, aby námi vybrané principy popsaly naše vyvozování úplně, tzn. *v celé jeho šíři.*

A v poslední větě jsme se dotkli druhého a mnohem závažnějšího problému než je nadbytečnost některých axiomů, totiž otázky, zda jsme na nějaký princip nezapomněli. Co když existuje princip, který všichni podvědomě přijímáme, avšak dosud nikdy ho logika výslovně neformulovala?

A v tomto okamžiku se dostáváme k jednomu z vrcholů tohoto paragrafu.

Ukážeme tři formule výrokového počtu, o kterých se pokusíme intuitivně zdůvodnit, že by již vzhledem ke své struktuře měly být považovány za správné. Na druhé straně matematická logika ukázala (tzv. věta o úplnosti[22]), že pokud přijmeme tyto tři axiomy a přijmeme modus ponens jako odvozovací pravidlo, jsme již schopni *dokázat všechny tautologie* výrokového počtu[23]. Výše jsme argumentovali, že nechceme dokázat nějakou formuli, která není tautologií, a nyní tvrdíme, že všechny žádané formule dokážeme. Náš výběr vyvozovacích principů tedy zajistí *úplný* popis lidského vyvozování, pokud se týká formulí vyšetřovaných v tomto paragrafu.

Věta o úplnosti má dalekosáhlé důsledky, u dvou z nich se nyní zastavíme podrobněji. Naše čtyři principy vyvozování pro výrokový počet „plně postačí" k dokázání všech žádaných formulí výrokového počtu (tj. tautologií), neboli jakýkoli jiný vyvozovací princip, který je formalizací intuitivně správného vyvozovacího kroku (speciálně tedy i každý dodatečný axiom logiky popisující intuitivně pravdivé tvrzení), je dovoditelný ze zvolených základních vyvozovacích principů.

Vyjádřeme předchozí tvrzení pro výrokový počet ještě jinými slovy. Přidáme-li k námi zvoleným axiomům výrokového počtu a k jedinému odvozovacímu pravidlu výrokového počtu jakýkoli další vyvozovací princip, jsou jen dvě možnosti:

(a) Buďto i „důkazy", ve kterých je tento vyvozovací princip povolen, umožní dokázat jen (vždy) pravdivé formule výrokového počtu. Pak však je dodatečný vyvozovací princip zbytečný, neboť tytéž formule je možno dokázat i bez něho.

[22] Původní větu o úplnosti pro výrokový počet dokázal E. L. Post v práci [Po].

[23] pro jistotu: v jejichž konstrukci je použita pouze implikace a negace; až v příštím paragrafu přidáme další spojky, přidáme spolu s nimi i další axiomy, jež chování těchto spojek popisují

(b) Nebo se pomocí nějakého „důkazu“ povolujícího i dodatečný vyvozovací princip podaří dokázat nějakou formuli výrokového počtu, která není (vždy) pravdivá. Pak však je tento vyvozovací princip nepřijatelný. Již jsme přece uvedli, že by odporovalo naší intuici o pojmu dokazatelnosti, kdybychom dokázali nepravdivý výrok. Dokonce bychom považovali za absurdní, kdybychom dokázali nějakou formuli výrokového počtu, která by byla nepravdivá byť jen při jediném ohodnocení výrokových proměnných, ze kterých je vytvořena.

Tímto pochopitelně nezpochybňujeme užitečnost různých jiných vyvozovacích principů. Dodatečné principy mohou totiž velice urychlovat a zpřehledňovat důkazy, a proto v další části tohoto paragrafu jich několik nejdůležitějších uvedeme. Tvrdíme však, že takovéto postupy jsou již nahraditelné pomocí vybraných základních vyvozovacích principů. Některé principy je vhodné formulovat až s pomocí spojek popsaných v §2, je proto přirozené jejich představení odložit až do citovaného paragrafu.

Druhým důsledkem věty o úplnosti je, že *vyplnění tabulky pravdivostních hodnot představuje algoritmus* (mechanický výpočet), *který rozhoduje, zda formule výrokového počtu je dokazatelná či nikoli.* Dokonce je možno napsat algoritmus, který k dokazatelným formulím výrokového počtu příslušný důkaz sestrojí. Pro tvorbu důkazů ve výrokovém počtu lze napsat program, a pak už stačí pouhý stroj a není potřeba intuice matematika. Tedy z hlediska výrokového počtu matematika zcela *nahradí robot*[24]. Ke zcela jiným závěrům dojdeme však v případě predikátového počtu.

Přes to, že konstrukci důkazů ve výrokovém počtu lze ponechat stroji, budeme se seznamovat s metodami konstrukce důkazů ve výrokovém počtu. Zadržte, čtenáři, a nezačněte se hned rozčilovat nad zbytečně vynaloženou námahou. Naprosto to není mrhání časem. Klíč je skryt v poslední větě předchozího odstavce. V predikátovém počtu budeme potřebovat důkazy sestrojovat a *víme, že algoritmus pro konstrukci důkazů v predikátovém počtu neexistuje.* Techniky, které budeme objasňovat na závěr tohoto paragrafu, jsou užívány především pro dokazování v predikátovém počtu.

Část textu následující po uvedení tří typů axiomů je psána petitem ze dvou důvodů. První je trochu alibistický: plním slib, že nebudu používat příliš formálních zápisů uznávaje, že konkrétní tvar axiomů bude pro mnohé čtenáře méně zajímavý, než sdělení, že existuje několik málo formulí, které postačí k popisu lidského vyvozování (pokud se týká oboru vymezeného výrokovým počtem). Takže je sice vhodné axiomatiku uvést (v predikátovém počtu přijmeme axiomy týchž

[24] Je nyní jasný výběr motta kapitoly? Poznamenejme dále, že zkoumanou otázkou až dosud bylo, zda existuje důkaz. Pokud položíme otázku, zda existuje důkaz, který má nějakou vlastnost (např. je dostatečně jednoduchý), přestane být konstrukce takovéhoto důkazu triviálním problémem.

typů), avšak umožnit odpůrcům formálních zápisů, aby nemuseli význam těchto axiomů zkoumat — čtenáře, kterého by odrazoval následující popis tří axiomů a jejich intuitivní objasňování, prosím, aby následující petitem psanou část prostě přeskočil. Druhý důvod je závažnější: krása našeho prvého systému principů vyvozování ve výrokovém počtu spočívá v tom, že máme jediné pravidlo a jen tři typy axiomů. Přesně ve stejném bodě však spočívá i jeho nevýhoda — systém je příliš okleštěný a dokazování v něm je obtížné. Proto o několik stránek dále popíšeme jiný systém, který bude mnohem „uživatelsky přívětivější".

Čtenář již pravděpodobně z požadavku, aby axiomy výrokového počtu byly tautologiemi, odhaduje, že v předchozích úlohách jsme na něm požadovali, aby zjistil, že jsou tautologiemi formule těch tvarů, které teď přijmeme za axiomy.

Za **axiomy výrokového počtu** navrhujeme přijmout všechny formule, které jsou některého ze tří následujících tvarů, kde $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ a $\mathcal{R}$ označují *jakékoli* formule výrokového počtu:

VP1 $$\mathcal{P} \to (\mathcal{Q} \to \mathcal{P}),$$
VP2 $$[\mathcal{P} \to (\mathcal{Q} \to \mathcal{R})] \to [(\mathcal{P} \to \mathcal{Q}) \to (\mathcal{P} \to \mathcal{R})],$$
VP3 $$(\neg\mathcal{P} \to \neg\mathcal{Q}) \to (\mathcal{Q} \to \mathcal{P}).$$

Uvedli jsme, že přijaté axiomy je třeba intuitivně zdůvodnit, pokusme se tedy o to:

VP1: Jestliže přijmeme nějaké tvrzení $\mathcal{P}$ jako předpoklad, pak pro nás toto přijaté tvrzení již plyne z čehokoli, tzn. dostáváme implikaci $\mathcal{Q} \to \mathcal{P}$ — jinými slovy: předpoklad $\mathcal{P}$ implikuje implikaci $\mathcal{Q} \to \mathcal{P}$. Jestliže prší, pak z čehokoli plyne, že prší. Zdůrazněme, že tuto úvahu provedeme i v případě, kdy nevíme, zda první tvrzení je správné (pravdivé), a dokonce axiom přijímáme, i když $\mathcal{P}$ samo o sobě nepřijímáme za správné — např. $\neg\mathcal{Q} \to (\mathcal{Q} \to \neg\mathcal{Q})$ je axiomem nezávisle na tom, zda tvrzení $\mathcal{Q}$ akceptujeme jako správné nebo ne!

Prof. Hejný vyprávěl příběh ukazující, jak snadno se člověk nechá unést emocemi. Jeden student vytvořil (přesně podle tvaru axiomu **VP1**) výrok „Z toho, že jsi blbec, plyne, že, jestliže jsem moudrý, ty jsi blbec." Podle očekávání kdokoli byl tázán, odpověděl, že je to nepravda, dokonce drzost a urážka (a neuvědomil si, že výrok, že je blbec, je jen předpokladem implikace a nikoli vyhlašovaným faktem).

VP2: Tento axiom prostě popisuje relativizaci pravidla modus ponens. K trochu podrobnějšímu vysvětlení zopakujme, že pravidlem modus ponens vyvozujeme na základě nějaké implikace, řekněme $\mathcal{Q} \to \mathcal{R}$ a antecedentu implikace, tedy v našem případě $\mathcal{Q}$. Nyní obě tyto formule relativizujme, tj. přijměme za předpokladu $\mathcal{P}$. To, že $\mathcal{Q}$ přijímáme za předpokladu $\mathcal{P}$, vyjádříme implikací $\mathcal{P} \to \mathcal{Q}$, jejíž antecedent je $\mathcal{P}$ a jejíž konsekvent je $\mathcal{Q}$. Přesně stejně přijetí $\mathcal{Q} \to \mathcal{R}$ za předpokladu $\mathcal{P}$ vyjádříme implikací $\mathcal{P} \to (\mathcal{Q} \to R)$, jejíž antecedent je $\mathcal{P}$ a jejíž konsekvent je tentokrát implikace $\mathcal{Q} \to \mathcal{R}$. Za uvedených dvou předpokladů akceptujeme relativizovaný závěr pravidla modus ponens, tedy relativizaci tvrzení $\mathcal{R}$ (jestliže jsme relativizovali výchozí formule, je nezbytné relativizovat i závěr, což by mělo být intuitivně zcela zřejmé) — relativizací je zase implikace, jejímž antecedentem je opětovně $\mathcal{P}$ a jejímž konsekventem je tvrzení $\mathcal{R}$. Aby podobnost co nejvíce vynikla, sepišme ji do tabulky:

modus ponens	Z formulí	$\mathcal{Q} \to \mathcal{R}$,	$\mathcal{Q}$	vyvodíme	$\mathcal{R}$.
VP2	Formule	$\mathcal{P} \to (\mathcal{Q} \to \mathcal{R})$,	$\mathcal{P} \to \mathcal{Q}$	implikují	$\mathcal{P} \to \mathcal{R}$.

Tranzitivita implikace je velmi intuitivním požadavkem (viz ostatně úlohu 17) a současně je viditelně pouhým zjednodušením axiomu **VP2** (je oslabením vznikajícím vynecháním relativizace implikace $\mathcal{Q} \to \mathcal{R}$ a smysl neměnícím prohozením prvních dvou implikací). I toto pozorování může být použito k motivaci **VP2**.

VP3: Předpokládejme, že jsme přijali za správné jak tvrzení $\neg\mathcal{P} \to \neg\mathcal{Q}$, tak také $\mathcal{Q}$. Kdybychom přidali ještě tvrzení $\neg\mathcal{P}$ jakožto předpoklad, dostali bychom najednou $\mathcal{Q}$ (jeden z předpokladů) a rovněž $\neg\mathcal{Q}$ (aplikací modus ponens na zbylé předpoklady). Podle tabulky 1 však víme, že nemůže být najednou pravdivý výrok $\mathcal{Q}$ a jeho negace $\neg\mathcal{Q}$. Z předvedeného vyvodíme, že nesmíme současně přijmout všechny tři naše předpoklady. Ze dvojice výroků $\mathcal{P}$ a $\neg\mathcal{P}$ je však vždy jeden pravdivý a když není pravdivý $\neg\mathcal{P}$, musí být pravdivý $\mathcal{P}$. Je tudíž přirozené z předpokladů $\neg\mathcal{P} \to \neg\mathcal{Q}$ a $\mathcal{Q}$ vyvozovat $\mathcal{P}$. Vyvozování tohoto typu je formalizováno axiomem **VP3**. Uvedený princip je obrácením implikace $(\mathcal{Q} \to \mathcal{P}) \to (\neg\mathcal{P} \to \neg\mathcal{Q})$, tradičně nazývané **zákonem transpozice**, který přijímali již Aristotelés i Stoici; Aristotelés dokonce uvádí výslovně axiom **VP3** jako správnou úvahu. V úlohách 14 a 16 jste měli nahlédnout, že jak axiom **VP3**, tak také zákon transpozice jsou tautologiemi.

Při zachování modus ponens jako jediného odvozovacího pravidla by bylo možno přijmou místo našich tří axiomů jediný axiom (viz např. [Me]), zaplatili bychom však ztrátou přehlednosti — formulace axiomu není příliš intuitivní:

$$[([(\mathcal{P} \to \mathcal{Q}) \to (\neg\mathcal{R} \to \neg\mathcal{S})] \to \mathcal{R}) \to \mathcal{T}] \to [(\mathcal{T} \to \mathcal{P}) \to (\mathcal{S} \to \mathcal{P})].$$

Ve třetím paragrafu připojíme k problému minimalizace vyvozovacích principů ještě jednu poznámku v souvislosti se Shefferovou operací.

*

Ve výrokovém počtu definujeme rekurzí **důkaz** z nějakého systému předpokladů $\mathfrak{T}$:

Stavební kameny: formule výrokového počtu.
Základní důkazy: důkazy skládající se z jediného axiomu výrokového počtu nebo z jediného předpokladu ze zadaného systému $\mathfrak{T}$.
Pravidla pro prodlužování důkazů:
(a) modus ponens,
(b) možnost připojit za důkaz jiný důkaz (opět důkaz z předpokladů $\mathfrak{T}$).

Pro velikou důležitost pojmu důkazu zopakujme nyní jeho definici ještě jinými slovy:

Je-li $\mathfrak{T}$ jakýkoli systém formulí výrokového počtu, pak **důkazem ze systému předpokladů** $\mathfrak{T}$ rozumíme konečnou posloupnost formulí $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k$ výrokového počtu takovou, že pro každé i menší nebo rovno k má formule $\mathcal{D}_i$ *některý* z následujících tvarů:

(i) $\mathcal{D}_i$ je axiomem výrokového počtu — kdykoli smíme užít axiom výrokového počtu,

(ii) $\mathcal{D}_i$ je jedním z předpokladů systému $\mathcal{T}$ — kdykoli smíme užít jeden z předpokladů[25]),

(iii) $\mathcal{D}_i$ vznikne aplikací dedukčního pravidla modus ponens na dvě formule v posloupnosti předcházející (podrobněji: existují j, j' *menší* než i takové, že $\mathcal{D}_{j'}$ je formulí tvaru $\mathcal{D}_j \to \mathcal{D}_i$) — kdykoli smíme aplikovat modus ponens na některé formule, které *v důkazu předcházejí.*

Posloupnost[26]) $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k$, vyhovující výše uvedené podmínce, nazýváme také **důkazem** (té poslední) **formule** $\mathcal{D}_k$ ze systému předpokladů $\mathcal{T}$. Formuli $\mathcal{A}$ výrokového počtu nazýváme **dokazatelnou** ze systému předpokladů $\mathcal{T}$, jestliže existuje její důkaz z uvedeného systému předpokladů. Dokazatelnost formule $\mathcal{A}$ ze systému předpokladů $\mathcal{T}$ značíme $\mathcal{T} \vdash \mathcal{A}$.

Dokazatelností ve výrokovém počtu rozumíme dokazatelnost bez předpokladů (tj. pro prázdný systém $\mathcal{T}$) a v souhlase s předchozím ji značíme $\vdash \mathcal{A}$. Formuli nazveme **vyvratitelnou** ze systému předpokladů $\mathcal{T}$, jestliže její negace je dokazatelná ze systému předpokladů $\mathcal{T}$. Systém formulí výrokového počtu $\mathcal{T}$ nazýváme **sporný** (též *inkonzistentní*), jestliže existuje formule $\mathcal{B}$ taková, že ze systému předpokladů $\mathcal{T}$ je dokazatelná jak sama formule $\mathcal{B}$, tak také její negace $\neg\mathcal{B}$ (neboli existuje-li formule současně dokazatelná i vyvratitelná ze systému $\mathcal{T}$). Systém formulí, který není sporný, nazýváme **bezesporný** (též *konzistentní*). (Jiný popis sporných systémů předpokladů nalezne čtenář v úloze 25.)

Je nutné poznamenat, že nebývá — dokonce ani v matematice — zvykem vytvářet důkazy tak, aby přesně vyhovovaly uvedené definici, bylo by to velmi zdlouhavé a špatně čitelné, avšak každý správný důkaz *musíme být schopni* předělat na důkaz vyhovující výše uvedené definici. Teď uvedeme jediný důkaz v celém našem textu, který je skutečně posloupností mající vlastnost vyžadovanou v definici důkazu. Je to důkaz naprosto triviálního tvrzení $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ (doufám ve váš souhlas, že z faktu, že prší, plyne, že prší). Na tomto důkazu by čtenář měl nahlédnout již uvedený fakt, že otázka prozkoumání, zda uvedená posloupnost formulí je důkazem, je skutečně zcela mechanickou záležitostí (i když náročnou na pozornost). Na druhé straně ale čtenář pravděpodobně také prožije (pokud

25) Na konci úvodu jsme na příkladu pochodu motivovali, že je možno změnou pravidla pro tvorbu nových objektů nezměnit výsledný systém objektů, ale změnit jen „rychlost“ konstrukce. Analogicky při zkoumání pojmu důkazu rekurze s pravidlem umožňujícím přidat najednou celý důkaz a rekurze s pravidly umožňujícími přidat důkaz vytvořený jen z jedoho axiomu nebo jen z jednoho předpokladu vytvářejí týž pojem důkazu; tedy (b) předchozí definice odpovídá možnostem (i) a (ii) současně.

26) Zápis důkazu ve tvaru $\mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_2 \to \ldots \to \mathcal{D}_k$ není vhodný, protože vypadá jako (neuzávorkovaná) implikace, avšak zejména $\mathcal{D}_{i+1}$ nemusí být důsledkem právě poslední předcházející formule $\mathcal{D}_i$, ale libovolných předcházejících formulí, takže zápis *nelze* chápat ani jako soustavu implikací $\mathcal{D}_i \to \mathcal{D}_{i+1}$.
V literatuře lze často také najít definice důkazu, kde formule nejsou uspořádány v řadě, ale jsou uspořádány „jako strom“, tj. uspořádání se může větvit. Každá z definic má své výhody i nevýhody, vedou však k témuž pojmu dokazatelnosti.

se odhodlá projít následujícím textem psaným petitem), že volba formulí výrokového počtu, které důkaz vytvářejí, je méně triviální a že vhodné užití toliko našich omezených prostředků vyvozování vyžaduje jistou zkušenost a intuici.

Následující posloupnost je důkazem formule $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ ve výrokovém počtu:

(1)	$(\mathcal{A} \to [(\mathcal{A} \to \mathcal{A}) \to \mathcal{A}]) \to ([\mathcal{A} \to (\mathcal{A} \to \mathcal{A})] \to (\mathcal{A} \to \mathcal{A}))$,	**VP2**, do kterého dosadíme za formule $\mathcal{P}$ a $\mathcal{R}$ formuli $\mathcal{A}$ a za formuli $\mathcal{Q}$ dosadíme formuli $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$,
(2)	$\mathcal{A} \to [(\mathcal{A} \to \mathcal{A}) \to \mathcal{A}]$,	**VP1**, do kterého dosadíme za $\mathcal{P}$ formuli $\mathcal{A}$ a za $\mathcal{Q}$ dosa-dosadíme formuli $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$,
(3)	$[\mathcal{A} \to (\mathcal{A} \to \mathcal{A})] \to (\mathcal{A} \to \mathcal{A})$,	modus ponens užitý na formule (1) a (2),
(4)	$\mathcal{A} \to (\mathcal{A} \to \mathcal{A})$,	**VP1**, do kterého dosadíme za $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$ formuli $\mathcal{A}$,
(5)	$\mathcal{A} \to \mathcal{A}$,	modus ponens užitý na formule (3) a (4).

* * *

Vraťme se nyní k příkladu 4 a ukažme si, jak trochou přemýšlení podstatně urychlíme řešení a vyhneme se nudnému a únavnému vyplňování tabulek. Nadto v následujících třech příkladech označíme některé úvahy vykřičníkem a případně v hranatých závorkách i odkazem na princip, který budeme formulovat v závěrečné části paragrafu. Označené úvahy by měly posloužit zejména jako motivace dodatečných vyvozovacích principů, při jejichž formulaci se již nebudeme odvolávat na sémantiku (tzn. na tabulky pravdivostních hodnot).

Příklad 5. Bez využití tabulek pravdivostních hodnot chceme zjistit, zda při přijetí systému výroků uvedených v zadání příkladu 4 musí být Jakub doma (přesněji a podrobněji: chceme předvést, že není možné, aby nebyl doma). K našim předpokladům přidejme tedy předpoklad, že Jakub skutečně není doma — cílem je ukázat, že tato vzniklý systém předpokladů je sporný.

Protože předpokládáme, že Jakub není doma, nesmí být doma ani Terezka (užíváme první předpoklad, tj. implikaci $\neg\mathsf{j} \to \neg\mathsf{t}$ a modus ponens). Druhý předpoklad „Jestliže je Kačenka doma, je doma i Terezka.“, tzn. implikaci $\mathsf{k} \to \mathsf{t}$ můžeme přeformulovat na implikaci $\neg\mathsf{t} \to \neg\mathsf{k}$ (!) — [viz zákon transpozice] neboli na „Není-li Terezka doma, není doma ani Kačenka.“. Implikace je tranzitivní (!) a tedy dostáváme $\neg\mathsf{j} \to \neg\mathsf{k}$, tzn. „Není-li Jakub doma, není doma ani Kačenka.“. Uplatníme-li tranzitivitu implikace na náš poslední předpoklad (tj. na implikaci $\neg\mathsf{k} \to \mathsf{j}$), dostaneme implikaci $\neg\mathsf{j} \to \mathsf{j}$, tzn. „Není-li Jakub doma, je doma.“ a z toho vyvodíme (pomocí modus ponens) j. Ukázali jsme, že systém je sporný — vyvodili jsme výrok „Jakub je doma.“ a současně jsme předpokládali že „Jakub není doma.“. Shrňme: náš původní předpoklad, že Jakub není doma, vede ke sporu, takže Jakub je doma (!) — [důkaz sporem].

Pokud jste při prvním čtení nevyřešili úlohy v pátém bodě ne-předmluvy, vraťte se k nim nyní.

V sedmdesátých a osmdesátých letech minulého století se objevovaly v časopisech hádanky s názvem „zebra“ — prý proto, že první slavná hádanka tohoto typu se týkala mj. zebry (snad se jedná o cv. I-1.36). Nechť se proto i v našem prvním případu vyskytují zvířata. (V zadáních běžných hádanek typu „zebra“ se však vyskytuje podstatně méně implikací než v našich úvodních hádankách o zoo a o studentkách, které tvoří přechod od předchozích úloh o vnoučatech, ve kterých byly všechny základní informace zadány ve tvaru implikací, k obvyklým „zebrám“, v nichž se implikace nevyskytuje vůbec a které jsou v našem textu reprezentovány zejména úlohami o kamarádech-tábornících, milovnících umění a domech obývaných nájemníky různých národností — tento seznam je řazen podle vzrůstajícího počtu objektů a tím podle povšechně vzrůstající obtížnosti úloh[27).)

Při řešení složitějších „zeber“ doporučuji vyrobit si tabulku a do ní *postupně* zaznamenávat zjištěné důsledky. Důsledky původně zadaných podmínek a nově nalezených skutečností je třeba hledat *opakovaně*, neboť na základě nově zjištěné skutečnosti můžeme dojít aplikací zadaných podmínek k novým poznatkům, případně můžeme zjistit, že nějaký údaj je vynucen tím, že všechny ostatní možnosti jsou již vyloučeny. V našem textu však nebudeme graficky takovéto tabulky předvádět, protože ukazování jejich postupných změn by neúměrně prodloužilo text; omezíme se proto jen na slovní popis. Pokud již nebudete v získávání nových důsledků schopni pokračovat, můžete nalézt místo, kde jsou jen dvě možnosti a zkusit nejprve přidat jednu možnost jako dodatečný předpoklad a prozkoumat důsledky a poté přidat druhý možný předpoklad a opět prozkoumat jeho důsledky a tím se pokusit zjistit, že jedna možnost je vyloučena, protože vede ke sporu[28)].

Úlohy typu „zebra“ bývají zakončeny poměrně jednoduchou otázkou, např. v následujícím příkladu se ptáme „Ve které zoo chystají ubytování zebře?“. Chceme-li otázku upřesnit, tak žádáme nalezení *všech* možných řešení (je-li jich pro uvažované vlastnosti více než jedno), nebo případné konstatování, že úloha nemá vůbec žádné řešení.

V hádankách jsou některé podmínky zadány výslovně a očíslovány, mnoho dalších

27) Záleží však také na počtu vlastností a struktuře podmínek; v tomto paragrafu lze za nejobtížnější pokládat cvičení I-1.28 a I-1.36. Ve snaze užít „zeber“ k procvičení různých spojení výroků předkládáme řadu úloh tohoto typu také ve druhém paragrafu. Úlohy o studentkách, fotbalistech a gratulantkách vyšetřují více než jednu vlastnost a na rozdíl od běžných „zeber“ obsahují alespoň jednu implikaci nebo některé spojení výroků zkoumané ve druhém paragrafu (pořadí opět zohledňuje rostoucí počet objektů). Znovu opakuji, že cvičení typu „zebra“ je v textu dostatek, není teba vyřešit všechny; vyberte si, vážený čtenáři, těžší nebo lehčí podle své chuti a schopnosti.

28) Hezky a podrobně popsaný návod řešení „zeber“ zejména s méně než třemi vlastnostmi nalezne čtenář v knize [B-H].

informací není pochopitelně přímo vyjádřeno. Jestliže například v následujícím případu uvažujeme čtyři zvířata jedoucí do čtyřech měst, žádáme bez výslovného zdůraznění, aby např. jedno zvíře nejelo do dvou měst a aby do jednoho města nejela dvě zvířata. Zadáváme tedy implicitně mnoho dalších implikací typu „Jede-li žirafa do Brna, nejede žirafa do Prahy.“ a také typu „Jede-li žirafa do Brna, nejede antilopa do Brna.“. Tvrzení zadaná bez výslovného zdůraznění budeme používat intuitivně; doufáme, že pro motivaci dodatečných vyvozovacích principů je dostatečný podrobnější rozbor důsledků výslovně uvedených podmínek.

Příklad 6. Do zoo ve Dvoře Králové, Olomouci, Brně a Praze přijíždějí čtyři zvířata: žirafa, zebra, antilopa a velbloud. Víme:

(1) Pokud žirafa nejede do Prahy, jede tam velbloud.
(2) Antilopa nebude žít v Brně.
(3) Jestliže velbloud nemíří do Dvora Králové, bude žít žirafa v Olomouci.

V našich podmínkách (1)–(3) se nevyskytuje žádný údaj o zebře. Přesto otázka zní: „Ve které zoo chystají ubytování zebře?“.

Nyní si můžete sepsat všechny možnosti, kam které zvíře jede. Těchto možností je $4! = 24$ (určíte-li místo pobytu prvního zvířete — jednu ze čtyř možností — zbývají na druhé zvíře tři možnosti, atd.). Pro těchto 24 případů můžete zkoumat pravdivost složených výroků (1)–(3) a touto mechanickou cestou dojdete k cíli. Ukažme však, že trocha uvažování opět vede ke správné odpovědi s mnohem menší námahou (a mechanickou cestu si necháme jen pro případ naprosté bezradnosti).

Zkoumejme dvě možnosti podle toho, zda velbloud míří do Dvora Králové, nebo ne:

(I) Velbloud jede do Dvora Králové, pak podle (1) musí žirafa do Prahy (!) — [důkaz sporem]. Antilopa směřuje do Olomouce (2) a následně připravují zebře ubytování v Brně.

(II) Velbloud nejede do Dvora Králové, pak bude žít žirafa v Olomouci (3). Velbloud musí do Prahy (1) a antilopa do Dvora Králové (2). Zebře opět chystají ubytování v Brně.

Odpověď tudíž[29)] zní: „Ubytování zebře chystají v brněnské zoo.“

Uvědomme si však, že jsme nerozhodli např. zda žirafa jede do Prahy nebo do Olomouce, neboť požadavky (1)–(3) nevyloučí žádnou z těchto možností (viz po řadě případy (I) a (II)). Možným řešením je totiž jak rozmístění zvířat: žirafa Praha, velbloud Dvůr Králové, antilopa Olomouc a zebra Brno, tak také rozmístění zvířat: žirafa Olomouc, velbloud Praha, antilopa Dvůr Králové a zebra Brno.

Následující úlohy jsou velice lehké.

[29)] Podrobnější rozbor zde užité triviální úvahy týkající se vyšetření více možností provedeme ve druhém paragrafu — [důkaz rozborem případů].

Úloha 18. Čtyři zvířata z předchozího příkladu opět jedou do zoo uvedených v předchozím příkladu. Nyní víme:

(1) Antilopa nejede do žádné z moravských zoo[30)].
(2) Pokud velbloud míří do Olomouce, směřuje žirafa do Brna.
(3) Nejede-li žirafa do Prahy, jede antilopa do Olomouce.

Otázka opět zní: „Ve které zoo chystají ubytování zebře?“. Můžete navíc rozhodnout, kam vezou antilopu?

Úloha 19. O našich čtyřech cizokrajných zvířatech nyní víme:

(1) Nejede-li žirafa do Prahy, míří velbloud do Brna.
(2) Nepřipravují-li domov antilopě v Praze, směřuje velbloud do Olomouce.
(3) Velbloud bude žít ve Dvoře Králové.

Umíte z těchto informací určit, kam putuje zebra?

Úloha 20. Ze tří studentek (Jana, Eva a Marie) má každá ráda jiný předmět (matematiku, angličtinu a dějepis) a má jinou barvu vlasů (černou, hnědou a světlou). Víme:

(1) Jana nemá v oblibě dějepis.
(2) Černovláska dává přednost angličtině.
(3) Milovnice matematiky nemá světlé vlasy.
(4) Má-li Jana černé vlasy, je oblíbeným předmětem Marie matematika.
(5) Eva není světlovlasá.

Určete oblíbené předměty a barvu vlasů jednotlivých dívek.

Při více vlastnostech se v hádankách typu „zebra“ dramaticky zvyšuje počet všech kombinací. Řešení zcela mechanickým výpočtem se tudíž stává ještě obtížnějším (při třech objektech a třech vlastnostech v následující úloze by byl počet případů $3! \cdot 3! \cdot 3! = 216$. Naproti tomu následující úloha se ukáže strašně jednoduchá, pokud ji neřešíte mechanicky.

---

30) Matematizace tohoto slovního vyjádření s jasným významem směřuje k disjunkci; tvrzení bylo zařazeno jako upozornění na problematiku, které bude věnován příští paragraf. Bez disjunkce vyjádříme popisované tvrzení pomocí dvou tvrzení obsahujících negaci — uvedením dvou zoo, do nichž antilopa nejede.

*u*18) Podle (1) a (3) jede žirafa do Prahy. Následně v důsledku (2) velbloud nemíří do Olomouce, kam nemůže jet ani antilopa podle (1). Pročež zebře chystají ubytování v Olomouci, neboť žádné jiné zvíře tam jet nemůže. Navíc antilopa musí do Dvora Králové (1), takže velbloud směřuje do Brna. Rozmístění zvířat je určeno jednoznačně.

*u*19) Nikoli. Důvodem není, že určení je nedostatečné, a proto zebra může jet do více měst, avšak právě naopak: informací je příliš mnoho, vytvářejí sporný systém, takže ať jede zebra kamkoli, nevyhovíme všem předpokladům.

*u*20) Kdyby Jana měla ráda angličtinu, musela by mít podle (2) černé vlasy; v důsledku (4) by pak Marie preferovala matematiku a následně dle (3) by měla hnědé vlasy, tuto možnost však vylučuje podmínka (5). Takže Jana v důsledku (1) miluje matematiku a má podle (2) a (3) hnědé vlasy, Eva musí být v důsledku (5) černovláskou a nadto podle (2) musí mít v oblibě angličtinu.

Úloha 21. Partu tří kamarádů tvoří Petr, Tomáš a Jan a jejich příjmení jsou Červený, Modrý a Bílý. Na výlety nosí každý z nich jednu z tábornických potřeb (sekerku, kotlík a stan) a každý dává přednost jinému sportu (horolezectví, cyklistika a jízda na divoké vodě). Víme:

(1) Stan nosí cyklista.
(2) Tomáš se nejmenuje Bílý.
(3) Petr je horolezcem.
(4) Červený nosí sekerku.
(5) Bílý není vodákem.
(6) Petr nenosí kotlík.

Otázka zní: Jak se jmenuje křestním jménem i příjmením ten z chlapců, který nosí kotlík? Druhá otázka: Které předpoklady nepotřebujete, abyste určili, jak se jmenuje ten, kdo nosí sekerku?

Příklad 7. Milovníci umění se jmenují Josef, Antonín, František a Pavel, hrají na různé nástroje (housle, violu, violoncello a basu), přou se o své oblíbené autory (Čapka, Haška, Kunderu a Seiferta). O vystoupení, kdy hráli víceméně v řadě, jsme se dověděli:

(1) Pavel hraje na housle.
(2) Josef obdivuje Haška.
(3) Violista preferuje Čapka.
(4) František stojí nejvíce vlevo.
(5) Violoncellista není milovníkem Haška.
(6) Vpravo hned vedle basisty stojí violoncellista.
(7) Obdivovatel Kundery stojí hned vlevo vedle milovníka Seiferta.

Popište, kterého spisovatele má nejraději ten který hudebník a v jakém pořadí naši milovníci umění stojí. Bude mít úloha více řešení, vynecháme-li v sedmé podmínce slovíčko „hned"?

Zjistěme nejprve křestní jméno violoncellisty. V důsledku podmínek (5) a (2) se nemůže jmenovat Josef (!) — [důkaz sporem a „dvojitou negaci lze vynechat"]. Na základě podmínek (4) a (6) vyloučíme jméno František (!) — [důkaz sporem a „dvojitou negaci lze vynechat"]. Podmínka (1) znemožňuje, aby se jmenoval Pavel. Violoncellista se tudíž jmenuje Antonín.

Violista se nemůže jmenovat ani Pavel (1), ani Josef (2) a (3) (!) — [důkaz sporem a „dvojitou negaci lze vynechat"], a dokonce ani Antonín, protože to je

---

[u21)] Petr je horolezcem (3), a tedy nemůže nosit stan (1) ani kotlík (6); nosí tudíž sekerku a následně se jmenuje Červený (4). Pro zjištění jména nositele sekerky jsme nepotřebovali podmínky (2) a (5). Tomáš Modrý (2) je vodákem (5); následně nosí kotlík (1). (Pomocí protipříkladů si můžete ověřit, že po vynechání kteréhokoli z požadavků (1), (3), (4) a (6) již není jméno nositele sekerky určeno jednoznačně.)

jméno violoncellistovo. Pročež violista se jmenuje František a následně Josef hraje na basu (1).

Ze zjištěného můžeme odvodit, že violoncellista Antonín má rád Kunderu. On ani houslista Pavel totiž nemilují Čapka (3), ani Haška (2), musí tedy mít rádi Kunderu a Seiferta. Takže musí stát hned vedle sebe a milovník Kundery se nachází hned vlevo do milovníka Seiferta (7). Hned vlevo od violoncellisty je však basista Josef — milovník Haška (6), což určuje, že Antonín dává přednost Kunderovi.

Naši milovníci umění stojí v pořadí zleva doprava: Violista František milující Čapka, basista Josef preferující Haška, violoncellista Antonín, který má rád Kunderu, a houslista Pavel obdivující Seiferta.

Pokud v sedmé podmínce vynecháme slovo „hned", bude řešením také pořadí: violista František milující Čapka, houslista Pavel obdivující Kunderu, basista Josef preferující Haška a violoncellista Antonín, který má rád Seiferta.

* * *

Teď přistoupíme k popisu možných dodatečných principů dokazování, které zpřehledňují demonstrace a usnadňují nalezení potřebných důkazů. Potřeba takovýchto prostředků je zcela očividná, neboť důkaz naprosto triviálního tvrzení $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ měl pět kroků, plně provedené důkazy složitějších tvrzení by byly velice těžko průhledné a přetěžce bychom pro každé jednotlivé tvrzení hledali znovu a znovu metodu konstrukce důkazu. Zopakujme, že v matematické logice bylo sice ukázáno, že při užívání těchto principů nedokážeme nic, co by nebylo dokazatelné bez nich, avšak sami nahlédnete, jak se dokazování zjednoduší — pochopitelně pokud se dodatečné principy naučíte používat. Některé principy jsme snad motivovali v předchozích příkladech (a jejich využití ještě upřesníme), důvody pro užívání ostatních uvedeme při jejich formulaci.

Uvedli jsme, že užívání dodatečných principů dokazování velmi zjednoduší prokazování dokazatelnosti zadaných formulí, avšak i tak zůstane prokazování dokazatelnosti jednotlivých formulí záležitostí vyžadující jistý vhled do problematiky. Závěr paragrafu je proto o poznání obtížnější než předcházející text a rovněž obtížnější než převážná část následujícího paragrafu.

Důkaz sporem a důkaz rozborem případů jsou v matematice tak běžná odvozovací pravidla, že by neměly potřebovat přílišné vysvětlování. Běžnost těchto pravidel naopak způsobuje, že kdybychom nebyli schopni zaručit možnost použití těchto vyvozovacích prostředků, pokládali bychom náš systém za „slabý" (uveďme však, že např. intuicionistická logika — viz závěr textu — nepřipouští důkaz sporem). Důkazem sporem se budeme zabývat za okamžik, důkaz rozborem případů pojednává o disjunkci a je tedy nutné jeho popis odložit do příštího paragrafu, nicméně jeho nejdůležitější speciální případ — důkaz neutrální formulí — probereme ještě v tomto paragrafu.

Zbývající dvě odvozovací pravidla — důkaz dedukcí a důkaz nahrazením[31] se mohou čtenáři zdát na první pohled nedůležitá. Z hlediska logiky je však důkaz dedukcí pravděpodobně nejdůležitějším a nejaplikovatelnějším odvozovacím pravidlem, o čemž se bude snažit čtenáře přesvědčit příklady 8, 9 a úlohy 22, 23, které ukazují některé další vyvozovací principy jako jednoduché důsledky důkazu dedukcí. Právě v tom tkví význam důkazu dedukcí: s jeho pomocí se dokáží pomocné vyvozovací principy a teprve ty se využijí při aplikacích. Zopakujme z úvodu, že pro osvojení užívání vyvozovacích principů je velice žádoucí, abyste si, milý čtenáři, alespoň některé důkazy z následujících úloh a cvičení SESTROJIL SÁM a nespokojil se pouze s pasivní kontrolou jejich správnosti.

Jestliže $\mathcal{T}$ je jakýkoli systém formulí výrokového počtu a $\mathcal{A}$ je jakákoli formule téhož počtu, pak $\mathcal{T}, \mathcal{A}$ značí systém formulí $\mathcal{T}$ rozšířený o formuli $\mathcal{A}$ (tj. předpokladem systému $\mathcal{T}, \mathcal{A}$ je jednak jakýkoli předpoklad systému $\mathcal{T}$ a jednak předpoklad $\mathcal{A}$).

Důkaz dedukcí. Jestliže ze systému předpokladů $\mathcal{T}, \mathcal{A}$ dokážeme formuli $\mathcal{B}$, pak pouze z předpokladů $\mathcal{T}$ dokážeme implikaci $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, tzn. v symbolech: je-li $\mathcal{T}, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$, je $\mathcal{T} \vdash \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Jinými slovy: Princip umožňuje z existence důkazu ze systému předpokladů $\mathcal{T}, \mathcal{A}$ obsahujícího formuli $\mathcal{A}$ vyvodit existenci důkazu ze systému $\mathcal{T}$, který ji již neobsahuje. Dokážeme-li za předpokladu $\mathcal{A}$ formuli $\mathcal{B}$, jsme schopni *bez předpokladu* $\mathcal{A}$ dokázat implikaci $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

Příklad 8. Ukažme si, jak se aplikací pravidla důkazu dedukcí jednoduše dokáže formule $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$: Zcela evidentně $\mathcal{A} \vdash \mathcal{A}$, neboť jako důkaz poslouží jednočlenná posloupnost — prostě napíšeme předpoklad $\mathcal{A}$ (tj. použijeme pravidlo o základních důkazech). Nyní aplikujme důkaz dedukcí (při kteréžto aplikaci je systém předpokladů označený $\mathcal{T}$ prázdný); dostáváme $\vdash \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ a jsme proto hotovi. Není to „trochu“ jednodušší než petitem psaný důkaz o několik odstavců výše?!

Příklad 9. Při dokazování jsme zvyklí, že **„vše dokázané lze použít k** (dalšímu) **dokazování“.** Nemožnost užívat takovýto princip by naprosto nabourala naši představu o dokazování. V následujícím odstavci si ukážeme, že je vše v souladu s naší intuicí, neboť tento princip plyne z principu důkazu dedukcí.

Potřebujeme odůvodnit, že z dokazatelnosti $\mathcal{T} \vdash \mathcal{A}$ (tzn. z existence důkazu formule $\mathcal{A}$ ze systému předpokladů $\mathcal{T}$) a z dokazatelnosti $\mathcal{T}, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$ (tj. existence

[31] V souladu se slovním spojením „důkaz sporem“ a jinými podobnými budeme *názvy* dodatečných odvozovacích pravidel vytvářet spojením slova důkaz a běžného označení věty logiky, která ukazuje, že uvedené odvozovací pravidlo lze přidat do systému principů vyvozování, v našem konkrétním případě se jedná o věty o dedukci a o nahrazení. Prokázání vět o dedukci, o nahrazení, o důkazu sporem a o neutrální formuli lze nalézt např. v §2 kap. I [So].

důkazu formule $\mathcal{B}$ za použití dodatečného předpokladu $\mathcal{A}$) plyne $\mathcal{T} \vdash \mathcal{B}$ (tj. že existuje důkaz formule $\mathcal{B}$ ze systému předpokladů $\mathcal{T}$ *bez dodatečného předpokladu* $\mathcal{A}$). Vše je opět zcela triviální. Podle důkazu dedukcí z druhé předpokládané dokazatelnosti plyne existence důkazu formule $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ z předpokladů $\mathcal{T}$. Za tento důkaz připojme důkaz formule $\mathcal{A}$ ze systému předpokladů $\mathcal{T}$ a dostaneme důkaz ze systému předpokladů $\mathcal{T}$ podle pravidla (b) pro prodlužování důkazů (členy takto sestrojeného důkazu je jak formule $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, tak také formule $\mathcal{A}$). Za takto vzniklý důkaz připojme formuli $\mathcal{B}$ (prosté užití pravidla modus ponens, tj. pravidla (a) pro prodlužování důkazů). A jsme hotovi, sestrojili jsme důkaz z předpokladů $\mathcal{T}$, jehož posledním členem je formule $\mathcal{B}$.

Úloha 22. Prokažte tranzitivitu implikace syntakticky, tj. pro libovolné formule $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ a $\mathcal{R}$ dokažte ve výrokovém počtu formuli $(\mathcal{P} \to \mathcal{Q}) \to [(\mathcal{Q} \to \mathcal{R}) \to (\mathcal{P} \to \mathcal{R})]$. Návod: užijte trojnásobně důkaz dedukcí, a to na formule $\mathcal{P} \to \mathcal{Q}, \mathcal{Q} \to \mathcal{R}, \mathcal{P}$.

Úloha 23. Dokažte zákon Dunse Scota $\neg p \to (p \to q)$. Návod: Užijte axiom **VP1** volíce postupně za formule $\mathcal{P}, Q$ negace odpovídajících výrokových proměnných, tzn. formule $\neg p$ a $\neg q$; užijte **VP3** a tranzitivitu implikace.

Zatím sice dlužíme intuitivní vysvětlení zákona Dunse Scota, ten je však velmi přirozený: jestliže přijmeme negaci předpokladu p, pak ze samotného předpokladu p již plyne cokoli. Nejste-li doma, pak určitě z předpokladu, že doma jste, už plyne cokoli si vymyslíme. Jinou, snad dokonce přirozenější, formulaci tohoto zákona popíšeme ve formuli (*iii*) následujícího paragrafu.

Úloha 24. Ukažte, že po přijetí pravidla důkazu dedukcí již můžeme z našeho systému vyvozovacích principů vypustit první dva axiomy **VP1, VP2.**

*

[u22] Uvažme, že ze systému předpokladů $\mathcal{P} \to \mathcal{Q}, \mathcal{Q} \to \mathcal{R}, \mathcal{P}$ jsou pomocí modus ponens postupně dokazatelné formule $\mathcal{Q}$ a $\mathcal{R}$. Pak již stačí na dokazatelnost $\mathcal{P} \to \mathcal{Q}, \mathcal{Q} \to \mathcal{R}, \mathcal{P} \vdash \mathcal{R}$ třikrát použít důkaz dedukcí (nejprve užitím na formuli $\mathcal{P}$ získáme $\mathcal{P} \to \mathcal{Q}, \mathcal{Q} \to \mathcal{R} \vdash \mathcal{P} \to \mathcal{R}$, druhým užitím důkazu dedukcí obdržíme $\mathcal{P} \to \mathcal{Q} \vdash (\mathcal{Q} \to \mathcal{R}) \to (\mathcal{P} \to \mathcal{R})$ a třetí aplikací dostaneme žádanou dokazatelnost formule $(\mathcal{P} \to \mathcal{Q}) \to [(\mathcal{Q} \to \mathcal{R}) \to (\mathcal{P} \to \mathcal{R})]$ bez jakýchkoli předpokladů).

[u23] Popsaným užitím axiomu **VP1** dostanete $\neg p \to (\neg q \to \neg p)$. Axiom **VP3** aplikujeme na výrokové proměnné p, q a obdržíme $(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$. Uvedené aplikace axiomů jsou pochopitelně dokazatelné ve výrokovém počtu, pročež tranzitivita implikace zajistí dokazatelnost formule $\neg p \to (p \to q)$ ve výrokovém počtu.

[u24] Evidentně $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \vdash \mathcal{P}$ (sepsání předpokladu, tj. pravidlo (ii) konstrukce důkazů) a nyní stačí dvakrát použít důkaz dedukcí: nejprve získáme $\mathcal{P} \vdash \mathcal{Q} \to \mathcal{P}$ a poté $\vdash \mathcal{P} \to (\mathcal{Q} \to \mathcal{P})$.
Pro prokázání dokazatelnosti druhé formule uvažme, že $\mathcal{P}, \mathcal{P} \to (\mathcal{Q} \to \mathcal{R}), \mathcal{P} \to \mathcal{Q} \vdash \mathcal{Q}$ (užijeme modus ponens), $\mathcal{P}, \mathcal{P} \to (\mathcal{Q} \to \mathcal{R}), \mathcal{P} \to \mathcal{Q} \vdash \mathcal{Q} \to \mathcal{R}$ (opět modus ponens), $\mathcal{P}, \mathcal{P} \to (\mathcal{Q} \to \mathcal{R}), \mathcal{P} \to \mathcal{Q} \vdash \mathcal{R}$ (předchozí výsledky, „vše dokázané lze použít k dokazování" a modus ponens), a nyní třikrát důkaz dedukcí: poprvé $\mathcal{P} \to (\mathcal{Q} \to \mathcal{R}), \mathcal{P} \to \mathcal{Q} \vdash \mathcal{P} \to \mathcal{R}$, podruhé $\mathcal{P} \to (\mathcal{Q} \to \mathcal{R}) \vdash (\mathcal{P} \to \mathcal{Q}) \to (\mathcal{P} \to \mathcal{R})$ a na závěr třetí aplikací důkazu dedukcí získáme $\vdash [\mathcal{P} \to (\mathcal{Q} \to \mathcal{R})] \to [(\mathcal{P} \to \mathcal{Q}) \to (\mathcal{P} \to \mathcal{R})]$.

Výroková proměnná představuje blíže neurčený výrok a můžeme tudíž uvažovat o jejím nahrazení výrokem. Máme-li jakoukoli dokazatelnou formuli a nahradíme-li v ní výrokovou proměnnou nějakým výrokem, je velice intuitivní, že dostaneme opět správné tvrzení. Například víme, že formule $\mathtt{p} \to \mathtt{p}$ je dokazatelná, je tedy přirozené vyvodit, že také výpověď „Jestliže prší, pak prší." je správná. Ovšem rovněž jakákoli formule výrokového počtu představuje nějaký (zatím ne zcela přesně určený) výrok a z toho důvodu je přirozené, že nahrazením výrokové proměnné jakoukoli formulí výrokového počtu dostaneme z formule dokazatelné ve výrokovém počtu opět formuli dokazatelnou ve výrokovém počtu. Podstatné však je, že výrokovou proměnnou musíme při jednom nahrazování nahradit všude, a to touž formulí. Kdybychom v dokazatelné formuli $\mathtt{p} \to \mathtt{p}$ proměnnou $\mathtt{p}$ v prvém případě nahradili výrokem „Prší." a ve druhém případě výrokem „Svítí sluníčko." dostali bychom zřejmě nesprávný výrok „Jestliže prší, pak svítí sluníčko." Pro jistotu zopakujme popsaný vyvozovací princip trochu formálněji.

Důkaz nahrazením. Je-li výroková formule $\mathcal{A}$ dokazatelná ve výrokovém počtu (tzn. bez předpokladů) a vznikne-li formule $\mathcal{C}$ nahrazením *všech* výskytů jedné výrokové proměnné ve formuli $\mathcal{A}$ jakousi formulí $\mathcal{B}$, je formule $\mathcal{C}$ dokazatelná.

Axiomy **VP1–VP3** jsme vyslovili ve tvaru platném pro jakékoli formule $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$ a ve stejném duchu jsme formulovali tranzitivitu implikace v úloze 22. Naproti tomu v úloze 23 jsme zákon Dunse Scota formulovali jen jako jednu formuli tvaru $\neg\mathtt{p} \to (\mathtt{p} \to \mathtt{q})$ a nikoli ve tvaru, že pro libovolné formule $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ je dokazatelná formule $\neg\mathcal{P} \to (\mathcal{P} \to \mathcal{Q})$. Nedopustili jsme se neobratnosti a jsme schopni obecnější tvar odvodit z tvaru speciálního? Obecnou metodu, jak ze speciálního příkladu odvodit obecné pravidlo popíše následující příklad. Vědomi si možnosti získat obecný případ pomocí pravidla důkaz nahrazením z případu speciálního — z jedné určité formule — budeme v dalším textu všechna pravidla (zákony) formulovat v co nejjednodušším a nejpřehlednějším speciálním tvaru (viz např. formulace příkladu 11 a úloh 26 a 27).

Příklad 10. Podle výsledku úlohy 23 je ve výrokovém počtu dokazatelný zákon Dunse Scota ve tvaru formule $\neg\mathtt{p} \to (\mathtt{p} \to \mathtt{q})$. Ukážeme, že jsou-li $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ jakékoli formule výrokového počtu, je obecnější tvar zákona Dunse Scota, tzn. formule $\neg\mathcal{P} \to (\mathcal{P} \to \mathcal{Q})$, dokazatelný ve výrokovém počtu užitím důkazu nahrazením.

Prostým užitím důkazu nahrazením aplikovaným na proměnnou $\mathtt{p}$ a formuli $\mathcal{P}$ nahlédneme, že formule $\neg\mathcal{P} \to (\mathcal{P} \to \mathtt{q})$ je dokazatelná ve výrokovém počtu. Následně podle téhož pravidla je dokazatelná ve výrokovém počtu rovněž formule $\neg\mathcal{P} \to (\mathcal{P} \to \mathcal{Q})$[32].

[32] Pokud se vám předchozí úvaha nezdá dostatečně odůvodněná, jste naprosto v právu. Ano, je tam potřebný další předpoklad, který nebyl výslovně zmíněn. Takže přijali-li jste

Úloha 25. Ukažte, že systém předpokladů $\mathcal{T}$ je sporný, právě když je z něho dokazatelná každá formule výrokového počtu.

*

Ze všech důkazových prostředků se ve školách nejvíce mluví o důkazu sporem, proto snad formulace ani užití tohoto odvozovacího pravidla nepotřebuje nadbytečné zdůvodňování. Zopakujme jen intuici stojící za tímto vyvozovacím principem: jestliže z negace nějakého tvrzení $\mathcal{A}$ dovodíme něco nesprávného, pak princip důkazu sporem nám dovolí uzavřít, že nemůže být udržitelný náš původní předpoklad $\neg\mathcal{A}$, tzn. že jsme dokázali výchozího tvrzení $\mathcal{A}$.

Důkaz sporem[33).] Je-li systém předpokladů $\mathcal{T}, \neg\mathcal{A}$ sporný, je formule $\mathcal{A}$ dokazatelná ze systému předpokladů $\mathcal{T}$.

Prosím čtenáře, aby si uvědomil, že důkaz sporem je svou strukturou dosti výjimečný. Běžně z předpokladů, které pokládáme za správné, vyvozujeme další tvrzení, při důkazu sporem naopak předpokládáme platnost toho, co chceme vyvrátit.

předchozí argumentaci jako zcela správnou, hledejte slabé místo nyní. — Nevidíte-li ho, napovím, že předpoklad je třeba k druhému užití důkazu nahrazením. — Předpokládáme, že ve formuli $\mathcal{P}$ se nevyskytuje proměnná q. Pokud by se totiž proměnná q ve formuli $\mathcal{P}$ vyskytovala, dostaneme po jejím nahrazením formulí $\mathcal{Q}$ jakousi formuli $\mathcal{P}'$ a (v případě, že q je různé od $\mathcal{Q}$) nikoli formuli $\mathcal{P}$ samotnou. Druhým nahrazením tudíž získáme toliko formuli $\neg\mathcal{P}' \rightarrow (\mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{Q})$ a ne požadovanou formuli $\neg\mathcal{P} \rightarrow (\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q})$.

Předveďme si předchozí námitku na příkladu, kdy formule $\mathcal{P}$ je prostě výrokovou proměnnou q. Při této volbě dostáváme prvním nahrazením $\neg\mathsf{q} \rightarrow (\mathsf{q} \rightarrow \mathsf{q})$ a druhým $\neg\mathcal{Q} \rightarrow (\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q})$ a nikoli žádané $\neg\mathsf{q} \rightarrow (\mathsf{q} \rightarrow \mathcal{Q})$. Naším dosazováním jsme sice prokázali dokazatelnost formule, avšak jiné, než jsme chtěli.

Protože jsem však předpoklad zamlčel, je pravděpodobné, že tvrzení platí — i když jeho prokázání vyžaduje ještě další ideu. Je teď na vás tvrzení dokázat i pro formule $\mathcal{P}$, ve kterých se vyskytuje proměnná q. — Pokud se nedaří, prozradím, že stačí užít navíc důkaz nahrazením užitý na výchozí formuli $\neg\mathsf{p} \rightarrow (\mathsf{p} \rightarrow \mathsf{q})$. — Snad nápověda stačila. — Nejprve nahradíme v zákonu Dunse Scota proměnnou q nějakou proměnnou q', která se nevyskytuje ani v zákonu Dunse Scota, ani v některé z formulí $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$. Tímto nahrazením dostaneme formuli $\neg\mathsf{p} \rightarrow (\mathsf{p} \rightarrow \mathsf{q}')$, která je podle důkazu nahrazením dokazatelná ve výrokovém počtu. Na tuto formuli nyní aplikujeme úvahu popsanou v textu nahrazujíce proměnnou p formulí $\mathcal{P}$ a proměnnou q' formulí $\mathcal{Q}$ (formule $\mathcal{P}$ neobsahuje proměnnou q', tj. dodatečně požadovaná podmínka platí). Prvním nahrazením získáme formuli $\neg\mathcal{P} \rightarrow (\mathcal{P} \rightarrow \mathsf{q}')$, druhým nahrazením obdržíme žádanou formuli $\neg\mathcal{P} \rightarrow (\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q})$. Dvojnásobná aplikace důkazu nahrazením vzhledem k popsaným nahrazením nás ubezpečí o dokazatelnosti posledně zmíněné formule ve výrokovém počtu.

[u25)] Je-li ze systému předpokladů $\mathcal{T}$ dokazatelná jakákoli formule výrokového počtu, je speciálně pro jakkoli zvolenou formuli $\mathcal{C}$ dokazatelná jak ona sama, tak také její negace $\neg\mathcal{C}$. Předpokládejme naopak, že $\mathcal{T} \vdash \mathcal{C}$ a současně $\mathcal{T} \vdash \neg\mathcal{C}$. Buď dána zcela libovolná formule $\mathcal{D}$. Formule $\neg\mathcal{C} \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D})$ je dokazatelná podle předchozího příkladu ve výrokovém počtu, a tudíž tím spíše z předpokladů $\mathcal{T}$. Takže stačí dvakrát použít pravidlo „vše dokázané lze použít k dokazování“ (a modus ponens) a získáme $\mathcal{T} \vdash \mathcal{D}$.

[33)] Důkaz sporem se také nazývá *reductio ad absurdum*.

Pokud jste v závěru čtvrtého příkladu souhlasil s tvrzením „Jakub nemůže nebýt doma, tj. Jakub je doma.“ jako jasným bez odvolání na sémantiku, pak přijímáte, že dva zmíněné výroky mají stejný význam, neboli souhlasíte s **„dvojitou negaci lze vynechat“** a současně s **„dvojitou negaci lze přidat“.** V takovém případě výsledky příkladu 11 a úlohy 26 jen potvrdí vaše očekávání. Pokud jste ve čtvrtém příkladu měli pochybnosti, zda nepoužíváme nepovolené triky, měly by tyto pochybnosti být odstraněny výsledky následujícího příkladu a úlohy.

Příklad 11. Ukážeme dokazatelnost formule $\neg\neg p \to p$ ve výrokovém počtu. K tomu účelu si nejprve uvědomíme, že systém $\neg\neg p, \neg p$ je sporný, neboť je v něm dokazatelná jak formule $\neg p$, tak také její negace $\neg\neg p$. Pak aplikujeme důkaz sporem na formuli $\neg p$ a zjistíme, že $\neg\neg p \vdash p$. Nyní již postačuje užít důkaz dedukcí, abychom obdrželi žádanou dokazatelnost $\neg\neg p \to p$ ve výrokovém počtu.

Úloha 26. Ukažte dokazatelnost formule $p \to \neg\neg p$ ve výrokovém počtu. Návod: při použití výsledku předchozího příkladu nejdřív ukažte, že systém $\neg\neg\neg p, p$ je sporný.

Úloha 27. Prokažte dokazatelnost formule $(p \to q) \to [(p \to \neg q) \to \neg p]$ ve výrokovém počtu. Návod: Nahlédněte spornost teorie se systémem předpokladů $(p \to q)$, $(p \to \neg q)$, $\neg\neg p$.

Úloha 28. Ukažte, že po přijetí pravidla důkazu sporem již můžeme z našeho systému vyvozovacích principů vypustit třetí axiom **VP3.**

Ukažme si, jak by probíhaly úvahy o jménech jednotlivých milovníků umění z počátku příkladu 7 přesně na základě vyslovených odvozovacích pravidel. Účelem následujícího odstavce není vás nutit provádět úvahy tak složitě, avšak ukázat, jak v případě nutnosti převést intuitivní úvahu provedenou v příkladu 7 na odvozovací pravidla popsaná v tomto paragrafu (o kterých si dovolíme předpokládat, že se na nich s partnerem diskuse shodnete). Za předpokladu našich podmínek (1)–(7) se snažíme zjistit jméno violoncellisty.

Nejprve k našim podmínkám přidejme předpoklad „Není pravda, že violoncellista se nejmenuje Josef.“ Podle pravidla, že dvojitou negaci můžeme vynechat, je z našeho systému dokazatelné, že violoncellista se jmenuje Josef. Podle podmínky (2) violoncellista Josef obdivuje Haška, což je ve sporu s předpokladem (5).

$^{u26)}$ Z předchozího příkladu (nahrazením výrokové proměnné p formulí $\neg p$) dostaneme $\vdash \neg\neg\neg p \to \neg p$; z našeho systému předpokladů je tudíž dokazatelná jak formule p, tak také formule $\neg p$. Důkaz sporem aplikujte na formuli $\neg\neg\neg p$, čímž obdržíte $p \vdash \neg\neg p$ a poté užijte důkaz dedukcí.

$^{u26)}$ K prokázání spornosti uvedeného systému užijte výsledek příkladu 11 a trojnásobně modus ponens. Poté z důkazu sporem obdržíme $(p \to q)$, $(p \to \neg q) \vdash \neg p$ a na závěr stačí využít dvakrát důkaz dedukcí.

$^{u28)}$ Systém předpokladů $\neg q \to \neg p, p, \neg q$ je sporný, důkaz sporem aplikujte na formuli $\neg q$; získáte $\neg q \to \neg p, p \vdash q$ a následně použijte dvakrát důkaz dedukcí aplikovaný nejprve na formuli p a poté na formuli $\neg q \to \neg p$.

Nyní použijeme důkaz sporem a nahlédneme, že ze systému předpokladů (1)–(7) je dokazatelné „Violoncellista se nejmenuje Josef.“. Zcela analogickou úvahu provedeme ještě o jménu František: K předpokladům (1)–(7) přidáme předpoklad „Není pravda, že violoncellista se nejmenuje František.“ a užitím pravidla, že dvojitou negaci můžeme vynechat, a důkazu sporem dokážeme, že violoncellista se nejmenuje František — v důsledku podmínek (4) a (6). Navíc tatáž pravidla spolu s podmínkou (1) vyloučí, aby se jmenoval Pavel. Dokázali jsme, že violoncellista se jmenuje Antonín, protože pro něho jiné jméno nezbývá.

Velice podobné úvahu použijeme ke zjištění jména violisty: Nejprve — užívajíce pravidlo, že dvojitou negaci lze vynechat — ukážeme, že podmínky (1)–(7) spolu s předpokladem „Není pravda, že violista se nejmenuje Pavel“ vytvářejí sporný systém předpokladů, z čehož vyvodíme, že violista se nejmenuje Pavel — v důsledku (1). K vyloučení možnosti, že violista se jmenuje Josef použijeme podmínky (2) a (3), předpoklad „Není pravda, že violista se nejmenuje Josef“ a opět pravidlo „dvojitou negaci lze vynechat“ a důkaz sporem. Navíc se violista nemůže jmenovat ani Antonín, protože to je jméno violoncellistovo (při podrobnějším dokazování nám nezbude než se znovu odvolat na neustále používané principy, že dvojitou negaci lze vynechat, a na důkaz sporem). Pročež violista se jmenuje František a následně Josef hraje na basu (1).

Příklad 12. Neexistuje racionální číslo, jehož druhá mocnina by byla číslo 2.

Pro důkaz sporem předpokládejme, že takové číslo existuje, a představme si ho ve tvaru p/q, kde p a q jsou nesoudělná přirozená čísla (a $q \neq 0$). Pak $p^2/q^2 = (p/q)^2 = 2$, tj. $p^2 = 2q^2$. Číslo p^2 je sudé. Z aritmetiky použijeme, že v takovém případě musí být sudé rovněž samotné číslo p, takže p musí být tvaru$2r$ pro vhodné přirozené číslo r. Uvedené dále zaručí $4r^2 = (2r)^2 = p^2 = 2q^2$, neboli $2r^2 = q^2$. Pročež číslo q^2 a následně také číslo q jsou sudá. Z našeho systému je proto dokazatelný jak výrok „p a q jsou nesoudělná“, kterýžto je předpokladem o číslech p, q, tak také výrok „p a q jsou soudělná“ (obě jsou dělitelná číslem 2), tzn. systém předpokladů s jediným předpokladem „Existuje racionální číslo, jehož druhá mocnina je rovna 2.“ je sporný. Podle principu „dvojitou negaci lze vynechat“ je sporný rovněž systém předpokladů s jediným předpokladem „Není pravda, že neexistuje racionální číslo, jehož druhá mocnina by byla číslo 2.“ Nyní použijeme princip důkazu sporem a obdržíme dokazatelnost tvrzení „Neexistuje racionální číslo, jehož druhá mocnina by byla číslo 2.“.

Příklad 13. Ve výrokovém počtu dokažme formuli $(\mathsf{p} \to \mathsf{q}) \to (\neg\mathsf{q} \to \neg\mathsf{p})$ nazývanou zákonem transpozice.

Formule $(\neg\neg\mathsf{p} \to \neg\neg\mathsf{q}) \to (\neg\mathsf{q} \to \neg\mathsf{p})$ je případem axiomu **VP3** (vzniklým nahrazením $\mathcal{P}$ formulí $\neg\mathsf{p}$ a nahrazením $\mathcal{Q}$ formulí $\neg\mathsf{q}$). Takže uvedená formule je dokazatelná ve výrokovém počtu.

Přijměme předpoklad $\mathsf{p} \to \mathsf{q}$. Podle výsledku příkladu 11 víme, že formule $\neg\neg\mathsf{p} \to \mathsf{p}$ je dokazatelná. Užijeme-li náš předpoklad a tranzitivitu implikace, získáme dokazatelnost $\neg\neg p \to q$ z našeho předpokladu. Naprosto analogicky uvážíme-li dokazatelnost formule $q \to \neg\neg q$ (úloha 26 a důkaz nahrazením) a předchozí dokazatelnost, získáme z našeho předpokladu pomocí tranzitivity implikace formuli $\neg\neg p \to \neg\neg q$. Prokázali jsme dokazatelnost $p \to q \vdash \neg\neg p \to \neg\neg q$, takže při užití důkazu dedukcí získáme $\vdash (p \to q) \to (\neg\neg p \to \neg\neg q)$.

Pokud aplikujeme tranzitivitu implikace na výsledky předchozích dvou odstavců, nahlédneme požadovanou dokazatelnost implikace $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$ ve výrokovém počtu.

V předchozím příkladu jsme nahlédli dokazatelnost zákona transpozice, tj. formule $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$ ve výrokovém počtu. Obrácení zákona transpozice, tzn. formuli $(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$ jsme přijali dokonce jako axiom **VP3.** Již jsme zmínili, že správnost obou těchto formulí uvádí již Aristotelés v [A2]; dodejme však nyní, že tamtéž také zdůrazňuje *nesprávnost* implikace $(p \to q) \to (\neg p \to \neg q)$ (viz úlohu 14).

Ve vyvození z příkladu 13 byl nejrozsáhlejší prostřední odstavec, který ukazoval, že z předpokladu $p \to q$ je dokazatelná formule $\neg\neg p \to \neg\neg q$. Přitom principy „dvojitou negaci lze vynechat“ a „dvojitou negaci lze přidat“ spolu dohromady vyjadřují, že formule p je „stejně silná“ jako formule $\neg\neg p$. Pokud bychom věděli, že „stejně silné“ formule můžeme libovolně zaměňovat (což je intuitivně zcela přirozené), aplikovali bychom tento princip a nemuseli bychom užít úvah uvedených v citovaném odstavci. Dokazovací princip tohoto druhu bude vysloven v příštím paragrafu pod názvem „důkaz ekvivalencí“. Uvědomme si, že nahrazovaná část formule může být „zabudovaná hluboko“ v uvažované formuli. Naše úvahy v odstavci, na který se neustále odoláváme, byly možné jen proto, že nahrazovaná formule byla v prvém případě prostě antecedentem (závěrečné) implikace a v druhém případě konsekventem (závěrečné) implikace. Avšak princip, který hodláme vyslovit v následujícím paragrafu, umožní dokonce nahrazení „libovolně hluboko“ ve formuli.

Z implikace $p \to q$ jsme vyvodili implikaci $\neg q \to \neg p$. Takže z implikace $p \to q$ a $\neg q$ vyvodíme[34] $\neg p$ (užitím modus ponens na formuli $\neg q \to \neg p$).

Naproti tomu při pravdivé implikaci $p \to q$ a pravdivé formuli $\neg p$ může být q pravdivé i nepravdivé a zcela analogicky při pravdivé implikaci $p \to q$ a pravdivé formuli q může být p pravdivé i nepravdivé (ověřte si v tabulce 2). Abychom si tato fakta lépe zapamatovali, shrneme je do čtyř tvrzení:

Z implikace $p \to q$ a z formule p můžeme vyvodit formuli q (modus ponens);
Z implikace $p \to q$ a z formule $\neg p$ nemůžeme vyvodit ani formuli q ani formuli $\neg q$;
Z implikace $p \to q$ a z formule q nemůžeme vyvodit ani formuli p ani formuli $\neg p$;
Z implikace $p \to q$ a z formule $\neg q$ můžeme vyvodit formuli $\neg p$ (modus tollens).

*

[34] Toto odvozovací pravidlo se nazývá **modus tollens**.

V tomto paragrafu již zbývá uvést jediné dodatečné odvozovací pravidlo.

Důkaz neutrální formulí. Jestliže z předpokladu $\mathcal{T}, \mathcal{A}$ dokážeme formuli $\mathcal{B}$ a současně z předpokladu $\mathcal{T}, \neg\mathcal{A}$ dokážeme tutéž formuli $\mathcal{B}$, je formule $\mathcal{B}$ dokazatelná už ze systému předpokladů $\mathcal{T}$ samotného.

Příklad 14. Ukažme, že pokud alespoň jedno z přirozených čísel n a $n+1$ je sudé, je sudé alespoň jedno z čísel $n+1, n+2$. (Následně indukcí lze dokázat, že pro libovolné přirozené číslo n je alespoň jedno z čísel $n, n+1$ sudé.)

Jestliže n je sudé, tj. je tvaru $2k$ pro nějaké přirozené číslo k, je rovněž číslo $n+2 = 2k+2 = 2(k+1)$ sudé (z aritmetiky používáme zákon distributivity) a toto číslo se ve dvojici $n+1, n+2$ vyskytuje.

Není-li n sudé (tzn. je-li liché), musí být podle předpokladu sudé číslo $n+1$, které se ve dvojici $n+1$, $n+2$ vyskytuje.

Na závěr použijeme důkaz neutrální formulí, přičemž úlohu formule $\mathcal{A}$ z formulace tohoto principu hraje výrok „Přirozené číslo n je sudé.“.

CVIČENÍ

I-1.1 Žalobce prohlásil: „Pokud je obžalovaný vinen, pak měl společníka.“ Obhájce protestuje, že to není pravda. Pomohl obhájce obžalovanému při prokazování jeho neviny?

I-1.2 Jsou zápisy (a) $(\neg\neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg(q \rightarrow p))$; (b) $)q \rightarrow p($; (c) $((p \rightarrow q) \rightarrow q \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg q))$; (d) $(p \neg \rightarrow q)$; (e) $p(\rightarrow)q$ formulemi?

I-1.3 Ukažte, že (a) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$; (b) $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$; (c) $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p$; (d) $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow q$ jsou formule výrokového počtu. Sestrojte tabulky pravdivostních hodnot těchto formulí. Je některá z nich tautologií?

I-1.4 Prokažte, že formule $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow r]$ není tautologií. Srovnejte intuitivní význam této formule a tranzitivity implikace.

I-1.5 Porcie s Bassaniem žili spokojeně a když jejich dcera dorostla, usoudila Porcie, že zkouška jejího otce vůbec nebyla špatná, a proto připravila pro svou dceru znovu tři skřínky. Dcera každému nápadníkovi prozradila, že na žádné skřínce není více než jeden nepravdivý nápis.

zlatá	stříbrná	olověná
Podobizna je ve stříbrné skřínce.	Podobizna není v této skřínce.	Podobizna není v této skřínce.
Portrétista je z Benátek.	Podobizna je ve zlaté skřínce.	Portrétista je z Florencie.

Jak budete volit?

I-1.6 Protože však Porciina dcera chtěla mít co největší jistotu o inteligenci nápadníka, připravila sama také tři skřínky a nápadníka, který vyřešil matčin úkol, zavedla ještě ke svým třem skřínkám a nyní mu oznámila, že na jedné skřínce jsou oba nápisy pravdivé, na druhé oba nepravdivé a na poslední jeden pravdivý a druhý nepravdivý.

zlatá	stříbrná	olověná
Podobizna není ve stříbrné skřínce.	Podobizna není v této skřínce.	Podobizna je v této skřínce.
Podobizna je v olověné skřínce.	Podobizna je ve zlaté skřínce.	Podobizna je ve stříbrné skřínce.

Kterou skřínku vyberete teď?

I-1.7 Porciina dcera zvažovala také úlohu s téměř stejnými nápisy jako v předchozí zkoušce

zlatá	stříbrná	olověná
Podobizna není ve stříbrné skřínce.	Podobizna není v této skřínce.	Podobizna není v této skřínce.
Podobizna je v olověné skřínce.	Podobizna je ve zlaté skřínce.	Podobizna je ve stříbrné skřínce.

a se zadáním, že na jediné skřínce jsou oba nápisy nepravdivé. Jak byste řešili tuto úlohu?

V následujících čtyřech cvičeních je každý z bratří buďto notorický lhář nebo vždy mluví pravdu.

I-1.8 Jednoho ze tří bratří se zeptáte „Kolik je mezi vámi pravdomluvných?“ Odpovědi nerozumíte, ptáte se proto druhého, co říkal bratr. Druhý odpoví: „Bratr říkal, že je mezi námi jediný pravdomluvný.“ Avšak třetí bratr tvrdí: Nevěřte druhému, ten lže. Kdo jsou druzí dva bratři?

I-1.9 První ze tří bratří řekne: „Všichni jsme lháři.“ a druhý odporuje: „Právě jeden z nás je pravdomluvný.“. Kdo jsou tito bratři? Umíte určit, kdo budou bratři, jestliže v odpovědi druhého nahradíme slovo „pravdomluvný“ slovem „lhář“?

I-1.10 Zeptáte se jednoho ze dvou bratří: „Je mezi vámi pravdomluvný?“ On odpoví, vy rozumíte a hned znáte správnou odpověď na svou otázku. Kdo jsou tito dva bratři? — Úloha má opravdu jednoznačné řešení. — Návod: klíčem jsou slova „hned znáte správnou odpověď“.

I-1.11 Jedinou otázkou (na kterou je odpověď ano–ne) položenou jednomu ze dvou bratří máte zjistit zda druhý bratr je pravdomluvný.

I v následujících čtyřech cvičeních jeden každý bratr buďto vždy mluví pravdu, nebo vždy pravdu nemluví. V těchto cvičeních se jedná o tvrzení vzniklá implikací a většina z nich je převzata z knihy [Sm].

I-1.12 Jeden ze dvou bratrů prohlásí: „Jsem-li pravdomluvný, je pravdomluvný i můj bratr.“. Kdo jsou tito bratři?

I-1.13 První z bratří řekne: „Jsem-li pravdomluvný, dva a dva jsou …“. Poslednímu slovu bohužel nebylo rozumět; uměl byste ho doplnit a rozhodnout zda mluvící je pravdomluvný, nebo lhář? Druhý naopak vyhlásí „Jestliže jsem lhář, „dva a dva jsou …““. Poslední slovo jste zase nezachytil, avšak váš společník tvrdí, že to bylo buďto tři nebo čtyři. Umíte určit, které z těch dvou slov to bylo a zda druhý bratr je pravdomluvný, nebo lhář? Teprve třetí bratr mluvil zřetelně a uvedl dokonce dvě tvrzení: „Je mi 18 let.“ „Je-li mi 18 let, chodím do gymnázia.“ Jste schopen vyvodit jestli je třetí bratr pravdomluvný, nebo lhář?

I-1.14 Jeden ze dvou bratrů pronese: „Je-li můj bratr pravdomluvný, jsem lhář.“ Kdo jsou tito bratři?

I-1.15 První ze tří bratří prohlásí: „Druhý bratr je pravdomluvný.“ a druhý dodá: „Pokud je první bratr pravdomluvný, je pravdomluvný i třetí.“ Kdo jsou tito bratři?

I-1.16 Do zoo ve Dvoře Králové, Olomouci, Brně a Praze přijíždějí čtyři zvířata (žirafa, zebra, antilopa a velbloud). Víme:

(1) Nemíří-li velbloud do Olomouce, bude antilopa ubytována v Brně.
(2) Jede-li velbloud do Olomouce, směřuje žirafa do Prahy.
(3) Antilopa nejede do Brna.

Popište budoucí rozmístění zvířat do jednotlivých zoo.

I-1.17 Při zachování jak zadání, tak také formulace úkolu z předchozího cvičení změňme informace následovně:

(1) Nemíří-li velbloud do Prahy, nejede zebra do Brna.
(2) Nejede-li velbloud do Brna, jede antilopa do Prahy.
(3) Zebra nejede do Dvora Králové.
(4) Pokud nechystají ubytování antilopě v Praze, očekávají tam žirafu.
(5) Pokud jede zebra do Olomouce, má velbloud namířeno do Dvora Králové.

Čtyři party nestejně velkých kamarádů v následujících cvičeních jsou různé, avšak vždy je tvoří chlapci stejných křestních jmen (Petr, Tomáš a Jan) a stejných příjmení (Červený, Modrý a Bílý) a na výlety každý z nich nosí jednu z tábornických potřeb (sekerku, kotlík a stan). Poslední parta musí druhy svých výletů měnit, aby vyhověla tužbám jednotlivých kamarádů; jeden z nich je totiž vodák, druhý horolezec a třetí cyklista.

I-1.18 Údaje o první partě jsou velice jednoduché:

(1) Jan se nejmenuje Bílý.

(2) Červený nenosí stan.
(3) Modrý nosí kotlík.
(4) Petr nosí sekerku.

Jak se jmenuje celým jménem ten, kdo nosí stan?

I-1.19 O druhé partě jsme získali informace:

(1) Jan se jmenuje Bílý.
(2) Petr nosí stan.
(3) Bílý nenosí sekerku.
(4) Modrý nosí kotlík.

Umíte určit, jak se jmenuje celým jménem ten, kdo nosí sekerku?

I-1.20 O kamarádech ze třetí party víme:

(1) Tomáš je větší než ten, který nosí sekerku.
(2) Petr je menší než Červený.
(3) Modrý je větší než ten, co nosí stan.
(4) Jan není ani nejmenší ani největší.

Otázky: a) Jak velký je Bílý vzhledem k ostatním kamarádům?
b) Můžete určit, jak je velký nositel kotlíku?
c) Můžete zjistit poměrnou velikost nositele sekerky?

I-1.21 K podmínkám z předchozího cvičení přidejte podmínku

(5) Petr nenosí stan.

a za takto změněných podmínek zodpovězte znovu otázky b) a c) z předchozího cvičení.

I-1.22 O poslední partě jsme se dověděli:

(1) Vodák je větší než Bílý.
(2) Petr je menší než ten, který nosí stan.
(3) Tomáš není horolezcem.
(4) Červený je větší než Modrý.
(5) Bílý nenosí sekerku.
(6) Tomáš je menší než Bílý.

Určete celá jména jednotlivých kamarádů, jejich oblíbené činnosti, poměrnou velikost a tábornické potřeby, které nosí.

V následujících třech cvičeních se jedná o tři trojice různě starých studentek stejných jmen (Jana, Eva a Marie), z nichž má každá ráda jiný předmět (matematiku, angličtinu a dějepis) a má jinou barvu vlasů (černou, hnědou a světlou).

I-1.23 O první trojici studentek jsme se dověděli:

(1) Eva nemá černé vlasy.
(2) Má-li Jana ráda dějepis, preferuje černovláska angličtinu.
(3) Nemá-li milovnice matematiky černé vlasy, má Marie vlasy hnědé.

(4) Jana nemiluje angličtinu.

Umíte určit oblíbené předměty a barvy vlasů Evy a Jany?

I-1.24 O druhé trojici studentek víme:

(1) Marie nemá ráda slunečnice.
(2) Jestliže má Marie ráda dějepis, je černovlasá.
(3) Matematiku i slunečnice miluje jedna a táž studentka.
(4) Má-li Jana v lásce dějepis, je oblíbeným předmětem Marie matematika.
(5) Nemiluje-li jedna studentka angličtinu i růže, má ráda matematička kopretiny.
(6) Nemá-li černovláska ráda růže, nemá milovnice slunečnic hnědé vlasy.
(7) Jana nemá v oblibě matematiku.

Uveďte oblíbené předměty a květiny, barvy vlasů jednotlivých dívek.

I-1.25 Můžete zjistit na základě informací

(1) Je-li oblíbeným předmětem černovlásky dějepis, jmenuje se Marie.
(2) Jana nemá světlé vlasy.
(3) Milovnice dějepisu je mladší než obdivovatelka matematiky.
(4) Světlovláska je starší než milovnice růží.
(5) Eva neobdivuje kopretiny.
(6) Matematička není ani nejmladší ani nejstarší
(7) Dává-li světlovláska přednost angličtině, miluje černovláska slunečnice.
(8) Milovnice růží nemá hnědé vlasy.

oblíbené předměty a květiny, barvy vlasů a pořadí narození jednotlivých dívek?

V každém z následujících třech cvičení se jedná o jinou skupinu milovníků umění, avšak vždy se jmenují Josef, Antonín, František a Pavel, hrají na různé nástroje (housle, violu, violoncello a basu), přou se o své oblíbené autory (Čapka, Haška, Kunderu a Seiferta) i o oblíbené impresionistické malíře (van Gogha, Gauguina, Moneta a Cézanna) a dokonce každý z nich má i svůj nejoblíbenější stavební sloh (románský, gotický, renesanční a barokní).

I-1.26 První skupina milovníků umění se postavila při hře do kruhu. Kromě informací o nástroji a oblíbeném spisovateli toho kterého milovníka umění nyní známe i některé údaje o prostorovém rozmístění:

(1) František je obdivovatelem Čapka.
(2) Violista preferuje Haška
(3) Josef nemá rád Kunderu.
(4) Pavel nehraje na basu.
(5) Vedle sebe jsou: (a) František a houslista,
(b) basista a milovník Čapka,
(c) Antonín a obdivovatel Kundery,

Na který nástroj hraje Pavel a kdo je jeho oblíbený spisovatel? Jsou vlastnosti milovníků umění zadány našimi podmínkami jednoznačně?

I-1.27 Poznatky získané o druhé skupině milovníků umění:

(1) Houslista má rád Kunderu.
(2) František nehraje na basu.
(3) Milovník Gauguina miluje i románský sloh.
(4) Haška i Moneta obdivuje táž osoba.
(5) Milovník Cézanna nemá rád Kunderu
(6) Antonín má nejraději baroko.
(7) Pavel miluje Seifertovy verše.
(8) František obdivuje Cézanova zátiší.
(9) Violista má rád van Gogha.
(10) Milovník gotiky není příznivcem Cézanna.

Na který nástroj hraje Antonín a kterého spisovatele, impresionistu a sloh má nejraději?

I-1.28 O třetí skupině milovníků umění, kteří hráli v řadě, jsme se dověděli:

(1) Antonín hraje na basu.
(2) Pavel nehraje na violu.
(3) Čapka i gotiku má rád týž hudebník.
(4) Moneta a baroko nemá rád týž hudebník.
(5) Houslista nemiluje renesanci.
(6) Violoncellista dává přednost Seifertovi.
(7) Milovník Čapka stojí vlevo hned vedle milovníka van Gogha.
(8) Hudebník zanícený pro renesanci stojí vlevo od milovníka baroka.
(9) Houslista stojí vlevo hned vedle obdivovatele Cézana.
(10) Obdivovatel Moneta stojí vpravo hned vedle čtenáře Haška.
(11) Violista stojí vpravo od Josefa.
(12) Milovník Kundery nestojí nejvíce vlevo.

Určete na který nástroj hraje a kterému spisovateli, slohu a impresionistovi dává přednost ten který milovník umění. Změní se řešení, jestliže přidáme do osmé nebo jedenácté podmínky slovo „hned“?

Patří k nejobtížnějším v tomto paragrafu, proto uvedeme návod možného začátku řešení. — Potřebujete ho však nezbytně? — Opravdu? — Návrh jak určit nástroje jednotlivých hudebníků: Poměrně jednoduše zjistíte, na který nástroj hraje František, a kterého spisovatele má nejraději houslista. To vám umožní zjistit, kterého spisovatele obdivuje hudebník stojící nejvíce vpravo, a následně jméno houslistovo.

I-1.29 Ve výrokovém počtu dokažte formuli $[\mathsf{p} \to (\mathsf{q} \to \mathsf{r})] \to [\mathsf{q} \to (\mathsf{p} \to \mathsf{r})]$ zachycující jistou komutativitu svázanou s implikací (tj. možnost zaměnit pořadí výrokových proměnných p a q); implikace sama komutativní pochopitelně není (význam implikace se může lišit od významu jejího obrácení).

I-1.30 Vyvoďte formuli $p \to (\neg p \to q)$ ze zákona Dunse Scota. Návod: použijte důkaz nahrazením, výsledek úlohy 26 a tranzitivitu implikace.

I-1.31 Ve výrokovém počtu dokažte formuli $(q \to r) \to \big((\neg p \to r) \to [(p \to q) \to r]\big)$. Návod: uvažte jednak systém předpokladů $(q \to r), (\neg p \to r), (p \to q), p$ a jednak systém $(q \to r), (\neg p \to r), (p \to q), \neg p$. Použijte důkaz neutrální formulí a na závěr důkaz dedukcí.

I-1.32 Důkaz dedukcí je jakousi implikací zaručující, že z dokazatelnosti $\mathfrak{T}, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$ plyne $\mathfrak{T} \vdash \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Je možno tuto implikaci obrátit, tj. prokázat, že z dokazatelnosti $\mathfrak{T} \vdash \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ plyne $\mathfrak{T}, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$?

I-1.33 Také důkaz sporem je jakousi implikací: ze spornosti systému předpokladů $\mathfrak{T}, \neg\mathcal{A}$ vyvozujeme dokazatelnost formule $\mathcal{A}$ ze systému předpokladů $\mathfrak{T}$. Znovu má smysl se ptát, zda tuto implikaci můžeme obrátit: můžeme z dokazatelnosti formule $\mathcal{A}$ ze systému předpokladů $\mathfrak{T}$ vyvodit spornost systému předpokladů $\mathfrak{T}, \neg\mathcal{A}$?

V následujících třech úlohách jsou obyvatelé pěti domů různých barev (bílý, žlutý, červený, modrý a zelený) různých národností (Angličan, Švéd, Nor, Dán a Němec), chovají různá zvířata (psa, kočku, koně, ptáka a zebru) a mají jak různé oblíbené nápoje (čaj, kávu, mléko, pivo a minerálku), tak také různé oblíbené sporty (fotbal, volejbal, šachy, plavání a tenis).

I-1.34 Domy jsou uspořádány v řadě a o jejich obyvatelích jsme se dověděli:

(1) Vlevo hned vedle Nora žije pes.
(2) Dán bydlí vpravo hned vedle bílého domu.
(3) Pták je chován vlevo ob jeden dům od koně.
(4) Zebra žije vpravo ob jeden dům od červeného.
(5) Angličan má žlutý dům.
(6) Prostřední dům je zelený.
(7) Němec nebydlí v bílém domě.
(8) Kočka patří do červeného domu.

Jaké zvíře chová Nor?

I-1.35 O obyvatelích našich pěti domů teď víme (v této úloze nezáleží na prostorovém rozložení domů):

(1) Angličan žije v zeleném domě.
(2) Pes nepatří do bílého domu.
(3) Obyvatel modrého domu je fotbalista.
(4) Šachista pije nejraději kávu.
(5) Obyvatel červeného domu preferuje pivo.
(6) Obyvatel červeného domu nechová ptáka.
(7) Tenista nechová psa.
(8) Švéd chová psa.
(9) Nor pije nejraději mléko.
(10) Volejbalista chová ptáka.
(11) Dán je plavec.
(12) Nor chová zebru.
(13) Dán nemiluje pivo.
(14) Obyvatel zeleného domu odmítá čaj.

První otázka zní: Kdo nejraději pije minerálku a jaké má další vlastnosti? Je-li více možností, uveďte všechny.
Vaším druhým úkolem je zjistit, kdo chová koně a jaké má další vlastnosti. Je-li více možností, uveďte všechny.

I-1.36 Závěrečné cvičení je variantou hádanky někdy označované jako „Einsteinův kvíz“. Nyní kromě následujících informací navíc víme, že domy jsou uspořádány v řadě:

(1) Angličan žije v červeném domě.
(2) Zelený dům stojí ihned nalevo od bílého.
(3) Obyvatel zeleného domu preferuje kávu.
(4) Fotbalista žije ve žlutém domě.
(5) Obyvatel prostředního domu pije mléko.
(6) Šachista žije vedle chovatele kočky.
(7) Nor bydlí vedle modrého domu.
(8) Švéd chová psa.
(9) Dán pije nejraději čaj.
(10) Plavec má nejraději pivo.
(11) Volejbalista chová ptáka.
(12) Nor bydlí v domě nejvíce vlevo.
(13) Chovatel koně bydlí vedle fotbalisty.
(14) Němec hraje tenis.

Odpovězte na otázku: „Kdo chová zebru?“.

Poznamenejme, že běžně se tato úloha zadává ještě s podmínkou „Soused šachisty pije nejraději minerálku.“, která je však nadbytečná. Pokud byste měli obtíže při řešení, použijte tuto informaci.

§2

DALŠÍ LOGICKÉ OPERACE VÝROKOVÉHO POČTU

V prvém paragrafu jsme vytvářeli složené výroky jen pomocí negace a implikace. Úkolem tohoto paragrafu je popsat i jiné běžné způsoby sestrojení složených výroků. V citovaném paragrafu jsme viděli, že s uvedenými způsoby konstrukce vystačíme, avšak pro aplikace (včetně užití v matematice) je vhodnější uvažovat více způsobů konstrukce. Pro logiku samotnou je tudíž tento paragraf méně důležitý než pro její aplikace. (Z hlediska aplikací logiky vyniká zejména důkaz rozborem případů; z pohledu dějin logiky jsou důležité níže uvedené formule (i)–(iv).)

V předchozím paragrafu jsme se seznámili se dvěma **logickými operacemi** — negací a implikací. První z nich je unární (negaci aplikujeme na jedinou formuli výrokového počtu); implikace je operací binární (je aplikována na uspořádanou dvojici formulí). Dalšími běžnými logickými operacemi jsou konjunkce, disjunkce a ekvivalence, které budou popsány v tomto paragrafu. Některými méně běžnými logickými operacemi (Shefferovou a Peirceovou) se budeme zabývat v dodatku k výrokovému počtu. Všechny uvedené dodatečné operace jsou binární. (V predikátovém počtu poznáme další typ logických operací — kvantifikace.)

Před popisem dalších způsobů spojování výroků je vhodné si uvědomit několik skutečností o vztahu běžného a formálního jazyka.

Zcela zřejmý, ale podstatný, je rozdíl mezi běžným a formalizovaným jazykem spočívající v míře neurčitosti. Slova v češtině (ani v jiném přirozeném jazyce) nejsou zcela jednoznačná; mluvené slovo je doplňováno důrazem, mimikou atd., což umožňuje porozumět, co řečník míní; rozhodující pro pochopení však bývá celkový kontext. Pro běžný jazyk je jistá míra neurčitosti vítaná, dodává mu půvabu a umožňuje plodné asociace. Naproti tomu formální jazyk musí být zcela přesný (např. negaci výroku jsme v §1 přiřadili pravdivostní hodnotu na základě pravdivostní hodnoty původního výroku zcela jednoznačně).

Přirozený jazyk je také velmi bohatý; při jeho formalizaci (matematizaci) stačí vybrat jen některé obraty vytvářející z tvrzení nová složitější tvrzení a další způsoby vytváření složitějších tvrzení již vyjadřujeme jen s jejich pomocí. Při matematizaci se tak potýkáme se dvěma problémy: vybrat obraty běžného jazyka, které budeme matematizovat (o možnostech volby si více řekneme v dodatku k výrokovému počtu) a určit jejich přesný formální význam (při matematizaci obratů spojujících výroky musíme např. pro sémantický popis zadat základní tabulky pravdivostních hodnot).

Obvykle se za vhodné pro matematizaci pokládají — kromě negace a implikace zkoumaných v §1 — následující obraty běžného jazyka (popřípadě jazyka matematiky):

(1) „… a …“, „… i …“, „… a zároveň …“ (případně z latiny převzaté „… et …“) formalizujeme **konjunkcí,** při jejím zápisu budeme používat symbolu[1)] &,

(2) „… nebo …“ (případně z latiny přijaté „… vel …“) bude formalizováno **disjunkcí,** při použití symbolu $\vee$,

(3) „…, právě když …“, „… tehdy a jen tehdy, když …“, „… je nutnou a postačující podmínkou pro …“, „… je ekvivalentní s …“ budeme formalizovat **ekvivalencí** (někdy se také používá slovní spojení *oboustranná implikace*), přitom používáme znaku[2)] $\equiv$.

Znaky používané k označení negace, implikace, konjunkce, disjunkce a ekvivalence formulí (tzn. symboly $\neg, \rightarrow, \&, \vee, \equiv$) se nazývají **logické** (též *výrokové*) **spojky.**

Již jsme zmínili, že v běžném jazyce nejsou uvedené obraty (a ani implikace vyšetřovaná v §1) chápány ve všech situacích stejně. Často uváděným příkladem nejednoznačnosti běžného jazyka je spojka „nebo“, kterou někdy používáme ve vylučovacím smyslu, ale běžně nikoli. Při běžném chápání tedy považujeme za pravdivý i případ, platí-li oba členy. Podrobněji: výrok „Byl tam Petr nebo (tam byl) Pavel.“ chápeme jako pravdivý, jestliže tam byl Petr (a nikoli Pavel), nebo tam byl Pavel (a ne Petr), a nebo tam byli oba; za nepravdivý náš výrok označíme pouze v případě, že tam ani jeden z nich nebyl. Naproti tomu při emocionálním zvolání „Buď tu budu já, nebo ten pes!“ vylučujeme, že můžeme zůstat oba. V souhlase s obvyklejším přístupem budeme pokládat disjunkci za nepravdivou pouze, jsou-li nepravdivé *oba* její členy[3)].

Chápání konjunkce a ekvivalence snad nebude činit potíže — konjunkce je pravdivá, právě když jsou pravdivé *oba* její členy (takto ji chápali již Stoikové) a ekvivalence je pravdivá, jestliže její členy jsou buďto oba pravdivé, nebo oba nepravdivé.

Popsané pojetí pravdivosti zkoumaných spojek můžeme shrnout do **základních tabulek pravdivostních hodnot** pro konjunkci, disjunkci a ekvivalenci. (Srovnej základní tabulky pravdivostních hodnot 1 a 2 pro negaci a implikaci v §1.)

p	q	p & q	p ∨ q	p ≡ q
0	0	0	0	1
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Tabulka 1

Po rozšíření systému logických operací se musíme dohodnout, že i nově přidané operace vytvářejí složené výroky a upravit bod (b) konstrukce formulí výrokového počtu (viz §1) na bod

1) Někdy se pro označení konjunkce používá též symbolu $\wedge$.

2) Používají se též znaky $\Leftrightarrow$ nebo $\leftrightarrow$.

3) Stoikové vyšetřovali více forem disjunkce, mezi nimi také námi zvolenou.

(b′) jestliže $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ jsou formule výrokového počtu, jsou formulemi výrokového počtu také z nich vytvořená implikace $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$, konjunkce $(\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B})$, disjunkce $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ a ekvivalence $(\mathcal{A} \equiv \mathcal{B})$.

Na rozdíl od implikace nezávisí podle první tabulky tohoto paragrafu hodnoty konjunkce (analogicky disjunkce a ekvivalence) na pořadí formulí v ní se vyskytujících[4], a proto mluvíme o **složkách** konjunkce, disjunkce a ekvivalence, někdy též o **konjunktech** resp. **disjunktech**.

V prvním paragrafu jsme prohlásili, že pro matematizaci postačuje používat ze spojek běžného jazyka pouze implikaci a negaci. Vyhlásili jsme tudíž, že konjunkci, disjunkci a ekvivalenci můžeme vyjádřit pomocí spojek uvedených v prvním paragrafu. Pokud vás, vážený čtenáři, uspokojí výpočty, pak postačuje ke konjunkci, disjunkci a ekvivalenci nalézt takové formule užívající pouze implikaci a negaci, jejichž tabulky pravdivostních hodnot se liší od tabulky 1 pouze záhlavím. Měl byste proto být uspokojen vyřešením následující úlohy. Pokud však, vážený čtenáři, toužíte i po intuitivním vysvětlení volby formulí, naleznete ho po vyřešení první úlohy.

Úloha 1. Ukažte, že pouze záhlavím se liší základní tabulka pravdivostních hodnot konjunkce $\mathsf{p} \,\&\, \mathsf{q}$ od tabulky pravdivostních hodnot formule $\neg(\mathsf{p} \to \neg\mathsf{q})$, a podobně že pouze záhlavím se liší tabulky pravdivostních hodnot disjunkce $\mathsf{p} \vee \mathsf{q}$ a formule $\neg\mathsf{p} \to \mathsf{q}$ a rovněž tabulky pravdivostních hodnot ekvivalence $\mathsf{p} \equiv \mathsf{q}$ a formule $(\mathsf{p} \to \mathsf{q}) \,\&\, (\mathsf{q} \to \mathsf{p})$.

První úloha naznačuje algoritmus převádějící formule s dodatečnými operacemi na formule, které obsahují pouze negaci a implikaci. Nahradíme-li ve formuli výrokového počtu její části $(\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ a $(\mathcal{A} \equiv \mathcal{B})$ s dodatečnými operacemi po řadě formulemi $\neg(\mathcal{A} \to \neg\mathcal{B})$, $(\neg\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ a $\neg[(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to \neg(\mathcal{B} \to \mathcal{A})]$, dostaneme formuli výrokového počtu, jejíž tabulka pravdivostních hodnot se liší pouze záhlavím od tabulky pravdivostních hodnot původní formule. Například formuli $(\mathsf{p} \,\&\, \mathsf{q}) \to (\mathsf{p} \vee \mathsf{q})$ zapíšeme bez použití konjunkce a disjunkce (poněkud složitějším a méně přehledným) zápisem $\neg(\mathsf{p} \to \neg\mathsf{q}) \to (\neg\mathsf{p} \to \mathsf{q})$, nicméně tabulky pravdivostních hodnot těchto formulí se liší pouze záhlavím.

4) Zde je namístě ještě jednou zdůraznit, že logika popisuje z běžného chápání významu spojek hlavní proud a *vědomě* zanedbává drobnější významové odstíny, které v tom kterém případě zaznamenáváme při skutečném užití jazyka. Například věty „Upadl a vstal.“ a „Vstal a upadl.“ jsou významově odlišné, protože do nich automaticky vložíme časové hledisko, které při většinovém chápání spojky „a“ neuplatňujeme.

*u*1)

p	q	$\neg\mathsf{p}$	$\neg\mathsf{q}$	$\mathsf{p}\to\neg\mathsf{q}$	$\neg(\mathsf{p}\to\neg\mathsf{q})$	$\neg\mathsf{p}\to\mathsf{q}$	$\mathsf{p}\to\mathsf{q}$	$\mathsf{q}\to\mathsf{p}$	$(\mathsf{p}\to\mathsf{q}) \,\&\, (\mathsf{q}\to\mathsf{p})$
0	0	1	1	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	1	1	1	1

Tabulka A

Pokud naopak nahrazujeme ve formulích všechny zápisy tvaru $\neg(\mathcal{A} \to \neg\mathcal{B})$, $\neg\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ a $\neg[(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to \neg(\mathcal{B} \to \mathcal{A})]$ po řadě zápisy $\mathcal{A}$ & $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ a $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, dostáváme přehledněji zapsané formule, avšak za cenu užití dodatečných operací.

Pokusme se teď popsat intuici, stojící za uvedeným vyjádřením disjunkce, konjunkce a ekvivalence. Disjunkce vyjadřuje, že platí alespoň jeden z jejích členů. Pročež neplatnost prvního z nich implikuje platnost druhého. Takže $\mathsf{p} \vee \mathsf{q}$ vyjádříme pomocí $\neg\mathsf{p} \to \mathsf{q}$.

Abychom pochopili, že i vyjádření konjunkce je ve své podstatě jednoduché, zkoumejme nejprve vyjádření konjunkce pomocí disjunkce. To, že nenastane p & q znamená, že alespoň jeden ze členů p, q neplatí, tzn. $\neg(\mathsf{p}$ & $\mathsf{q})$ lze vyjádřit pomocí $\neg\mathsf{p} \vee \neg\mathsf{q}$ (vztah se nazývá de Morganovým pravidlem a ještě o něm pojednáme níže). Konjunkci p & q můžeme proto vyjádřit pomocí $\neg(\neg\mathsf{p} \vee \neg\mathsf{q})$ a užívajíce vyjádření disjunkce z předchozího odstavce, pak také pomocí $\neg(\neg\neg\mathsf{p} \to \neg\mathsf{q})$. Následně možnost vypuštění i přidání dvojité negace přinese vyjádření p & q pomocí $\neg(\mathsf{p} \to \neg\mathsf{q})$. Po podrobnějším probrání shledáme i vyjádření konjunkce celkem přirozené, i když se to na první pohled tak nejeví.

Vyjádření ekvivalence $\mathsf{p} \equiv \mathsf{q}$ jako konjunkce dvou implikací $\mathsf{p} \to \mathsf{q}$ a $\mathsf{q} \to \mathsf{p}$ je všeobecně známo.

Úloha 2. Zjistěte, jak se liší tabulky pravdivostních hodnot formule $(\mathsf{p}$ & $\mathsf{q})$ & r a formule p & $(\mathsf{q}$ & $\mathsf{r})$. Analogicky hledejte rozdíl mezi pravdivostními hodnotami formulí $(\mathsf{p} \vee \mathsf{q}) \vee \mathsf{r}$ a $\mathsf{p} \vee (\mathsf{q} \vee \mathsf{r})$.

Úloha 3. Sestrojte základní tabulku pravdivostních hodnot pro vylučující disjunkci[5)], tzn. nalezněte jednoduchou formuli vybudovanou pomocí negace a jedné z operací zkoumaných v tomto paragrafu, jejíž tabulka pravdivostních hodnot se od tabulky pravdivostních hodnot vylučující disjunkce liší pouze záhlavím. Pro vylučující negaci se někdy užívá symbol xor (podle anglického e**x**clusive **or**).

Podle úlohy 2 je jak konjunkce, tak i disjunkce operací asociativní. Je proto zvykem vynechávat závorky a psát např. prostě $\mathcal{A}$ & $\mathcal{B}$ & $\mathcal{C}$ místo zápisu $(\mathcal{A}$ & $\mathcal{B})$ & $\mathcal{C}$ a také místo zápisu $\mathcal{A}$ & $(\mathcal{B}$ & $\mathcal{C})$. Naproti tomu implikace asociativní *není.* Poznamenejme, že ekvivalence je sice také asociativní, avšak závorky není zvykem vynechávat, vedlo by to k nejednoznačnosti čtení.

* * *

[u2)] Tabulky pravdivostních hodnot formulí se liší pouze záhlavím.

[5)] *V logice* dnes nepatří tato spojka mezi nejobvyklejší. Ve megarsko-stoické škole ji však užívali často a také při programování počítačů se s ní leckdy setkáme.

[u3)] Běžně užívanou jednoduchou formulí s tabulkou pravdivostních hodnot lišící se od tabulky pravdivostních hodnot vylučující disjunkce pouze záhlavím je zejména formule $\neg(\mathsf{p} \equiv \mathsf{q})$ nebo formule $\mathsf{p} \equiv \neg\mathsf{q}$.

Úloha 4. Porciina vnučka se při hledání ženicha rozhodla pokračovat ve vznikající rodinné tradici. Nicméně chtěla také nějak ozvláštnit své úkoly, a rozhodla se proto využívat i jiné logické operace než negaci. První úkol pro nápadníky, který vymyslela, zněl:

zlatá	stříbrná	olověná
Podobizna je v této skřínce.	Podobizna je ve zlaté skřínce.	Podobizna je ve zlaté skřínce nebo není v této skřínce.

a nápadníkovi hodlala sdělit, že přesně jeden nápis je pravdivý. Kterou skřínku zvolíte, vžijete-li se do role jejího nápadníka?

Úloha 5. Vnučka Porcie však nebyla spokojena se svou první zkouškou pro nápadníky, protože své ozvláštnění provedla jen na jedné tabulce. Navíc když se trochu zamyslela nad svým „ozvláštňujícím“ nápisem, zjistila, že se dá velice jednoduše vyjádřit bez dodatečných operací — víte jak? Nechala si proto vyrobit jiné tři tabulky (z nichž dvě byly „ozvláštněné“, viz následující úloha), avšak pyšná byla zejména na nápis „Podobizna je ve zlaté skřínce, právě když není ve stříbrné skřínce.“, o kterém byla přesvědčena, že náležitě prověří nápadníkovu inteligenci. Rozhodněte, zda se dá tento nápis vyjádřit jednodušeji nápisem „Podobizna není v olověné skřínce.“. Alternativní zápis je možno vyjádřit také „Podobizna je ve zlaté nebo stříbrné skřínce.“. Liší se obecně tabulky pravdivostních hodnot formule $\mathsf{p} \equiv \neg\mathsf{q}$ a formule $\mathsf{p} \vee \mathsf{q}$ pouze záhlavím? — Před čtením další otázky byste měli znát odpovědi na otázky již položené. — Formulovali jste již svůj názor? Vysvětlete, proč v konkrétním případě (ekvivalence formule $\mathsf{z} \equiv \neg\mathsf{s}$ a formule $\mathsf{z} \vee \mathsf{s}$ pro určité formule z a s) je odpověď „ano“ a v obecném „ne“.

Úloha 6. Nezkušená Porciina vnučka nechala nejprve tabulky zhotovit a dokonce je nechala připevnit na skřínky:

[u4] Pokud by se podobizna nacházela ve zlaté skřínce, byly by všechny nápisy pravdivé, což je zadáním vyloučeno. Kdyby byla v olověné skřínce, nebyl by pravdivý žádný z nápisů. Pročež se podobizna musí nacházet ve stříbrné skřínce — pak jsou nápisy na zlaté a stříbrné skřínce nepravdivé a nápis na olověné skřínce je pravdivý. (Při značení z §1 jsou nyní zápisy na skřínkách: $\mathsf{z}, \mathsf{z}, \mathsf{z} \vee \neg o$.)

[u5] V nápise na olověné skřínce v předchozí úloze můžeme vypustit první disjunkt, protože je-li podobizna ve zlaté skřínce, automaticky není v olověné.
První odpověď zní „ano“, pokud je podobizna ve zlaté nebo stříbrné skřínce jsou obě tabulky pravdivé, pokud je v olověné, jsou obě tabulky nepravdivé. Na druhou otázku je odpověď „ne“, hodnoty jsou různé pro ohodnocení přiřazující oběma proměnným pravdivostní hodnotu 1. Tabulky se však liší pouze pro toto ohodnocení a v případě skřínek s jednou podobiznou nemůže být podobizna současně ve dvou skřínkách, pročež při matematizaci vyloučíme ohodnocení nabývající na obou proměnných jedničku.

zlatá	stříbrná	olověná
Podobizna je ve zlaté skřínce právě když není ve stříbrné skřínce.	Podobizna je ve zlaté skřínce nebo je v této skřínce.	Podobizna je ve stříbrné skřínce.

a navíc se rozhodla, že nápadníkovi opět řekne, že přesně jeden nápis je pravdivý, a teprve po tom všem začala vymýšlet, do které skřínky má podobiznu uložit. Co zjistila?

Úloha 7. Porciina vnučka byla velice nespokojená, že její druhá zkouška nemá řešení. Bylo jí však líto všechny tabulky vyhodit. Nahlédla, že nápisy na zlaté a stříbrné skřínce vyjadřují totéž a tak ji napadlo, že by stačilo vyměnit nápis na stříbrné skřínce. Pomůžete jí nalézt alternativu nápisu na stříbrné skřínce, která při zadání, že přesně jeden nápis je pravdivý, vytvoří správně zadanou úlohu pro nápadníka?

Úloha 8. Pak však Porciinu vnučku napadlo, že by možná stačilo jen přemístit nápisy a že není třeba vytvářet jeden nový. V nápisu na stříbrné skřínce se nachází slova „této skřínce“, takže jeho přemístěním se význam změní. Poradíte změnu uspořádání nápisů, aby úloha při zadání, že přesně jeden nápis je pravdivý, měla jednoznačné řešení?

Úloha 9. Avšak ten nejlepší nápad přišel až poslední. Co kdyby všechny nápisy zůstaly zachovány na svých místech a změnilo by se pouze zadání. Poraďte

---

[u6)] Dá-li podobiznu do zlaté skřínky, budou nápisy na zlaté a stříbrné skřínce pravdivé, což je zadáním vyloučeno. Jestliže skryje podobiznu do stříbrné skřínky, budou dokonce pravdivé všechny nápisy. Schová-li podobiznu do olověné skřínky, budou všechny nápisy nepravdivé, což zadání nepřipouští. Úloha nemá řešení — zápisy na skřínkách jsou $\mathsf{z} \equiv \neg \mathsf{s}$ (ekvivalentně $\neg \mathsf{o}$), $\mathsf{z} \vee \mathsf{s}$, s.

[u7)] Tabulka musí buďto při ukrytí podobizny do zlaté skřínky být nepravdivá, nebo při schování podobizny do olověné skřínky být pravdivá — nikoli však oboje najednou. (Při uložení podobizny do stříbrné skřínky jsou nápisy na zlaté a olověné skřínce pravdivé, pročež žádná varianta nápisu na stříbrné skřínce nemůže napomoci k vhodnému zadání úlohy.) Jako možný nápis (umístěný na stříbrnou skřínku) proto přichází v úvahu např. „Podobizna je v této skřínce.“ (se současným uschování portrétu do zlaté skřínky) nebo „Podobizna není v této skřínce.“ (spolu s vložením portrétu do olověné skřínky).

[u8)] Stačí prohodit nápisy na stříbrné a olověné skřínce a dát portrét do olověné skřínky. (Pak jsou nápisy na zlaté i stříbrné skřínce nepravdivé a nápis na olověné je pravdivý; při uvažovaném prohození nápisů nelze ukrýt podobiznu do zlaté skřínky, neboť by byly nápisy na zlaté i olověné skřínce pravdivé a také nelze portrét vložit do stříbrné skřínky, protože v takovém případě by byly pravdivé nápisy na zlaté a rovněž na stříbrné skřínce.) Při prohození nápisu na zlaté a stříbrné skřínce zůstane úloha neřešitelnou. (Při schování portrétu do zlaté skřínky budou pravdivé nápisy na zlaté i stříbrné skřínce, při jeho uschování do stříbrné skřínky budou pravdivé nápisy na stříbrné a olověné skřínce a nakonec dáme-li portrét do olověné skřínky, budou všechny nápisy nepravdivé.)

vnučce Porcie, co má říci nápadníkům, aby úloha byla správně zadaná, a kam má uložit portrét.

Úloha 10. Ukažte, že řešením druhého příkladu z předcházejícího paragrafu (o bratrech na rozcestí) je také otázka užívající ekvivalenci: „Jste pravdomluvný, právě když tato cesta vede k mému cíli?“.

* * *

Po předvedení sémantiky konjunkce, disjunkce a ekvivalence obraťme teď svou pozornost k odvozovacím pravidlům pro logické operace zavedené v tomto paragrafu.

V dodatku k výrokovému počtu uvidíme, že tato odvozovací pravidla syntakticky plně charakterizují příslušné operace. K tomuto účelu konstatujme již nyní, že přípustnost užívání níže popsaných pravidel pro konjunkci, disjunkci a ekvivalenci je prokazatelná ve výrokovém počtu (ve kterém připouštíme jen $\rightarrow$ a $\neg$), jestliže užijeme algoritmu (viz úlohu 1) pro přepis formulí s novými spojkami na formule obsahující pouze $\rightarrow$ a $\neg$.

Každé z následujících odvozovacích pravidel pro dodatečné logické operace má dvě části. V první se říká, jak formuli vzniklou operací dokázat a druhá vypovídá o tom, co lze dokázat z formule vzniklé operací. Podstata jednotlivých pravidel je v symbolické formě shrnuta v tabulce 2, která bude pro čtenáře, kterému vyhovuje symbolický zápis, pravděpodobně přehlednější než nejprve uváděné slovní vyjádření.

Odvozovací pravidla pro konjunkci:

(a) **Důkaz konjunkce:** *K dokázání konjunkce postačuje dokázat oba její členy;* podrobněji: jestliže ze systému předpokladů $\mathfrak{T}$ dokážeme jak formuli $\mathcal{A}$, tak i formuli $\mathcal{B}$, dokážeme tím z předpokladů $\mathfrak{T}$ rovněž formuli $\mathcal{A}$ & $\mathcal{B}$.

(b) **Důkaz užitím konjunkce:** *Z konjunkce vyvodíme kterýkoli její člen;* podrobněji: jestliže z předpokladů $\mathfrak{T}$ dokážeme formuli $\mathcal{A}$ & $\mathcal{B}$, pak tím z předpokladů $\mathfrak{T}$ dokážeme jak formuli $\mathcal{A}$, tak i formuli $\mathcal{B}$.

Odvozovací pravidla pro disjunkci:

(a) **Důkaz disjunkce:** *K dokázání disjunkce stačí dokázat kterýkoli její člen;* podrobněji: dokážeme-li ze systému předpokladů $\mathfrak{T}$ formuli $\mathcal{A}$, dokážeme tím z předpokladů $\mathfrak{T}$ také formuli $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ a dále dokážeme-li z předpokladů $\mathfrak{T}$ formuli $\mathcal{B}$, dokážeme tím z $\mathfrak{T}$ také formuli $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$.

[u9] Portrét je docela možno dát do kterékoli skřínky, podle místa jeho uložení je však nutno měnit zadání. Schováte-li portrét do zlaté skřínky, sdělíte nápadníkům, že přesně jeden nápis je nepravdivý; jestliže se rozhodnete portrét uložit do stříbrné skřínky, je třeba nápadníkům oznámit, že všechny nápisy jsou pravdivé; vložíte-li portrét do olověné skřínky, řeknete nápadníkům, že žádný nápis není pravdivý.

[u10] Jestliže cesta vede k mému cíli, odpoví pravdomluvný „ano“, avšak stejnou odpověď dá i lhář, neboť ekvivalence „Jste pravdomluvný, právě když tato cesta vede k mému cíli?“ je nepravdivá. Naproti tomu nevede-li cesta k mému cíli, je odpověď pravdomluvného „ne“ a stejně odpoví znovu i lhář, protože ekvivalence „Jste pravdomluvný, právě když tato cesta vede k mému cíli?“ je tentokrát pravdivá.

(b) **Důkaz užitím disjunkce:** *Víme-li, že neplatí jeden člen* ***platné*** *disjunkce, musí platit její druhý člen;* podrobněji: jestliže ze systému předpokladů $\mathfrak{T}$ dokážeme formuli $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ a současně z předpokladů $\mathfrak{T}$ dokážeme formuli $\neg\mathcal{A}$, pak tím z předpokladů $\mathfrak{T}$ dokážeme také formuli $\mathcal{B}$ a dále dokážeme-li z předpokladů $\mathfrak{T}$ formuli $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ a současně dokážeme-li z týchž předpokladů formuli $\neg\mathcal{B}$, pak tím z předpokladů $\mathfrak{T}$ dokážeme rovněž formuli $\mathcal{A}$.

Odvozovací pravidla pro ekvivalenci vyjadřují, že *ekvivalence má stejný význam jako konjunkce dvou implikací sestrojených na základě jejích členů:*

(a) **Důkaz ekvivalence:** Jestliže ze systému předpokladů $\mathfrak{T}$ dokážeme jak formuli $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, tak i formuli $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$, dokážeme tím z předpokladů $\mathfrak{T}$ rovněž formuli $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.
(b) **Důkaz užitím ekvivalence:** Dokážeme-li ze systému předpokladů $\mathcal{T}$ formuli $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, dokážeme tím z tohoto systému předpokladů jak formuli $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, tak i formuli $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$.

Slíbili jsme, že podstatu uvedených odvozovacích pravidel shrneme do tabulky takové, že slovní formulace pravidla a symbolická formulace v tabulce budou sice vyjádřeny různě, budou však na sebe převoditelné. Součástí uvedení tabulky je komentující poznámka, uvedená bezprostředně za úlohou 11.

Operace	Důkaz operace (její zavedení)		Důkaz užitím operace	
Implikace	$\mathcal{A} \vdash \mathcal{B} \to \mathcal{A}$		$\mathcal{A}, \mathcal{A} \to \mathcal{B} \vdash \mathcal{B}$ (modus ponens)	
Konjunkce	$\mathcal{A}, \mathcal{B} \vdash \mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B}$		$\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B} \vdash \mathcal{A}$	$\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B} \vdash \mathcal{B}$
Disjunkce	$\mathcal{A} \vdash \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\mathcal{B} \vdash \mathcal{A} \vee \mathcal{A}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}, \neg\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}, \neg\mathcal{B} \vdash \mathcal{A}$
Ekvivalence	$\mathcal{A} \to \mathcal{B}, \mathcal{B} \to \mathcal{A} \vdash \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$		$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \vdash \mathcal{A} \to \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \vdash \mathcal{B} \to \mathcal{A}$

Tabulka 2

Ukážeme, že slovní vyjádření pravidla zavádějícího konjunkci je převeditelné na formulaci pomocí symbolů, která je v tabulce. Abychom vyvodili vyjádření pravidla v tabulce ze slovního vyjádření, zkoumejme systém předpokladů $\mathfrak{T}$ sestávající z výroků $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$. V tomto systému je zcela evidentně dokazatelné jak $\mathcal{A}$, tak také $\mathcal{B}$ (důkazy vzniknou prostým užitím toho kterého předpokladu), takže podle slovní formulace je v tomto systému dokazatelná rovněž formule $\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B}$. Na druhé straně v systému předpokladů $\mathfrak{T}, \mathcal{A}, \mathcal{B}$ je dokazatelná formule $\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B}$ podle formulace v tabulce (připomeňme, že v důkazu nejsme povinni využít všechny předpoklady, pročež nevyužití předpokladů z $\mathfrak{T}$ různých od $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ není na závadu). Takže jestliže ze systému předpokladů $\mathfrak{T}$ je dokazatelná jak formule $\mathcal{A}$, tak i formule $\mathcal{B}$, je z předpokladů $\mathfrak{T}$ dokazatelná formule $\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B}$ podle principu „co je dokazatelné, lze použít pro dokazování“.

Nyní je na řadě zkoumání pravidla užití konjunkce. Přechod od slovní formulace k symbolické je zřejmý při volbě systému předpokladů obsahujícího jediný předpoklad $\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B}$. Naopak od symbolického vyjádření přejdeme k slovnímu opět prostým užitím principu „co je dokazatelné, lze použít pro dokazování“.

Úloha 11. Ukažte, že rovněž slovní a symbolické vyjádření odvozovacích pravidel pro disjunkci a ekvivalenci vyjadřují totéž.

Je potřeba rovněž zdůraznit, že do předchozí tabulky jsme zaznamenali také pravidla pro implikaci. Doufám, že čtenář bude po přečtení prvního paragrafu souhlasit, že nejvýznamnějším užitím implikace je pravidlo modus ponens, takže ho nepřekvapí vyplnění okénka v pravém sloupečku tímto pravidlem. Jako pravidlo pro zavádění implikace se obvykle volí dokazatelnost $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. (Pro jistotu předveďme, že uvedená dokazatelnost je zcela triviálním důsledkem pravidel, jež jsme přijali v prvém paragrafu (viz také **VP1**): důkaz formule $\mathcal{A}$ ze systému předpokladů $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ vznikne prostým sepsáním prvého předpokladu; na dokazatelnost $\mathcal{A}, \mathcal{B} \vdash \mathcal{A}$ následně aplikujeme důkaz dedukcí a získáme $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B} \to \mathcal{A}$.)

Jako poslední odvozovací pravidla výrokového počtu formulujme nyní dvě specifická pravidla pro dodatečné operace — první pro ekvivalenci a druhé pro disjunkci. Teď se omezíme na jejich vyslovení, do patřičných souvislostí je zasadíme až v následujících částech paragrafu. Uvědomme si však už teď, že užitečnost prvního z nich již byla motivována v předchozím paragrafu v souvislosti s příkladem 13. Odvozovací pravidlo zvané důkaz neutrální formulí, které jsme formulovali a zkoumali taktéž v předchozím paragrafu, je speciálním případem druhého z uváděných odvozovacích pravidel. Navíc úvahu matematizovanou důkazem rozborem případů jsme již užili v příkladu 6 prvého paragrafu, kde jsme slibovali podrobnější rozbor v současném paragrafu; znovu tuto úvahu použijeme neformálně za okamžik v závěru příkladu 2.

Důkaz ekvivalencí.[6] *Nahrazením části zadané formule formulí s ní ekvivalentní získáme formuli ekvivalentní se zadanou formulí;* podrobněji: Nechť formule $\mathcal{C}$ je částí zápisu formule $\mathcal{A}$. Nechť nahrazením formule $\mathcal{C}$ formulí $\mathcal{D}$ v zápisu formule $\mathcal{A}$ (všude nebo jen někde) vznikne formule $\mathcal{B}$. Pak z předpokladu $\mathcal{C} \equiv \mathcal{D}$ je dokazatelná ekvivalence $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, symbolicky $\mathcal{C} \equiv \mathcal{D} \vdash \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Důkaz rozborem případů.[7] *To, co je dokazatelné jak z první formule, tak i ze druhé, je dokazatelné z disjunkce těchto formulí;* podrobněji: jestliže ze systému předpokladů $\mathfrak{T}, \mathcal{A}$ je dokazatelná formule $\mathcal{C}$ a současně ze systému předpokladů $\mathfrak{T}, \mathcal{B}$ je rovněž dokazatelná formule $\mathcal{C}$, je ze systému předpokladů $\mathfrak{T}, \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ dokazatelná formule $\mathcal{C}$.

* * *

[u11] Při srovnávání formulací pravidel pro zavádění disjunkce uvažujte nejprve jednak systém předpokladů tvořený jediným předpokladem $\mathcal{A}$, a jednak systém tvořený jediným předpokladem $\mathcal{B}$. Pro zdůvodnění obráceného vztahu obou vyjádření využijeme znovu pravidlo principu „co je dokazatelné, lze použít pro dokazování“. Zkoumáme-li pravidla pro užití disjunkce je vhodné pro první z nich uvážit systém předpokladů tvořený formulemi $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ a $\neg\mathcal{A}$ a pro prokázání obráceného vztahu použít — jak jinak — princip „co je dokazatelné, lze použít pro dokazování“.

[6] Přes podobnost názvů jsou „důkaz ekvivalence“, „důkaz užitím ekvivalence“ a „důkaz ekvivalencí“ tři od sebe různá odvozovací pravidla

[7] Ve starší literatuře byl princip nazýván *konstruktivní dilema*.

Příklad 1. Čtyři cizokrajná zvířata přijíždějí do českých zoo. Víme:

(1) Zebra míří do Dvora Králové, právě když žirafa nejede do Olomouce.
(2) Na velblouda se těší v Brně nebo Praze.
(3) Směřuje-li antilopa do Dvora Králové, nejede zebra do Brna.
(4) Antilopě nechystají ubytování v Olomouci.

Zjistěme, jaké zvíře se chystají přivítat jednotlivá zoo.

Nejprve si uvědomme, že zebra nemůže jet do Olomouce. Kdyby tomu tak bylo, nesměřovala by do Dvora Králové, takže by musela jet žirafa do Olomouce (užitím ekvivalence (1) dostaneme implikaci „Když žirafa nejede do Olomouce, míří zebra do Dvora Králové.“ neboli podle zákona transpozice „Nemíří-li zebra do Dvora Králové, jede žirafa do Olomouce.“, nakonec použijeme modus ponens). Je však vyloučeno, aby dvě zvířata jela do stejného místa.

Avšak do Olomouce nejede ani velbloud podle (2) (užití disjunkce), ani antilopa (4), takže tam jede žirafa.

Následně zebra nemíří do Dvora Králové (užitím ekvivalence (1) dostaneme implikaci „Když míří zebra do Dvora Králové, nejede žirafa do Olomouce.“ neboli „Jede-li žirafa do Olomouce, nemíří zebra do Dvora Králové.“, stačí tedy užít modus ponens). Do Dvora Králové nemůže ani velbloud (2), smí tam jet pouze antilopa. Prosté užití modus ponens na požadavek (3) přinese zjištění, že zebra nesměřuje do Brna.

Zjistili jsme, že jediné možné rozmístění zvířat je: žirafa Olomouc, antilopa Dvůr Králové, velbloud Brno a zebra Praha a toto rozmístění vyhovuje všem našim požadavkům.

Příklad 2. O třech studentkách (Jana, Eva a Marie), z nichž každá má ráda jiný předmět (matematiku, angličtinu a dějepis) a má jinou barvu vlasů (černou, hnědou a světlou) víme:

(1) Marie má ráda dějepis nebo je světlovláskou.
(2) Nemiluje-li Eva matematiku, nemá hnědé vlasy.
(3) Jana nemá v oblibě angličtinu a není černovlasá.
(4) Dává-li světlovláska přednost angličtině, má Marie hnědé vlasy.

Chceme se dovědět, jak se jmenuje černovláska a jaký předmět má nejraději. Tytéž poznatky bychom rádi získali i o světlovlásce.

Nejprve vyjděme z předpokladu, že Marie má ráda dějepis (prvý disjunkt předpokladu (1)). Pak musí mít Jana ráda matematiku (3) [snad zbytečně podrobně: užijeme konjunkci „Jana nemá v oblibě angličtinu.“ & „Jana nemá černé vlasy.“ a vyvodíme „Jana nemá v oblibě angličtinu.“]. Kdyby Eva (o které již víme, že má ráda angličtinu) měla světlé vlasy, měla by Marie hnědé vlasy (4) [modus ponens] a Jana by byla černovlasá, což je vyloučeno (3) [zase užití konjunkce], takže Eva není světlovláskou. Protože Eva nemiluje matematiku, nemá hnědé vlasy (2) [modus ponens]. Takže shrňme, že Eva má v oblibě angličtinu a má černé vlasy.

Jako druhou možnost zkoumejme, že Marie má světlé vlasy (druhý disjunkt prvého předpokladu). Protože případ, že Marie má ráda dějepis, již byl probrán v předchozím odstavci, předpokládejme navíc, že má ráda jiný předmět. Kdyby preferovala angličtinu, měla by hnědé vlasy (4) [modus ponens], což je vyloučeno, protože naše studentky mají na celé hlavě vlasy stejné barvy. Takže za vyslovených předpokladů má Marie v oblibě matematiku a nadto má světlé vlasy. Jana má hnědé vlasy (3) [užití konjunkce]; protože nepreferuje angličtinu (3) [užití konjunkce], musí mít v oblibě dějepis. Pročež Eva má ráda angličtinu a má černé vlasy.

Důkaz rozborem případů nám na základě tvrzení (1) zaručí, že černovláskou je Eva, která miluje angličtinu.

Informace o studentkách však nestačí k rozhodnutí, zda se světlovláska jmenuje Marie nebo Eva ani zda má ráda angličtinu nebo dějepis. Podmínkám (1)–(4) vyhovují totiž tři řešení:

a) Eva má ráda angličtinu a má černé vlasy, Jana miluje matematiku a má hnědé vlasy a Marie dává přednost dějepisu a je světlovláskou.
b) Eva má ráda angličtinu a má černé vlasy, Jana miluje matematiku a je světlovláskou a Marie dává přednost dějepisu a má hnědé vlasy.
c) Eva má ráda angličtinu a má černé vlasy, Jana miluje dějepis a má hnědé vlasy a Marie dává přednost matematice a je světlovláskou.

Úloha 12. O jiných třech studentkách, z nichž opět každá má ráda jiný předmět a má jinou barvu vlasů podle předchozího příkladu, víme nyní navíc, že i jejich oblíbené květiny se liší, a jsou to růže, kopretiny a slunečnice. O této trojici studentek uveďme některé informace:

(1) Nedává-li černovláska přednost kopretinám, má matematička hnědé vlasy.
(2) Eva má ráda matematiku, právě když milovnice růží je světlovlasá.
(3) Eva má v oblibě dějepis nebo má hnědé vlasy.
(4) Jana není černovláskou ani nemá v oblibě slunečnice.
(5) Nejmenuje-li se milovnice dějepisu Marie, má hnědé vlasy.

Jsou tyto informace dostatečné, abychom určili jak se jmenuje světlovláska a který předmět a květiny má nejraději? Podaří se vám určit i vlastnosti černovlásky?

---

u12) Předpokládejme, že Eva miluje dějepis. Pak má hnědé vlasy (5). Jana má světlé vlasy (4) a nemá ráda slunečnice (4) ani růže (2). Takže musí mít v oblibě kopretiny; protože je světlovláskou, má vlasy hnědé matematička (1) a nikoli milovnice dějepisu, jak zněl náš předpoklad. Pročež Eva nemůže milovat dějepis.
Eva má tudíž hnědé vlasy (3) a následně má Jana vlasy světlé (4) a Marie je černovláskou. Podle (5) nemůže mít Jana ráda dějepis, v důsledku předchozího odstavce ho má ráda Marie. Kdyby byla Jana matematičkou, nedávala by přednost ani růžím (2) ani slunečnicím (4), musela by milovat kopretiny. Avšak pak by musela mít matematička Jana

Úloha 13. Změňme první implikaci předchozí úlohy na ekvivalenci, tzn. nahraďme podmínku (1) podmínkou

(1′) Černovláska nedává přednost kopretinám, právě když má matematička hnědé vlasy.

Určují pozměněné podmínky jednoznačně řešení?

Úloha 14. O čtyřech fotbalistech různých jmen (Karel, Václav, Milan, Jiří), hrajících na různých postech (brankář, obránce, záložník a útočník), hrajících za různé kluby (Sparta, Slávia, Baník, Liberec) a majících auta různých barev (bílé, béžové, červené, modré) jsme se dověděli:

(1) Jiří je obráncem nebo má červené auto
(2) Záložník se nejmenuje ani Karel ani Milan.
(3) Obránce se nejmenuje Milan.
(4) Je-li Milan útočníkem, je Karel záložníkem.
(5) Útočník má béžové auto a brankář nemá bílé auto.
(6) Milan hraje za Baník nebo má béžové auto.
(7) Útočník není ze Slávie ani Sparty.
(8) Karel není Slávistou a nemá béžové auto.

U každého z našich fotbalistů určete jeho post, jeho příslušnost ke klubu a barvu jeho auta.

* * *

---

hnědé vlasy (1), což naše předpoklady vylučují. Matematice proto musí dávat přednost Eva a následně Jana miluje růže (2).

Ukázali jsme, že světlovláska se jmenuje Jana a je milovnicí angličtiny a růží. Černovláska se jmenuje Marie a má ráda dějepis. O její lásce ke květinám jsme nerozhodli a ani rozhodnout nemůžeme, neboť zadání vyhovují dvě řešení:

(1) Jana, angličtina, světlé, růže; Eva, matematika, hnědé, kopretiny, Marie, dějepis, černé, slunečnice

(2) Jana, angličtina, světlé, růže; Eva, matematika, hnědé, slunečnice, Marie, dějepis, černé, kopretiny.

u13) Ano; černovláska miluje slunečnice; přidaná implikace vylučuje řešení uvedené v řešení předchozí úlohy jako druhé.

u14) Karel není záložníkem (2), takže Milan není útočníkem (4). Nadto Milan není ani obráncem (3) ani záložníkem (2), pročež je Milan brankářem.

Karel není útočníkem (5) a (8), avšak útočníkem není ani Jiří (1), (5) a ani brankář Milan, pročež útočníkem musí být Václav. O Karlovi víme, že není útočníkem, avšak podle (2) není ani záložníkem, a musí tedy být obráncem. Následně je Jiří záložníkem.

Útočník Václav má béžové auto (5), nemá tedy bílé. Bílé auto však nemá ani Jiří, který musí mít auto červené (1) ani brankář Milan (5); pročež ho musí vlastnit Karel.

Slávistou není ani útočník Václav (7) ani Karel (8). Avšak dokonce jím není ani Milan, což nahlédneme na základě (6) a faktu, že béžové auto patří útočníku Václavovi (5). Slávistou je tedy Jiří a Milan hraje za Baník. Útočník Václav není ani Slávistou ani Sparťanem (7), tudíž musí být z Liberce. Následně je Karel ze Sparty.

Záložník Jiří musí mít červené auto (1), takže Milan má modré.

Řešení: brankář Milan, Baník, modré; obránce Karel, Sparta, bílé; záložník Jiří, Slavia, červené.

Autor na tomto místě odolává obrovskému pokušení napsat seznam deseti nebo dvaceti „těch nejdůležitějších a nejpoužívanějších“ tautologií výrokového počtu. Domnívá se totiž, že jsme si ukázali metody, jak formule ve výrokovém počtu dokazovat, a doufá, že si čtenář v případě potřeby tu kterou formuli dokáže sám. Takže tato část nebude věnována žádnému seznamu, ale zaměříme se jen na tři konkrétní případy: na reformulace formule $\mathsf{p} \to \mathsf{p}$ (kterážto formule byla dokázána v prvním paragrafu), na předvedení užití odvozovacích pravidel popsaných v tomto paragrafu v logice samé (jejich užití na neformalizovaných příkladech jsme se snažili předvést v předchozí části) a na prokázání de Morganových pravidel.

V rámci prvních dvou bodů ukážeme zejména zákon vyloučeného třetího a zákon vyloučení sporu a dále formule (iii) a (iv), kteréžto zákony ovlivňovaly (evropský) pohled na svět a myšlení nejen v logice samé, avšak skrze ni i v dalších oblastech, např. ve filozofii.

V předchozím paragrafu jsme dokázali ve výrokovém počtu dvě implikace týkající se dvojité negace. Byla to jednak implikace $\mathsf{p} \to \neg\neg\mathsf{p}$ a jednak k ní obrácená implikace $\neg\neg\mathsf{p} \to \mathsf{p}$. Při užití operace ekvivalence můžeme nyní obě uvedené implikace vyjádřit jedinou formulí, a to formulí $\mathsf{p} \equiv \neg\neg\mathsf{p}$, která se nazývá **zákonem dvojité negace**; tento princip lze připsat již megarsko-stoické škole.

Uvědomme si, že jako důsledek důkazu ekvivalencí a zákona dvojité negace můžeme v jakékoli formuli na libovolném místě zaměnit formuli $\mathcal{A}$ formulí $\neg\neg\mathcal{A}$ nebo naopak formuli $\neg\neg\mathcal{A}$ formulí $\mathcal{A}$ a dostaneme formuli, jejíž ekvivalence s formulí původní je dokazatelná ve výrokovém počtu.

Formule

$$\mathsf{p} \vee \neg\mathsf{p} \tag{i}$$

je podle algoritmu na převádění formulí s dodatečnými operacemi na formule obsahující pouze implikace a negace převoditelná[8)] na formuli $\neg\mathsf{p} \to \neg\mathsf{p}$, a ta je dokazatelná ve výrokovém počtu (dokazatelnost $\mathsf{p} \to \mathsf{p}$ viz §1; dále užijte důkaz nahrazením). Takže formule (i) je ve výrokovém počtu dokazatelná a je známa pod jménem **zákon vyloučeného třetího** (*tertium non datur*); jako velmi důležitý princip byl rozpoznán již v antice (velice ho zdůrazňoval např. Chrýsippos ze Soloi). Význam formule (i) by měl být čtenáři zcela jasný: vždy platí tvrzení nebo jeho negace (např. prší nebo neprší) — třetí možnost neexistuje.

V poslední kapitole popíšeme přístup intuicionistické logiky, který znemožňuje zastáncům tohoto pohledu automaticky přijímat zákon vyloučeného třetího.

Formule

$$\neg(\mathsf{p} \mathbin{\&} \neg\mathsf{p}), \tag{ii}$$

8) Disjunkci $\mathsf{p} \vee \mathsf{q}$ přepisujeme pomocí formule $\neg\mathsf{p} \to \mathsf{q}$.

je vyjádřena[9)] bez konjunkce formulí $\neg[\neg(\mathsf{p} \to \neg\neg\mathsf{p})]$, tj. formulí[10)] $\mathsf{p} \to \mathsf{p}$. Takže formule (*ii*) je dokazatelná ve výrokovém počtu a je nazývána **zákon vyloučení sporu (kontradikce).** Tento princip se vyskytuje již u Aristotela. Mělo by být opět zcela jasné, že *současná* platnost tvrzení a jeho negace (např. prší a současně neprší) je vyloučena — představuje spor.

Výše jsme uvedli, že důkaz neutrální formulí je speciálním (avšak nejužívanějším) případem rozboru případů. To je zcela evidentní, stačí se podívat na tvar důkazu neutrální formulí a uvědomit si dokazatelnost formule (*i*) a pravidlo „dokázané lze použít k dokazování“.

Naproti tomu je třeba zdůraznit, že důkaz neutrální formulí nepokrývá všechna užití důkazu rozborem případů. Zcela jednoduchým protipříkladem je užití rozboru případů při řešení příkladu 2 tohoto paragrafu; zkoumané disjunkty v prvním předpokladu příkladu *nejsou* vytvářeny formulí a její negací.

*

Následující tři příklady a dvě úlohy snad v dostatečné míře předvedou užití odvozovacích pravidel formulovaných v tomto paragrafu pro dokazování formulí vytvořených s pomocí dodatečných logických operací.

Příklad 3. Ukažme dokazatelnost komutativity disjunkce ve výrokovém počtu (bez použití sémantických metod, tj. bez tabulek pravdivostních hodnot), tzn. prokažme

$$\vdash (\mathsf{p} \vee \mathsf{q}) \equiv (\mathsf{q} \vee \mathsf{p}).$$

Podle odvozovacího pravidla důkaz užitím disjunkce ukážeme dokazatelnost $(\mathsf{p} \vee \mathsf{q}), \neg\mathsf{p} \vdash \mathsf{q}$. Následně z týchž předpokladů je dokazatelná formule $\mathsf{q} \vee \mathsf{p}$ podle *prvého* pravidla důkaz disjunkce a podle principu „dokázané lze použít k dokazování“. Současně z předpokladů $(\mathsf{p} \vee \mathsf{q}), \mathsf{p}$ je dokazatelná formule $\mathsf{q} \vee \mathsf{p}$ podle *druhého* pravidla důkaz disjunkce. Z obou systémů předpokladů jsme dokázali formuli $\mathsf{q} \vee \mathsf{p}$ a používajíce důkaz neutrální formulí získáme dokazatelnost $(\mathsf{p} \vee \mathsf{q}) \vdash (\mathsf{q} \vee \mathsf{p})$. Užívajíce následně důkaz dedukcí dostaneme $\vdash (\mathsf{p} \vee \mathsf{q}) \to (\mathsf{q} \vee \mathsf{p})$.

Zcela analogicky prokážeme i dokazatelnost obrácené implikace a na závěr použijeme odvozovací pravidlo důkaz ekvivalence.

Úloha 15. Bez užití sémantiky ukažte dokazatelnost komutativity konjunkce, tj. ukažte $\vdash (\mathsf{p} \,\&\, \mathsf{q}) \equiv (\mathsf{q} \,\&\, \mathsf{p})$. (Úloha je jednodušší než předchozí příklad, není třeba aplikovat důkaz neutrální formulí.)

[9)] Konjunkci $\mathsf{p} \,\&\, \mathsf{q}$ přepisujeme pomocí formule $\neg(\mathsf{p} \to \neg\mathsf{q})$.

[10)] Zákon dvojité negace již hodláme v dalším textu využívat zcela volně a často bez připomínání.

[u15)] Z předpokladu $\mathsf{p} \,\&\, \mathsf{q}$ dokážeme jak p, tak také q. V tomto okamžiku nezáleží na pořadí formulí, jedna každá je dokazatelná z našeho předpokladu. Užitím pravidla důkaz

Příklad 4. Jako další příklad na odvozovací pravidla pro konjunkci dokážeme ve výrokovém počtu formuli $[p \to (q \to r)] \equiv [(p \mathbin{\&} q) \to r]$, která se někdy nazývá **zákon slučování premis.**

Z předpokladů $(p \mathbin{\&} q) \to r$, p, q prokážeme užitím pravidla důkaz konjunkce dokazatelnost formule $p \mathbin{\&} q$ z našich předpokladů; následně aplikace modu ponens ukazuje dokazatelnost r ze zvolených předpokladů. Trojnásobné užití důkazu dedukcí přinese žádanou dokazatelnost $\vdash [(p \mathbin{\&} q) \to r] \to [p \to (q \to r)]$.

Abychom ve výrokovém počtu dokázali také obrácenou implikaci, pracujme v systému předpokladů $p \to (q \to r), p \mathbin{\&} q$. Podle důkazu užitím konjunkce je z těchto předpokladů dokazatelný jak výrok p, tak také výrok q. Nyní stačí použít dvojnásobně pravidla modus ponens na formuli $p \to (q \to r)$ a ukážeme dokazatelnost výroku r z uvedených předpokladů. Nikoho jistě nepřekvapí, že dvojnásobným užitím důkazu dedukcí obdržíme potřebnou dokazatelnost formule $[p \to (q \to r)] \to [(p \mathbin{\&} q) \to r]$ ve výrokovém počtu.

Na závěr použijeme pravidlo důkaz ekvivalence.

Předchozí příklad ukazuje, jak si můžeme zpřehledňovat vícenásobné implikace, protože uvažovat jedinou implikaci s antecedentem jakkoli dlouhé konjunkce je přirozenější než uvažovat mnohonásobně opakovanou implikaci.

Příklad 5. Jestliže v zákonu Dunse Scota nahradíme proměnnou p formulí $\neg p$, získáme formuli $\neg\neg p \to (\neg p \to q)$. Aplikací výsledku příkladu 4 obdržíme dokazatelnost $\vdash (\neg\neg p \mathbin{\&} \neg p) \to q$. Po nahrazení dvojité negace získáme dokazatelnost formule

$$(p \mathbin{\&} \neg p) \to q \tag{iii}$$

ve výrokovém počtu. O antecedentu implikace (*iii*) víme, že jeho negace je dokazatelná ve výrokovém počtu, takže antecedent představuje „nemožné“. Nepřekvapí proto, že princip formalizovaný formulí (*iii*) byl ve středověku znám[10)] jako „Z nemožného plyne cokoli.“

Úloha 16. Vhodným nahrazením (obou) proměnných v zákonu Dunse Scota dokažte ve výrokovém počtu formuli

$$q \to \neg(p \mathbin{\&} \neg p). \tag{iv}$$

Konsekvent implikace (*iv*) je dokazatelný ve výrokovém počtu a proto představuje „nutné“. Pro zapamatování principu formalizovaného formulí (*iv*) používali ve středověku[11)] „Nutné plyne z čehokoli.“

*

konjunkce (a „dokázané je možno použít k dokazování“) dostaneme $p \mathbin{\&} q \vdash q \mathbin{\&} p$, důkaz dedukcí tudíž zajistí $\vdash (p \mathbin{\&} q) \to (q \mathbin{\&} p)$. Naprosto stejnou úvahou dokážeme ve výrokovém počtu i obrácenou implikaci a na závěr použijeme pravidlo důkaz ekvivalence.

[11)] Ve scholastické logice vyjadřováno jako „Ex impossibili sequitur quodlibet.“.

[u16)] Nahradíme-li v zákonu Dunse Scota proměnnou p formulí $\neg p$ a proměnnou q formulí $\neg q$ a užijeme-li zákon slučování premis, získáme formuli $(\neg\neg p \mathbin{\&} \neg p) \to \neg q$. Aplikujeme-li axiom **VP3** a vynecháme-li současně dvojitou negaci, obdržíme $q \to \neg(p \mathbin{\&} \neg p)$.

[12)] Při tehdy běžném použití latiny bylo užíváno „Necessarium sequitur ad quodlibet.“.

Následující formule popisují vztah mezi konjunkcí a disjunkcí (první vyjadřuje „jak negovat konjunkci“ a druhé „jak negovat disjunkci“) a jsou nazývány **de Morganova pravidla**. Vztahy byly známy již dříve (Arnold Geulincx 1662), v devatenáctém století byly znovu objeveny de Morganem.

(v) $$\neg(\mathcal{A} \mathbin{\&} \mathcal{B}) \equiv (\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}),$$
(vi) $$\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \equiv (\neg\mathcal{A} \mathbin{\&} \neg\mathcal{B}).$$

Příklad 6. Dokažme formuli (v).

Formuli $\neg(\mathcal{A} \mathbin{\&} \mathcal{B})$ přepíšeme[9] pomocí implikace na formuli $\neg[\neg(\mathcal{A} \to \neg\mathcal{B})]$, tj. na formuli $\mathcal{A} \to \neg\mathcal{B}$. Druhý člen ekvivalence (v), tj. formuli $(\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B})$, vyjádříme[8] pomocí formule $\neg\neg\mathcal{A} \to \neg\mathcal{B}$, tzn. (při užití zákona dvojité negace) na formuli $\mathcal{A} \to \neg\mathcal{B}$. Formule na obou stranách ekvivalence jsou reformulovány touž formulí, pročež není co dále dokazovat (v prvním paragrafu jsme ukázali dokazatelnost formule $\mathsf{p} \to \mathsf{p}$ ve výrokovém počtu).

Úloha 17. Dokažte formuli (vi).

Pokud na formuli $\neg(\mathsf{p} \mathbin{\&} \neg\mathsf{p})$ aplikujeme de Morganovo pravidlo, dostaneme formuli $\neg\mathsf{p} \vee \mathsf{p}$ a po užití komutativity disjunkce formuli $\mathsf{p} \vee \neg\mathsf{p}$. Formule (iv) se proto často reformuluje (při užití důkazu ekvivalencí) do tvaru

(iv') $$\mathsf{q} \to (\mathsf{p} \vee \neg\mathsf{p}).$$

* * *

Uvažujme tři výrokové proměnné $\mathsf{p}_1, \mathsf{p}_2, \mathsf{p}_3$ (zobecnění na jiný počet proměnných si čtenář jistě provede sám). I když připouštíme jen tři proměnné, vytvoříme z nich postupně rekurzí nekonečně mnoho formulí (můžeme bez omezení např. negovat, takže formule od sebe různé představují mj. zápisy $\mathsf{p}_1, \neg\mathsf{p}_1, \neg\neg\mathsf{p}_1, \neg\neg\neg\mathsf{p}_1, \ldots$ — to, že ekvivalence mnohých těchto formulí je dokazatelná ve výrokovém počtu, souvisí až s dalším výkladem). Z hlediska sémantiky však každé formuli sestrojené pomocí pouhých tří výrokových proměnných je přiřazena tabulka pravdivostních hodnot s osmi řádky. Takovýchto tabulek je tolik, kolik je zobrazení z osmiprvkové množiny do dvouprvkové množiny hodnot $\{0, 1\}$, tedy $2^8 = 256$. Takže může být nejvýše 256 formulí se třemi proměnnými, jejichž tabulky pravdivostních hodnot se liší více než pouhým záhlavím. (Pro n proměnných bude sémanticky různých formulí $2^{(2^n)}$, což pro trochu větší n bude již velký počet, avšak stále konečný.)

[u17] Formuli $\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ přepíšeme formulí $\neg(\neg\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ a druhý člen ekvivalence (vi) vyjádříme pomocí $\neg(\neg\mathcal{A} \to \neg\neg\mathcal{B})$. Abychom nahlédli ekvivalenci obou formulí, stačí užít zákon dvojité negace a důkaz ekvivalencí.

Ke každé formuli výrokového počtu musí tedy existovat formule poměrně jednoduchého tvaru, jejíž tabulka pravdivostních hodnot se liší od tabulky pravdivostních hodnot původní formule pouze záhlavím. Konstrukce takovéto jednoduché formule není příliš složitá a v následujících řádcích si ukážeme dvě metody sestrojení jednoduchého tvaru formule. Uvědomme si, že při zadaném počtu výrokových proměnných umožní následující úvahy navíc předem odhadnout, kolik symbolů je zapotřebí, aby ke *každé* formuli s daným počtem výrokových proměnných existovala formule s maximálně tímto počtem symbolů a s tabulkou pravdivostních hodnot lišící se od tabulky pravdivostních hodnot původně zadané formule jenom záhlavím.

Pro každé ohodnocení $\mathbb{v}$ proměnných $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3$ definujme formuli $\mathcal{K}_{\mathbb{v}}$ jakožto konjunkci, jejímiž konjunkty jsou všechny proměnné hodnocené hodnotou 1 a všechny negace proměnných, které jsou hodnoceny hodnotou 0. Například pro ohodnocení $\mathbb{u}$ nabývající hodnotu 1 pro proměnné $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_3$, a jen pro ně, je $\mathcal{K}_{\mathbb{u}}$ formulí $\mathrm{p}_1 \;\&\; \neg\mathrm{p}_2 \;\&\; \mathrm{p}_3$ a pro ohodnocení $\mathbb{w}$ nabývající na všech proměnných hodnotu 0, je formule $\mathcal{K}_{\mathbb{w}}$ formulí $\neg\mathrm{p}_1 \;\&\; \neg\mathrm{p}_2 \;\&\; \neg\mathrm{p}_3$.

Úloha 18. Ukažte, že formule $\mathcal{K}_{\mathbb{v}}$ nabývá pravdivostní hodnoty 1 pro ohodnocení $\mathbb{v}$ a pro žádné jiné.

Uvažujme nyní libovolnou formuli $\mathcal{A}$ (v níž se vyskytují přesně tři proměnné $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3$), která alespoň pro jedno ohodnocení svých proměnných nabývá hodnotu 1 (tj. která není kontradikcí). Utvořme formuli $\mathcal{B}$ jako disjunkci všech formulí $\mathcal{K}_{\mathbb{v}}$ pro ta ohodnocení $\mathbb{v}$, ve kterých formule $\mathcal{A}$ nabývá hodnoty 1 (alespoň jedno takovéto ohodnocení existuje, pročež systém disjunktů je neprázdný). Je-li $\mathcal{A}$ kontradikcí, definujeme $\mathcal{B}$ jako formuli

$$(\mathrm{p}_1 \;\&\; \mathrm{p}_2 \;\&\; \mathrm{p}_3 \;\&\; \neg\mathrm{p}_1) \vee (\mathrm{p}_1 \;\&\; \mathrm{p}_2 \;\&\; \mathrm{p}_3 \;\&\; \neg\mathrm{p}_2) \vee (\mathrm{p}_1 \;\&\; \mathrm{p}_2 \;\&\; \mathrm{p}_3 \;\&\; \neg\mathrm{p}_3).$$

Disjunkce je hodnocena jako pravdivá, právě když alespoň jeden disjunkt nabývá hodnoty 1, takže tabulka pravdivostních hodnot formule $\mathcal{B}$ se liší od tabulky pravdivostních hodnot formule $\mathcal{A}$ jenom záhlavím. Takto sestrojená formule $\mathcal{B}$ se nazývá **úplný normální disjunktivní tvar** formule $\mathcal{A}$. (Uvědomte si, že v každém disjunktu úplného normálního disjunktivního tvaru formule $\mathcal{A}$ se vyskytují tytéž výrokové proměnné jako ve formuli $\mathcal{A}$; nadto jestliže $\mathcal{A}$ není kontradikcí, nevyskytují se v sestrojených disjunktech současně výroková proměnná a její negace.)

Ukázali jsme, že každou formuli lze psát jako disjunkci konjunkcí výrokových proměnných a jejich negací. Avšak každou formuli je možno také psát ve tvaru,

[u18)] Pro uvažované ohodnocení je pravdivostní hodnotou 1 ohodnocen každý konjunkt formule $\mathcal{K}_{\mathbb{v}}$ a pro každé jiné ohodnocení existuje alespoň jeden konjunkt formule $\mathcal{K}_{\mathbb{v}}$, který je ohodnocen pravdivostní hodnotou 0. Konjunkce je hodnocena jako pravdivá právě tehdy, jsou-li všechny její konjunkty hodnoceny jako pravdivé.

kde se role konjunkcí a disjunkcí zamění, tzn. jako konjunkci disjunkcí výrokových proměnných a jejich negací. Toto vyjádření budeme nazývat **úplným normálním konjunktivním tvarem** formule $\mathcal{A}$. Při konstrukci slíbené formule, které si teď předvedeme, budeme mírně modifikovat předchozí postup.

Pro každé ohodnocení $\mathbb{v}$ proměnných $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3$ definujme formuli $\mathcal{D}_{\mathbb{v}}$ jakožto disjunkci, jejímiž disjunkty jsou všechny proměnné hodnocené hodnotou 0 a všechny negace těch proměnných, které jsou hodnoceny hodnotou 1. Například pro ohodnocení $\mathbb{u}$ nabývající hodnotu 1 přesně pro proměnné $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_3$ je $\mathcal{D}_{\mathbb{u}}$ formulí $\neg\mathrm{p}_1 \vee \mathrm{p}_2 \vee \neg\mathrm{p}_3$ a pro ohodnocení $\mathbb{w}$ nabývající na všech proměnných hodnotu 0, je formule $\mathcal{D}_{\mathbb{w}}$ formulí $\mathrm{p}_1 \vee \mathrm{p}_2 \vee \mathrm{p}_3$.

Úloha 19. Ukažte, že formule $\mathcal{D}_{\mathbb{v}}$ nabývá pravdivostní hodnoty 0 pro ohodnocení $\mathbb{v}$ a žádné jiné.

Uvažujme nyní znovu libovolnou formuli $\mathcal{A}$ (v níž se vyskytují právě výrokové proměnné $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3$), která však tentokrát alespoň pro jedno ohodnocení svých proměnných nabývá hodnotu 0 (tj. která není tautologií). Utvořme formuli $\mathcal{C}$ jako konjunkci všech formulí $\mathcal{D}_{\mathbb{v}}$ pro ta ohodnocení $\mathbb{v}$, ve kterých formule $\mathcal{A}$ nabývá hodnoty 0 (alespoň jedno takovéto ohodnocení existuje, pročež systém konjunktů je neprázdný). Je-li $\mathcal{A}$ tautologií, definujeme $\mathcal{C}$ jako formuli

$$(\mathrm{p}_1 \vee \mathrm{p}_2 \vee \mathrm{p}_3 \vee \neg\mathrm{p}_1) \mathbin{\&} (\mathrm{p}_1 \vee \mathrm{p}_2 \vee \mathrm{p}_3 \vee \neg\mathrm{p}_2) \mathbin{\&} (\mathrm{p}_1 \vee \mathrm{p}_2 \vee \mathrm{p}_3 \vee \neg\mathrm{p}_3).$$

Konjunkce je hodnocena jako pravdivá, právě když všechny konjunkty nabývají hodnoty 1, takže tabulka pravdivostních hodnot formule $\mathcal{C}$ se liší od tabulky pravdivostních hodnot formule $\mathcal{A}$ pouze záhlavím. (Uvědomte si, že v každém konjunktu úplného normálního konjunktivního tvaru formule $\mathcal{A}$ se vyskytují tytéž výrokové proměnné jako ve formuli $\mathcal{A}$; nadto jestliže $\mathcal{A}$ není tautologií, nevyskytují se v sestrojených konjunktech současně výroková proměnná a její negace.)

Příklad 7. Sestrojme úplný normální disjunktivní i konjunktivní tvar formule (obsahující přesně dvě výrokové proměnné p, q)

$$\neg[\neg\mathrm{q} \to (\mathrm{p} \to \mathrm{q})] \vee (\neg\mathrm{p} \mathbin{\&} \neg\mathrm{q}).$$

Formule je *pravdivá* právě pro ohodnocení nabývající 0 pro obě proměnné nebo nabývající 1 pro p a současně 0 pro q, takže úplný normální disjunktivní tvar zkoumané formule je $(\neg\mathrm{p} \mathbin{\&} \neg\mathrm{q}) \vee (\mathrm{p} \mathbin{\&} \neg\mathrm{q})$. Formule je *nepravdivá* přesně pro ohodnocení nabývající 0 pro p a současně 1 pro q nebo nabývající 1 pro obě proměnné, pročež její úplný normální konjunktivní tvar je $(\mathrm{p} \vee \neg\mathrm{q}) \mathbin{\&} (\neg\mathrm{p} \vee \neg\mathrm{q})$.

---

u19) Pro uvažované ohodnocení je pravdivostní hodnotou 0 ohodnocen každý disjunkt formule $\mathcal{D}_{\mathbb{v}}$ a pro každé jiné ohodnocení existuje alespoň jeden disjunkt formule $\mathcal{D}_{\mathbb{v}}$, který je ohodnocen pravdivostní hodnotou 1. Disjunkce je hodnocena jako pravdivá právě tehdy, je-li alespoň jeden její disjunkt hodnocen jako pravdivý.

Úloha 20. Najděte úplný normální disjunktivní i konjunktivní tvar formule $(p \equiv q) \,\&\, (p \vee q)$.

Úloha 21. Určete úplný normální disjunktivní i konjunktivní tvar formule $(p \,\&\, \neg q) \rightarrow (p \vee q)$.

Úloha 22. Sestrojte úplný normální disjunktivní i konjunktivní tvar formule $[(p \rightarrow q) \,\&\, (r \rightarrow q)] \vee [(p \equiv q) \equiv r]$.

Aplikace. Jistě si umíte představit řadu situací, kdy je vhodné, aby nějaké zařízení hlásilo, že jakási skutečnost nastala (např. výsledek hlasování, signalizace poruchy, atd.). Skutečnost, o kterou jde, nemusí být popsána jednoduše (při hlasování se mohou hlasy počítat s různou váhou, jedním ze znaků poruchy může být např. souhlasná hodnota na dvou čidlech, atd.). Ptejme se proto obecně, zda ke každé formuli výrokového počtu umíme sestrojit elektrický obvod mající přesně tolik relé, kolik je proměnných ve výrokové formuli a takový, že zařízením prochází proud (a následně se rozsvítí žárovka nebo zazní zvonek apod.), právě když je formule pravdivá. Každé relé může ovládat několik zapínacích a vypínacích kontaktů a nastavit je všechny *najednou.* Pro jednoduchost vyjadřování budeme nadále místo „relé odpovídající výrokové proměnné p_i“ říkat prostě „relé p_i“. Proud procházející relé p_i nastavuje zapínací kontakty ovládané tímto relé tak, aby proud kontakty procházel a nastavuje vypínací kontakty ovládané tímto relé tak, aby jimi proud neprocházel. Průchod proudu relé p_i bude odpovídat tomu, že výroková proměnná p_i nabývá pravdivostní hodnotu 1.

Z předchozího víme, že tabulka pravdivostních hodnot úplného normálního disjunktivního (resp. konjunktivního) tvaru uvažované formule se od tabulky pravdivostních hodnot samotné uvažované formule liší pouze záhlavím. Můžeme tedy řešit popsaný problém pouze pro formule v úplném normálním disjunktivním (resp. konjunktivním) tvaru.

$^{u20)}$ Formule nabývá pravdivostní hodnotu 1 pouze pro ohodnocení obou proměnných hodnotou 1. Úplný normální disjunktivní tvar zkoumané formule je tudíž $p \,\&\, q$, úplný normální konjunktivní tvar je $(\neg p \vee q) \,\&\, (p \vee \neg q) \,\&\, (p \vee q)$.

$^{u21)}$ Zkoumaná formule je tautologií, a proto její úplné normální tvary jsou disjunktivní: $(\neg p \,\&\, \neg q) \vee (\neg p \,\&\, q) \vee (p \,\&\, \neg q) \vee (p \,\&\, q)$ a konjunktivní: $(p \vee q \vee \neg p) \,\&\, (p \vee q \vee \neg q)$.

$^{u22)}$ Formule nabývá pravdivostní hodnoty 0 pro jediné ohodnocení: p pravdivý, q nepravdivý a r pravdivý. Úplný normální disjunktivní tvar formule:

$$(\neg p \& \neg q \& \neg r) \vee (\neg p \& \neg q \& r) \vee (\neg p \& q \& \neg r) \vee (\neg p \& q \& r) \vee \\ \vee (p \& \neg q \& \neg r) \vee (p \& q \& \neg r) \vee (p \& q \& r);$$

úplný normální konjunktivní tvar formule: $\neg p \vee q \vee \neg r$.

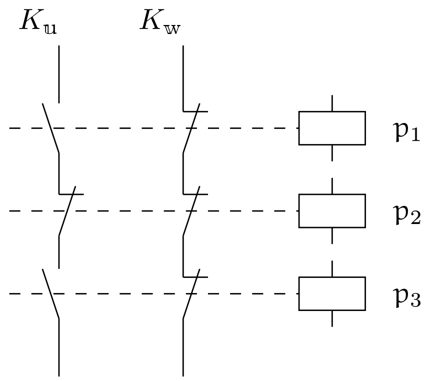

Diagram 1

Buď $\mathbb{v}$ ohodnocení proměnných p_1, p_2, p_3 (opět ponecháme čtenáři reformulaci pro počet proměnných odlišný od tří). Ke konjunkci $\mathcal{K}_{\mathbb{v}}$ přiřaďme elektrický obvod, který je sériovým zapojením tří kontaktů (z nichž každý je zapínací nebo vypínací), a to takových, že proměnné p_i je přiřazen zapínací kontakt přesně když $\mathbb{v}(p_i) = 1$ (neboli je přiřazen vypínací kontakt, právě když $\mathbb{v}(p_i) = 0$). Na diagramu 1 jsou znázorněny obvody příslušné po řadě konjunkcím $\mathcal{K}_{\mathbb{u}}$ a $\mathcal{K}_{\mathbb{w}}$ pro ohodnocení $\mathbb{u}$ nabývající hodnoty 1 přesně pro proměnné p_1 a p_3 a pro ohodnocení $\mathbb{w}$ nabývající pro všechny proměnné hodnoty 0.

Obvodem přiřazeným konjunkci $\mathcal{K}_{\mathbb{v}}$ *protéká* proud, právě když prochází proud přesně těmi relé p_i, pro které $\mathbb{v}(p_i) = 1$. V takovém případě jsou totiž všechny zapínací kontakty obvodu $\mathbb{K}_{\mathbb{v}}$ zapnuty a žádný z vypínacích kontaktů není rozepnut. Při průtoku proudu podle jiného ohodnocení proměnných není alespoň jeden ze zapínacích kontaktů zapnut nebo je alespoň jeden z vypínacích kontaktů rozepnut.

K formuli $\mathcal{A}$, která není kontradikcí a je v úplném normálním disjunktivním tvaru, uvažme zařízení, které paralelně zapojuje obvody odpovídající formulím $\mathcal{K}_{\mathbb{v}}$ pro všechna $\mathbb{v}$, pro něž formule $\mathcal{A}$ nabývá hodnotu 1. Takto vzniklým zařízením *prochází* proud, právě když relé jsou nastaveny podle některého z těch ohodnocení $\mathbb{v}$, pro něž $\mathbb{v}(\mathcal{A}) = 1$. Pokud je zadaná formule kontradikcí, realizuje naše požadavky „zařízení“ které nespojuje nic (proud nemá procházet nikdy, neboť formule není nikdy pravdivá).

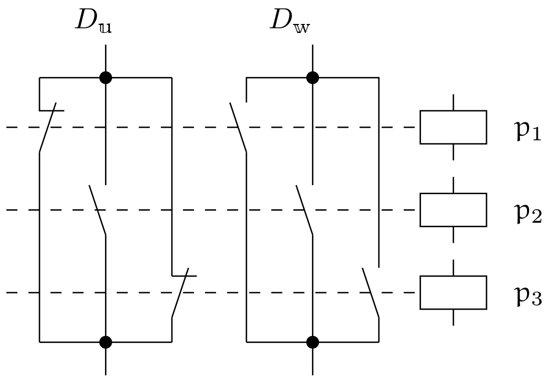

Diagram 2

K disjunkci $\mathcal{D}_{\mathbb{v}}$ přiřaďme obvod, který je paralelním zapojením tří kontaktů (z nichž každý je zapínací nebo vypínací), a to takových, že proměnné p_i je přiřazen zapínací kontakt přesně když $\mathbb{v}(p_i) = 0$ (neboli je přiřazen vypínací kontakt, právě když $\mathbb{v}(p_i) = 1$). Na diagramu 2 jsou znázorněny obvody příslušné po řadě disjunkcím $\mathcal{D}_{\mathbb{u}}$ a $\mathcal{D}_{\mathbb{w}}$ pro ohodnocení $\mathbb{u}$ nabývající hodnoty 1 přesně pro proměnné p_1 a p_3 a pro ohodnocení $\mathbb{w}$ nabývající pro všechny proměnné hodnoty 0.

Obvodem přiřazeným disjunkci $\mathcal{D}_{\mathbb{v}}$ *neprotéká* proud, právě když prochází proud přesně těmi relé p_i, pro které $\mathbb{v}(\mathrm{p}_i) = 1$. V takovém případě není totiž žádný ze zapínacích kontaktů obvodu $\mathbb{D}_{\mathbb{v}}$ zapnut a všechny vypínací kontakty jsou rozepnuty. Při průtoku proudu relé podle jiného ohodnocení proměnných je alespoň jeden ze zapínacích kontaktů zapnut nebo alespoň jeden z vypínacích kontaktů není rozepnut.

K formuli $\mathcal{A}$, která je v úplném normálním konjunktivním tvaru (a není tautologií) uvažme zařízení vzniklé jako sériové zapojení obvodů odpovídajících disjunkcím $\mathcal{D}_{\mathbb{v}}$ pro ta $\mathbb{v}$, ve kterých formule $\mathcal{A}$ nabývá hodnoty 0. Takto vzniklým zařízením *neprochází* proud, právě když relé jsou nastaveny podle některého z těch ohodnocení $\mathbb{v}$, pro něž $\mathbb{v}(\mathcal{A}) = 0$, neboli zařízením *prochází* proud, právě když relé jsou nastaveny podle některého z těch ohodnocení $\mathbb{v}$, pro něž $\mathbb{v}(\mathcal{A}) = 1$ (pak totiž proud prochází právě všemi obvody odpovídajícími disjunkcím $\mathcal{D}_{\mathbb{v}}$ pro $\mathbb{v}(\mathcal{A}) = 0$ a naše zařízení je sériovým zapojením takovýchto obvodů). Je-li $\mathcal{A}$ tautologií, natáhneme prostě drát (proud má procházet vždy).

Následující dva diagramy popisují zařízení odpovídající formuli $\mathrm{p} \equiv \mathrm{q}$ (první odpovídá disjunktivní formě $(\neg\mathrm{p} \;\&\; \neg\mathrm{q}) \vee (\mathrm{p} \;\&\; \mathrm{q})$ a druhý formě konjunktivní $(\neg\mathrm{p} \vee \mathrm{q}) \,\&\, (\mathrm{p} \vee \neg\mathrm{q})$. Pro jistotu komentujme diagram 3: každé z relé p, q ovládá dva kontakty, první větví prochází proud, právě když obě relé nerozepnou jimi řízené vypínací kontakty, druhou větví prochází proud, právě když obě relé zapnou jimi řízené zapínací kontakty. K diagramu 4 poznamenejme, že je tvořen sériově zapojenými obvody, z nichž levým neprochází proud, právě když relé p nezapne svůj zapínací kontakt a současně relé q rozepne svůj vypínací kontakt a pravým obvodem neprochází proud, právě když relé p rozepne svůj vypínací kontakt a relé q nezapne svůj zapínací kontakt.

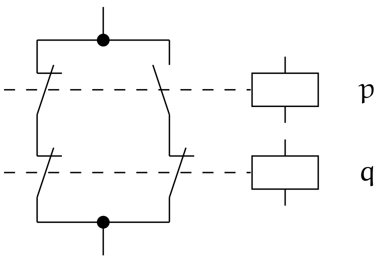

Diagram 3

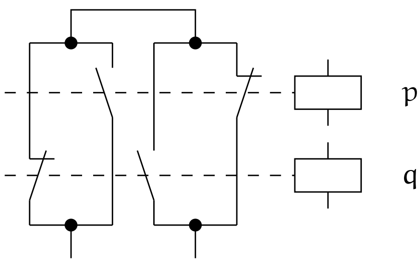

Diagram 4

Na příkladu, který teď uvedeme, byste si měli mimo jiné uvědomit, že před skutečnou realizací signalizačního zařízení je vhodné zvážit, které z navržených zařízení je jednodušší a zejména zda ho není možné ještě zjednodušit.

Pátý diagram ukazuje zařízení odpovídající úplnému normálnímu disjunktivnímu tvaru formule $(p \,\&\, q) \vee r$, tzn. formuli

$$(\neg p \,\&\, \neg q \,\&\, r) \vee (\neg p \,\&\, q \,\&\, r) \vee (p \,\&\, \neg q \,\&\, r) \vee (p \,\&\, q \,\&\, \neg r) \vee (p \,\&\, q \,\&\, r),$$

a diagram 6 popisuje zjednodušení zařízení z diagramu 5 odpovídající přímo formuli $(p \,\&\, q) \vee r$. Sedmý diagram předvádí zařízení odpovídající úplnému normálnímu konjunktivnímu tvaru formule $(p \,\&\, q) \vee r$, tzn. formuli

$$(\neg p \vee q \vee r) \,\&\, (p \vee \neg q \vee r) \,\&\, (p \vee q \vee r),$$

a ukazuje, že takto pořád dostanete zařízení složitější než to, které je zachyceno na šestém diagramu. Povšimněte si, že zadaná formule $(p \,\&\, q) \vee r$ je disjunkcí konjunkcí výrokových proměnných, není však v *úplném* tvaru (ne v každém disjunktu se vyskytují všechny výrokové proměnné ze zadané formule nebo jejich negace), tento fakt zajistí, že elektrický obvod realizující zadanou formuli musí být jednodušší než elektrický obvod realizující úplný normální disjunktivní tvar formule.

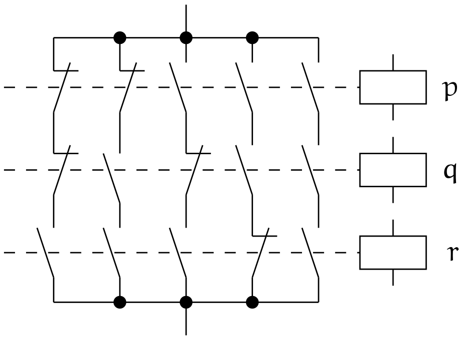

Diagram 5

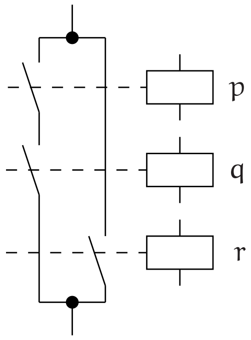

Diagram 6

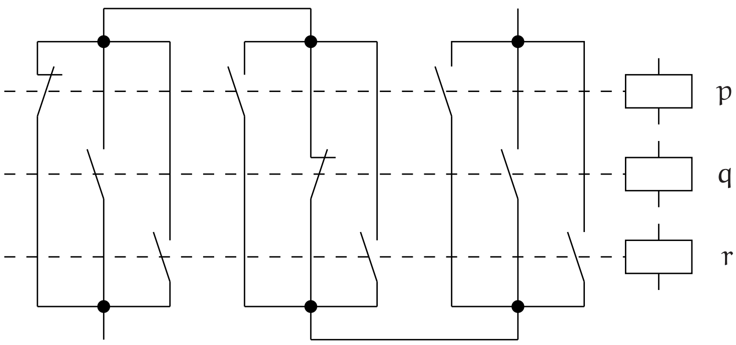

Diagram 7

Mnozí čtenáři asi teď nařknou autora z použití nedovoleného triku. Přece jsme již na počátku měli formuli, kterou máme realizovat, ve velice jednoduchém tvaru a konstrukce zařízení ze šestého diagramu byla nasnadě. Jestliže se však od formule zapsané poměrně složitě dostaneme k zařízení z pátého diagramu, budeme i tak schopni rozpoznat jeho možné zjednodušení do zařízení z diagramu 6? Pokusím se Vás nyní přesvědčit, že i v tomto případě lze zjednodušení nalézt poměrně snadno. Pokud budeme uvažovat všechny větve pátého diagramu kromě větve čtvrté, nahlédneme, že popisují všechny možnosti nastavení přepínačů ovládaných relé p a q při zachování toho, aby průchod byl možný pouze při zapnutím zapínacího kontaktu ovládaného relé r (první dvě větve dohromady realizují konjunkci $\neg p \,\&\, r$ a třetí větev spolu s pátou společně realizují konjunkci $p \,\&\, r$). Analogicky posledními dvěma větvemi je průchod umožněn při zapojení *obou* zapínacích kontaktů ovládaných relé p a q a jakékoli polohy kontaktů ovládaných relé r. Tím jsme popsali metodu, jak získáme zařízení ze šestého diagramu i v případě, že naše formule je původně zadána zcela nepřehledně.

Při předchozím zdůvodňování jsme pátou větev použili v obou případech, tedy „jako kdyby v našem zařízení byly dva exempláře této větve". Z technického pohledu je jasné, že takovéto „dvojnásobné" vyžití není na závadu. Z hlediska logiky by však bylo vhodné vědět, že formule $\mathcal{A}$ a formule $\mathcal{A} \vee \mathcal{A}$ mají týž význam, neboli, že jejich ekvivalence je dokazatelná ve výrokovém počtu. Že tomu tak skutečně je, si prokážete ve cv. I-2.25.

Předchozí aplikace popisovala konstrukci vhodného signalizačního zařízení pro libovolnou formuli tím, že jsme nejprve převedli formuli do normálního disjunktivního (nebo konjunktivního) tvaru. Metodou převedení formule do normálního disjunktivního tvaru však můžeme užít rovněž při popisu souboru knih, které si chceme vypůjčit, za předpokladu, že v knihovně jsou ochotni (a schopni) nám vydat jakýkoli soubor knih popsaný konjunkcí vlastností. Příslušnou disjunkci si již zajistíme sami opakovanými žádostmi o vhodné soubory knih. Další aplikace si již čtenář jistě vymyslí sám.

CVIČENÍ

I-2.1 Uveďme ještě tři úkoly, o nichž vnučka Porcie uvažovala. Při první úloze chtěla při ukázání skříněk opatřených níže uvedenými nápisy nápadníkům zadávat, že nejvýše jeden nápis není pravdivý. Jak by měl nápadník řešit tento úkol?

zlatá	stříbrná	olověná
Podobizna je v této skřínce a současně je také v olověné skřínce.	Podobizna je v olověné skřínce nebo je v této skřínce.	Podobizna není ve stříbrné skřínce nebo je v této skřínce.

I-2.2 Vnučka Porcie rovněž uvažovala možnost ponechat nápisy stejné jako v předchozím úkolu a pozměnit zadání na „přesně jeden nápis je nepravdivý". Ovlivnila by takováto změna vaši odpověď?

I-2.3 V třetí uvažované úloze vnučka Porcie chtěla opět užít svou oblíbenou tabulku „Podobizna je ve zlaté skřínce, právě když není ve stříbrné skřínce.“ a nápadník se měl dovědět, že přesně jeden nápis na skřínkách je pravdivý.

zlatá	stříbrná	olověná
Podobizna je ve zlaté skřínce, právě když není ve stříbrné skřínce.	Podobizna je v této skřínce.	Podobizna je ve stříbrné skřínce.

I-2.4 Při vzpomínce na svůj smutek, že úloha 6 nemá řešení, se chtěla Porciina vnučka nápadníků také vyptávat, jestli tato úloha nebude řešitelná po vypuštění podmínky, že ve skřínkách je schována přesně jedna podobizna (tj. připustíme-li možnost, že podobizen je ukryto více nebo naopak není uschována žádná). Jakou byste dal odpověď?

V následujících čtyřech cvičeních je každý z bratří buďto notorický lhář nebo vždy mluví pravdu.

I-2.5 První ze dvou bratří oznámí „Buď jsem lhář nebo můj bratr je pravdomluvný.“. Kdo jsou tito bratři?

I-2.6 První ze dvou bratří řekne: „Já jsem lhář a bratr nikoli.“. Jsou tito bratři pravdomluvní nebo lháři?

I-2.7 První ze tří bratří prohlásí: „Druhý bratr je lhář.“ a ten druhý se přidá s prohlášením: „Ten bratr, co mluvil, je lhář, právě když je lhář ten, co nemluvil.“. Je třetí bratr pravdomluvný nebo lhář? Můžete určit, kdo jsou mluvící bratři?

I-2.8 A nyní jako cvičení na konjunkci a disjunkci dostanete celý výlet přes šest rozcestí. Jdete postupně na rozcestích vpravo nebo vlevo?

Na prvním rozcestí první bratr sdělí: „Bratr je pravdomluvný a vaše cesta vede doprava.“ a druhý řekne: „Bratr je sice lhář, avšak vaše cesta opravdu vede doprava.“.

Na druhém rozcestí první bratr vyhlásí: „Oba jsme lháři a vaše cesta vede doprava.“ a druhý bratr souhlasí: „To je pravda.“.

Na třetím rozcestí získáte od prvního bratra informaci: „Alespoň jeden z nás je lhář a vaše cesta vede doprava.“ a druhý bratr zase souhlasí: „To je pravda.“.

Na čtvrtém rozcestí se již bratři neshodli. První tvrdil „Oba jsme lháři a vaše cesta vede doprava.“ a druhý mu odporoval: „Lhář je nanejvýš jeden z nás a vaše cesta vede doleva.“.

Podobně si bratři protiřečili i na dalším rozcestí, neboť první opět sděloval: „Oba jsme lháři a vaše cesta vede doprava.“ a druhý nesouhlasil: „Alespoň jeden z nás je pravdomluvný a vaše cesta vede doleva.“.

Na posledním rozcestí bratři vrátili k tvrzení jeden o druhém; první vypověděl: „Buď je bratr pravdomluvný nebo vaše cesta vede doprava.“ a druhý bratr tvrdil: „Buď je bratr lhář nebo vaše cesta vede doprava.“.

I-2.9 O čtyřech cizokrajných zvířatech přijíždějících do českých zoo víme:

(1) Nejede-li antilopa do Olomouce, nejede žirafa do Prahy.

(2) Zebra nemíří do Brna ani do Prahy.
(3) Antilopu očekávají ve Dvoře Králové nebo v Olomouci.
(4) Velbloud směřuje do Dvora Králové nebo do Brna.

Určete, do které zoo míří každé jednotlivé zvíře.

I-2.10 Nyní jsme se o přijíždějících zvířatech dověděli:

(1) Jestliže žirafa nejede do Prahy, jede velbloud do Brna.
(2) Zebra jede do Prahy nebo do Olomouce.
(3) Nemíří-li antilopa do Dvora Králové, čekají zebru v Praze.
(4) Velbloud nesměřuje do Brna.

Co z těchto údajů vyvodíte?

V následujících cvičeních se vyskytují trojice různě starých studentek, pokaždé mají studentky stejná křestní jména (Jana, Eva a Marie), každá z nich má jinou barvu vlasů (černou, hnědou a světlou), každá má ráda jiný předmět (matematiku, angličtinu a dějepis), jiný druh květin (kopretiny, růže a slunečnice) a jiný druh oblečení (sukně, kalhoty a šaty).

I-2.11 O první trojici studentek jsme se dověděli:

(1) Nemá-li milovnice angličtiny hnědé vlasy, je Marie černovlasá.
(2) Světlovláska se nejmenuje Jana nebo miluje matematiku.
(3) Jana nemá hnědé vlasy a milovnice dějepisu nemá vlasy černé.
(4) Jestliže Marie nemiluje dějepis, nemá Jana ráda matematiku.

Jaké jsou oblíbené předměty Jany a Marie a jakou mají studentky barvu vlasů?

I-2.12 O druhé skupině studentek nám sdělili:

(1) Milovnice matematiky má hnědé vlasy, právě když černovláska nemá v oblibě kopretiny.
(2) Eva má ráda matematiku, právě když světlovláska miluje růže.
(3) Jana nemá černé vlasy ani nemiluje slunečnice.
(4) Nejmenuje-li se milovnice dějepisu Marie, má hnědé vlasy.
(5) Eva má ráda dějepis nebo má hnědé vlasy.

Můžeme na základě těchto údajů určit vlastnosti jednotlivých studentek?

I-2.13 U kolika studentek ze třetí trojice můžete na základě informací:

(1) Ta, která má hnědé vlasy je starší než Eva.
(2) Milovnice slunečnic je mladší než světlovláska a je jí věkově bližší.
(3) Černovláska se nejmenuje Jana nebo nemiluje slunečnice.
(4) Nemá-li milovnice angličtiny hnědé vlasy, má Marie v oblibě růže.
(5) Jestliže Marie není matematička, má milovnice dějepisu hnědé vlasy.
(6) Milovnice slunečnic nemá v oblibě angličtinu.
(7) Marie nemá ráda angličtinu nebo milovnice růží má hnědé vlasy.
(8) Jana má v oblibě slunečnice nebo je Eva matematičkou.

určit oblíbené květy? Přidáme-li do první podmínky slova „a je jí věkově nejblíž“, budeme moci určit zamilované květiny pro více nebo stejně nebo méně studentek?

I-2.14 O poslední skupině studentek jsme zjistili:

(1) Černovláska miluje matematiku nebo má Jana světlé vlasy.
(2) Eva má v oblibě kopretiny nebo Jana nosí sukně.
(3) Marie nemá ráda slunečnice nebo je černovláskou.
(4) Matematička nechodí v sukních a příznivkyně dějepisu nemá hnědé vlasy.
(5) Milovnice slunečnic je starší než milovnice angličtiny.
(6) Černovláska je starší než ta, co nosí kalhoty.
(7) Milovnice růží je mladší než milovnice kopretin.
(8) Eva je mladší než ta, která má hnědé vlasy.

Popište vlastnosti jednotlivých studentek.

Následující cvičení pojednávají o čtveřicích fotbalistů; každou čtveřici tvoří fotbalisté stejných jmen (Karel, Václav, Milan, Jiří), v každé z nich jsou zastoupeni fotbalisté s různými posty (brankář, obránce, záložník a útočník), a nadto víme, že i jejich kluby jsou různé (Sparta, Slávia, Baník, Liberec) a že přijeli jeden po druhém auty různých barev (bílým, červeným, modrým a béžovým).

I-2.15 O první čtveřici fotbalistů jsme se dověděli:

(1) Karel je ze Slavie, právě když má modré auto.
(2) Jiří není útočníkem a brankář není z Baníku.
(3) Milan je útočníkem nebo nevlastní červené auto.
(4) Není-li Václav brankářem, je Karel z Baníku.
(5) Fotbalista z Liberce není záložníkem a vlastní béžové auto.
(6) Není-li Milan záložníkem, je Jiří ze Slávie.
(7) Útočník je ze Slavie a obránce není majitelem červeného auta.
(8) Není-li Jiří ze Sparty, není z ní ani brankář.

Stačí získané informace k určení postů fotbalistů, jejich příslušnosti ke klubům a barvy aut?

I-2.16 O druhé čtveřici fotbalistů máme informace:

(1) Jiří je obráncem nebo vlastní červené auto.
(2) Záložník přijel těsně po Karlovi a obránce těsně po Milanovi.
(3) Karel není brankářem.
(4) Je-li Milan útočníkem, je Karel záložníkem.
(5) Útočník má béžové auto a brankář nevlastní bílé.
(6) Milan je z Baníku nebo má béžové auto.
(7) Útočník není ani ze Slavie ani ze Sparty.
(8) Karel není ze Slavie a nemá béžové auto.

Umíte určit jaký má Karel post, jeho příslušnost ke klubu, barvu auta a dobu příjezdu vzhledem k ostatním fotbalistům?

Následující „zebry“ patří mezi nejtěžší v tomto paragrafu, píšeme je proto petitem.

I-2.17 O třetí skupině fotbalistů dokonce víme, že mají auta různých značek (Audi, BMW, Citroën, Dacia):

(1) Je-li Karel obráncem, je auto značky Audi červené.
(2) Nepřijel-li útočník poslední, přijelo první modré auto.
(3) Slávista přijel hned po Jiřím.
(4) Časový rozdíl mezi příjezdem záložníka a fotbalisty z Baníku byl nejmenší ze všech.
(5) Bílé auto přijelo hned po značce BMW.
(6) Milan je brankářem.
(7) Není-li auto značky Citroën červené, je auto značky Audi bílé.
(8) Je-li auto značky Citroën červené, pak nepřijelo první.
(9) Fotbalista z Liberce má béžové auto a brankář bílé.
(10) Milan je z Baníku nebo vlastní béžové auto.
(11) Útočník není ze Sparty ani Slávie.
(12) Fotbalista z Baníku nemá auto značky Audi.

Každému fotbalistovi přiřaďte jeho post, klub, barvu a značku auta a dobu jeho příjezdu vzhledem k ostatním.

Pět vnuček (Věra, Dana, Mirka, Veronika a Lenka) přijelo gratulovat dědečkovi, každá s jiným dárkem (kniha, svetr, peněženka, džbánek, kapesní nůž), z jiného města (Říčany, Slaný, Vlašim, Kolín a Beroun), jiným dopravním prostředkem (kolo, auto, autobus, vlak a jedna přišla pěšky) a každá z nich pokládá jinou domácí práci za nejnepříjemnější (vaření, uklízení, mytí nádobí, vynášení odpadků a zašívání).

I-2.18 O vnučkách jsme se dověděli:

(1) Nebydlí-li Věra v Kolíně, přijela vnučka z Vlašimi vlakem.
(2) Bydlí-li Věra v Kolíně, nepřivezla nůž.
(3) Vnučka z Říčan nedarovala nůž, právě když džbánek byl přivezen autem.
(4) Vnučka z Vlašimi se nejmenuje Dana nebo darovala peněženku.
(5) Lenka darovala svetr nebo nepřijela za Slaného.
(6) Nůž dovezlo kolo nebo auto.
(7) Dana bydlí ve Vlašimi a Lenka nebydlí v Říčanech.
(8) Svetr dojel vlakem a džbánek nenesla vnučka pěšky.
(9) Auto nevyjelo z Říčan ani nevezlo peněženku jako dar.
(10) Mirka přišla pěšky, nikoli však z Říčan.

Co věnovala která vnučka dědečkovi, z kterého přijela města a jak?

I-2.19 Zcela jiná skupina vnuček-gratulantek si později hrála v kruhu. O této skupině jsme se dověděli:

(1) Věra přijela ze Slaného, nepřivezla však knihu.
(2) Pěšky byl donesen nůž nebo kniha.
(3) Pokud není Věra z Kolína, byl svetr dovezen vlakem.
(4) Dovezlo-li džbánek auto, darovala nůž vnučka z Říčan.
(5) Jestliže Dana nevěnovala dědečkovi knihu, dala vnučka z Vlašimi peněženku.
(6) Byl-li svetr dovezen ze Slaného, byl nůž donesen pěšky.
(7) Věra stála vedle Dany.
(8) Vnučka ze Slaného stála vedle Lenky.
(9) Vnučka z Vlašimi stála vedle té, která přišla pěšky.

(10) Ty, co přijely na kole a autem, stály vedle sebe.
(11) Nůž byl dovezen autobusem, avšak nikoli Mirkou.
(12) Peněženka necestovala autem.
(13) Džbánek pocházel z Kolína nebo vnučka z Říčan nepřijela autobusem.

Určete dopravní prostředek a výchozí bod cest jednotlivých vnuček, jejich dary a vzájemné pořadí v kruhu.

I-2.20 Určují informace

(1) Vnučka, která nemá ráda vaření, a ta, co přišla pěšky, gratulovaly jedna za druhou (nevíme však v jakém pořadí).
(2) Knihu dostal dědeček až po svetru.
(3) Dědeček nedostal jako první dárek nůž, právě když poslední gratulantka přijela na kole.
(4) Ta vnučka, která nemiluje uklízení, přijela na kole, právě když nůž necestoval autobusem.
(5) Kniha byla dovezena autem nebo ji darovala ta, která nemiluje vaření.
(6) Lenka gratulovala jako druhá nebo svetr dala ta, která nerada vynáší smetí.
(7) Prostřední gratulantka nerada zašívá.
(8) Dana gratulovala první.
(9) Veronice nevadí mýt nádobí a vnučka z Berouna nemá nic proti vynášení smetí.
(10) Lenka bydlí v Říčanech.
(11) Ve Slaném nežije Věra ani Veronika.
(12) Ta, co nerada zašívá, přijela autem, nikoli však z Berouna.
(13) Na kole přijela vnučka z Kolína a nedarovala džbánek.
(14) Ta, co nerada vaří, darovala nůž a Věra podarovala dědečka svetrem.
(15) Odpůrkyně mytí nádobí nepřijela autobusem.

jednoznačně pro každou vnučku město, ve kterém bydlí, užitý dopravní prostředek, dar dědečkovi a nemilovanou práci, a rovněž jejich pořadí při gratulaci?

I-2.21 Axiom **VP3** a zákon transpozice můžeme samozřejmě shrnout do jediné ekvivalence $(p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p)$, kde v jedné implikaci jsou dvě negace a ve druhé žádná. V následujících ekvivalencích je v každé implikaci přesně jedna negace.

Ve výrokovém počtu dokažte jak ekvivalenci $(\neg p \to q) \equiv (\neg q \to p)$, tak také ekvivalenci $(p \to \neg q) \equiv (q \to \neg p)$.

Pokud potřebujete návod, je pro vás připraven. — Opravdu ho potřebujete? — Návod: V prvém případě užijte zákon dvojité negace (a důkaz ekvivalencí) a vyjděte z implikace $\neg p \to \neg\neg q$.

I-2.22 Dokažte ve výrokovém počtu formuli $(\neg p \to p) \to p$, která je v souladu s principem důkaz neutrální formulí.

Nedaří se bez návodu? — Opravdu? — Návod: Ukažte $\neg p \to p, \neg p \vdash p$ a užijte důkaz neutrální formulí.

I-2.23 Vyjádřete formule $p \mathbin{\&} (q \equiv \neg p)$ a $[p \to (q \mathbin{\&} r)] \vee q$ v úplném disjunktivním i konjunktivním normálním tvaru.

I-2.24 Pro formuli $(p \to q) \mathbin{\&} (\neg p \mathbin{\&} q) \mathbin{\&} (q \to p)$ uveďte úplný normální disjunktivní i konjunktivní tvar.

I-2.25 Následující dvě formule zachycují nepodstatnost opakování formule v konjunkci a disjunkci (tzv. **zákon idempotence**); ukažte, že jsou dokazatelné ve výrokovém počtu:

$$\mathcal{A} \equiv (\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{A}), \qquad\qquad \mathcal{A} \equiv (\mathcal{A} \vee \mathcal{A}).$$

I-2.26 Distributivitu konjunkce a disjunkce vyjadřují formule

$$[\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \,\&\, \mathcal{C})] \equiv [(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \,\&\, (\mathcal{A} \vee \mathcal{C})],$$
$$[\mathcal{A} \,\&\, (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})] \equiv [(\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{C})].$$

Prokažte jejich dokazatelnost ve výrokovém počtu. — Snažte se, toto je asi nejtěžší dokazatelnost ve výrokovém počtu, kterou vám předkládám. — Opravdu to nejde? — Tak zde je návod: Ukažte $\mathcal{A} \vdash (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \,\&\, (\mathcal{A} \vee \mathcal{C})$, poté $\mathcal{B} \,\&\, \mathcal{C} \vdash (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \,\&\, (\mathcal{A} \vee \mathcal{C})$; užijte důkaz rozborem případů. Dále prokažte $\neg\mathcal{A}, (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}), (\mathcal{A} \vee \mathcal{C}) \vdash \mathcal{B} \,\&\, \mathcal{C}$ a rovněž $\mathcal{A}, (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}), (\mathcal{A} \vee \mathcal{C}) \vdash \mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \,\&\, \mathcal{C})$, užijte důkaz neutrální formulí. — Pro druhou ekvivalenci využijte první ekvivalenci a de Morganova pravidla.

I-2.27 Navrhněte elektrické obvody signalizující výsledky hlasování pro komise s následujícími pravidly:

(a) tříčlenná komise, rozhoduje nadpoloviční většina;

(b) čtyřčlenná komise, rozhoduje nadpoloviční většina, v případě rovnosti hlasů rozhoduje hlas předsedy;

(c) pětičlenná komise, rozhoduje nadpoloviční většina s tou výjimkou, že jsou-li předseda a místopředseda současně proti, není návrh schválen.

Jednou z metod prokazování v matematické logice je indukce. Její použití ukážeme ve dvou velice jednoduchých případech (cv. I-2.29 a I-2.30). Ve cvičeních I-2.28 a I-2.29 dokážeme tzv. větu o dedukci, tzn. že dokazatelnost $\mathfrak{T}, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$ nastane, právě když nastane dokazatelnost $\mathfrak{T} \vdash \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. (Připomeňme, že odvozovací pravidlo důkaz dedukcí zaručuje možnost přechodu od první dokazatelnosti k druhé.) Při řešení úlohy I-2.29 také nahlédneme, jak je forma axiomů **VP1, VP2** vhodná pro ukázání možnosti používat odvozovací princip důkaz dedukcí.

I-2.28 Za předpokladu dokazatelnosti $\mathfrak{T} \vdash \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ prokažte dokazatelnost $\mathfrak{T}, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$.

I-2.29 Pomocí jediného pravidla modus ponens a za využití pouhých dvou axiomů **VP1, VP2** prokažte, že dokazatelnost $\mathfrak{T}, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$ má za důsledek dokazatelnost $\mathfrak{T} \vdash \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

Předpokládáme, že existuje důkaz formule $\mathcal{B}$ z předpokladů $\mathfrak{T}, \mathcal{A}$, tedy že existuje posloupnost $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k$ vyhovující podmínkám (i)–(iii) z definice důkazu (viz §1) *vzhledem k systému předpokladů* $\mathfrak{T}, \mathcal{A}$ a taková, že $\mathcal{D}_k$ je formulí $\mathcal{B}$. Chceme indukcí prokázat $\mathfrak{T} \vdash \mathcal{A} \to \mathcal{D}_i$ pro $i \leq k$.

Rozlište následující 4 možnosti a pro každou z nich z indukčních předpokladů prokažte požadovanou dokazatelnost $\mathcal{T} \vdash \mathcal{A} \to \mathcal{D}_i$:

(i) $\mathcal{D}_i$ je axiomem výrokového počtu
(ii) $\mathcal{D}_i$ je jedním z předpokladů systému $\mathcal{T}$
(ii′) $\mathcal{D}_i$ je formulí $\mathcal{A}$ (tedy význačným předpokladem ze systému předpokladů $\mathcal{T}, \mathcal{A}$)
(iii) $\mathcal{D}_i$ vznikne aplikací dedukčního pravidla modus ponens na některé formule v posloupnosti předcházející, tzn. existují j, j' (ostře) *menší* než i takové, že $\mathcal{D}_{j'}$ je formulí $\mathcal{D}_j \to \mathcal{D}_i$.

I-2.30 **Věta o dualitě**. Nechť ve formuli $\mathcal{A}$ výrokového počtu se vyskytují jenom spojky $\neg, \&, \vee$ a nechť formule $\mathcal{B}$ vznikne z $\mathcal{A}$ záměnou znaku & znakem $\vee$ a znaku $\vee$ znakem & a záměnou výrokové proměnné její negací. Pak $\vdash \neg\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Prokažte větu o dualitě indukcí podle složitosti formule $\mathcal{A}$ při použití de Morganových pravidel. Návod: z možností tvorby složitějších formulí na základě jednodušších (viz definici formule v §1 a její modifikaci v §2) musíme uvažovat pouze tři možnosti ($\neg\mathcal{C}$, $\mathcal{C} \,\&\, \mathcal{D}$ a $\mathcal{C} \vee \mathcal{D}$), protože ve výsledné formuli se nesmí vyskytovat spojky různé od $\neg, \&, \vee$.

§3

DODATEK K VÝROKOVÉMU POČTU

Celý tento paragraf je vlastně systém problémů předložených čtenáři k řešení. Problémy však nejsou voleny nahodile, jejich postupným řešením si čtenář odpoví na několik otázek souvisejících s předchozími paragrafy.

1) V prvním paragrafu jsme prohlásili, že všechna možná spojení dvou výroků jsou matematicky zachytitelná pomocí negace a implikace. Nyní tento výsledek podrobně předvedeme (viz úloha 1). Ve druhé úloze ukážeme, že implikaci lze vyjádřit pomocí negace a konjunkce nebo pomocí negace a disjunkce. Takže kterákoli z těchto dvojic je rovněž dostatečně silná k popisu všech možných spojení dvou výroků. Naproti tomu nahlédneme, že k popisu všech možných spojení dvou výroků nestačí ani současné užití implikace, konjunkce, disjunkce a ekvivalence (viz třetí úloha). Z tabulky 1 vyvodíme ještě zajímavější fakt, totiž existenci dvou spojení výroků (Shefferova operace a Peirceova operace) z nichž jedna každá sama o sobě postačuje pro popis všech možných spojení dvou výroků. Tyto operace podrobněji popíšeme v dalším textu, avšak přes jejich zajímavost je třeba zdůraznit, že logika vždy dávala a dává přednost spojením popsaným pomocí negace, implikace, konjunkce, disjunkce a ekvivalence, a to z důvodu větší intuitivnosti.

2) Hlavní náplní třetí kapitoly bude nedokazatelnost v predikátovém počtu. Ve výrokovém počtu je otázka nedokazatelnosti podstatně jednodušší, tabulky pravdivostních hodnot představují algoritmus umožňující rozpoznat, zda je formule výrokového počtu dokazatelná ze zadaných předpokladů, či nikoli. (Formule $\mathcal{A}$ není dokazatelná ze systému předpokladů $\mathfrak{T}$, právě když existuje ohodnocení výrokových proměnných, při kterém všechny předpoklady ze systému předpokladů $\mathfrak{T}$ jsou pravdivé, avšak formule $\mathcal{A}$ pravdivá není.) Při zkoumání nedokazatelnosti ve výrokovém počtu se proto jeví z našeho pohledu smysluplný pouze problém, zda by nebylo možno vynechat některý z vyvozovacích principů (modus ponens a axiomy **VP1–VP3**) a přesto dokázat tytéž formule jako v systému s tímto principem.

Ukážeme pomocí sémantických metod, že nelze zjednodušit systém vyvozovacích principů prostým vynecháním některého z nich (viz příklad 1 a úlohy 8, 10 a 11)[1]. Účelným nástrojem se ukáže vícehodnotová (přesněji trojhodnotová) logika, kterou v tomto paragrafu využijeme jen jako prostředek k prokazování, v závěru knihy se však budeme vícehodnotovými logikami trochu zabývat pro ně samé a uvedeme i jejich motivaci. Vedlejším efektem našeho nynějšího účelového

---

[1] Jsou však možné axiomatické systémy s menším počtem *jiných* axiomů. Například (viz [Me]) je možno přijmout spolu s odvozovacím pravidlem modus ponens jako jediný axiom formuli $\big[\big([(p \to q) \to (\neg r \to \neg s)] \to r\big) \to t\big] \to [(t \to p) \to (s \to p)]$.

užití trojhodnotové sémantiky však bude — pochopitelně vítané — seznámení s některými základními pojmy vícehodnotové logiky (ve třetí a sedmé tabulce jsou po řadě uvedeny tzv. Heytingova a Łukasiewiczova sémantika implikace a v tabulkách 2, 9 jsou předvedeny dvě možnosti sémantiky negace).

Ideu prokazování přebíráme z knihy [Ch], naše konkrétní volba ohodnocení se v některých případech liší, neboť se snažíme o větší názornost.

Abychom neúměrně nezatěžovali poznámky pod čarou tabulkami, jsou všechny potřebné tabulky počínaje tabulkou B soustředěny na konec knihy.

* * *

První tabulka uvádí všechna možná ohodnocení spojení dvou výroků na základě ohodnocení výroků původních (sloupců musí být přesně tolik, kolik je zobrazení ze čtyřprvkové množiny do dvouprvkové množiny $\{0, 1\}$, tzn. $2^4 = 16$).

p	q	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0	0	1	1	1
		$p \mathbin{\&} \neg p$	$p \mathbin{\&} q$	$p \mathbin{\&} \neg q$	$\neg p \mathbin{\&} q$	$\neg(p \vee q)$	p	q	$p \equiv q$
		$\bot$	$p \mathbin{\&} q$			$p \downarrow q$			$p \equiv q$

p	q	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	0	1
		$\neg(p \equiv q)$	$\neg q$	$\neg p$	$p \vee q$	$q \rightarrow p$	$p \rightarrow q$	$\neg(p \mathbin{\&} q)$	$p \vee \neg p$
				$\neg p$	$p \vee q$		$p \rightarrow q$	$p \mid q$	$\top$

Tabulka 1

V předposledním řádku je vyjádřeno spojení výroků p a q, jehož pravdivostní tabulce odpovídá příslušný sloupec, a to spojení zapsatelné pomocí nanejvýše dvou znaků ze systému znaků $\neg, \rightarrow, \&, \vee, \equiv$.

V poslední řádce první tabulky jsou vyznačena nejvýznamnější spojení (maximálně) dvou výroků. V prvním sloupci je identická nepravda (znak $\bot$), v posledním identická pravda (znak $\top$). Kromě implikace a negace zkoumaných v prvním paragrafu a konjunkce, disjunkce a ekvivalence, kterými jsme se zabývali v paragrafu druhém, jsou dále vyznačeny **Shefferova operace** (sloupec 15) a v pátém sloupci je **Peirceova** (také Nicodova) **operace.** Význam těchto spojení vynikne na základě páté a šesté úlohy. Pro zápis těchto spojení je zvykem používat po řadě symboly $|$ a $\downarrow$.

Velice zajímavá spojení vytváří čeština pomocí slova „ani". Spojuje totiž dva výroky např. „Petr jedl." a „Pavel pil." do věty „Ani Petr nejedl, ani Pavel nepil.". Strukturu poslední věty můžeme vyjádřit pomocí „Ani ne…, ani ne…", tzn. jako konjunkci dvou negací (konjunkce a negace se ozývá již v samotném slově „a-ni"). Slovo „ani" použité v uvedeném významu chápe česká gramatika jako spojku zápornou slučovací. Celý výklad o spojce „ani" pochopitelně vrcholí konstatováním, že vazba „Ani ne…, ani ne…" je matematizována Peirceovou operací, která výrokům p, q přiřazuje výrok $\neg p \mathbin{\&} \neg q$. Naproti tomu Shefferově operaci přiřazující výrokům p, q výrok $\neg(p \mathbin{\&} q)$, neboli výrok $\neg p \vee \neg q$, neodpovídá v češtině vhodným způsobem žádná spojka („nebo" nevyžaduje, aby spojované výroky byly negacemi).

Úloha 1. Ukažte. že existuje přesně 14 formulí s nejvýše dvěma výrokovými proměnnými p, q a zapsatelných pomocí nanejvýše dvou znaků ze systému $\neg, \rightarrow$, kteréžto formule mají po dvou různé tabulky pravdivostních hodnot. Zapište dvě zbývající spojení (konjunkci a Peirceovu operaci $\neg p \mathbin{\&} \neg q$) pomocí maximálně tří znaků ze systému znaků $\neg, \rightarrow$.

Úloha 2. Vyjádřete implikaci pomocí negace a konjunkce, tzn. nalezněte for-

---

*u*1)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow p$	$\neg(p \rightarrow p)$	$p \rightarrow q$	$\neg(p \rightarrow q)$
0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	1	0

p	q	$q \rightarrow p$	$\neg(q \rightarrow p)$	$\neg p \rightarrow q$	$p \rightarrow \neg q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow p$	$(q \rightarrow p) \rightarrow q$
0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1	0
1	1	1	0	1	0	1	1

Tabulka A

V tabulce A je ukázáno 14 formulí výrokového počtu s nejvýše dvěma proměnnými p, q, které mají různé tabulky pravdivostních hodnot. V následujícím přehledu uvedeme všechny možné formule s nejvýše dvěma znaky ze systému $\neg, \rightarrow$ a s nejvýše dvěma proměnnými p, q; zjistíme, že všechny formule, jež nejsou mezi 14 formulemi z tabulky A, jsou v přehledu uvedeny jako „duplicitní" — v méně jasných případech je navíc uveden návod jejich přepisu.

Beze spojek: p, q.
Jen s negací: $\neg p, \neg q$; duplicitní: $\neg\neg p$ a $\neg\neg q$.
S jednou implikací: $p \rightarrow p, p \rightarrow q, q \rightarrow p$; duplicitní: $q \rightarrow q$.
S implikací a negací vnější: $\neg(p \rightarrow p), \neg(p \rightarrow q), \neg(q \rightarrow p)$; duplicitní $\neg(q \rightarrow q)$.
S implikací a negací vnitřní: $\neg p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q$; duplicitní: $\neg q \rightarrow p, q \rightarrow \neg p$, $p \rightarrow \neg p$ (je $\neg p$) a $\neg p \rightarrow p$ (je p).
Se dvěma implikacemi: $(p \rightarrow q) \rightarrow p, (q \rightarrow p) \rightarrow q$; duplicitní: $p \rightarrow (p \rightarrow p)$ (identicky pravda), $p \rightarrow (p \rightarrow q)$ (je $p \rightarrow q$), $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ (identicky pravda), $q \rightarrow (p \rightarrow p)$ (identicky pravda), $(p \rightarrow p) \rightarrow p$ (je p), $(p \rightarrow p) \rightarrow q$ (je q) a $(q \rightarrow p) \rightarrow p$ (je $\neg p \rightarrow q$).
Zápisy se dvěma resp. třemi znaky q jsou symetrické uvedeným zápisům s žádným nebo jediným znakem q, a tudíž kromě již uvedené formule $(q \rightarrow p) \rightarrow q$ jsou všechny takovéto formule duplicitní. Konjunkce $p \mathbin{\&} q$ je tvaru $\neg(p \rightarrow \neg q)$; Peirceova operace $\neg(p \vee q)$ je tvaru $\neg(\neg p \rightarrow q)$.

muli (užívající pouze uvedené spojky), jejíž tabulka pravdivostních hodnot se od základní tabulky pravdivostních hodnot implikace liší pouze záhlavím. Analogicky vyjádřete implikaci pomocí negace a disjunkce. Tím prokážete explicitně, že jak pomocí konjunkce a negace, tak také pomocí disjunkce a negace je možno vyjádřit všechna možná spojení dvou výroků.

Úloha 3. Prokažte, že negaci nevyjádříme pomocí implikace, konjunkce, disjunkce a ekvivalence, a to ani užitím všech těchto spojek najednou. Návod: zvažte, které hodnoty nabývají zkoumané spojky pro ohodnocení proměnných p, q hodnotou 1.

Úloha 4. Ukažte, že pomocí negace a ekvivalence nevyjádříte implikaci. Návod: sledujte sudost výskytu hodnoty 1 v tabulkách pravdivostních hodnot formulí vytvářených pomocí negace a ekvivalence.

Úloha 5. Vyjádřete negaci jak pomocí Shefferovy operace, tak také pomocí operace Peirceovy. Následně vyjádřete implikaci pomocí jedné každé z těchto operací.

Úloha 6. Ukažte, že žádné spojení výroků, jehož tabulka pravdivostních hodnot je popsána některým sloupcem tabulky 1 různým od sloupců 5 a 15, již samo o sobě nestačí pro popis všech formulí výrokového počtu vytvořitelných s pomocí (maximálně) dvou výrokových proměnných p a q. Návod: užijte ideu ze třetí úlohy.

Jako kuriozitu jsme v prvním paragrafu uvedli systém odvozovacích principů s odvozovacím pravidlem modus ponens a jediným axiomem. Tento systém užíval jako spojky negaci a implikaci. Již r. 1917 však navrhl J. G. P. Nicod systém užívající dokonce pouze jedinou, a to Shefferovu, spojku a jenž měl rovněž jediné odvozovací pravidlo a jediný axiom. Pravidlem nebyl modus ponens, ale pravidlo dovolující odvození formule $\mathcal{R}$ z formulí $\mathcal{P}$ a $\mathcal{P}|(\mathcal{Q}|\mathcal{R})$; o intuitivnosti axiomu $[\mathcal{P}|(\mathcal{Q}|\mathcal{R})]|[[\mathcal{S}|(\mathcal{S}|\mathcal{S})]|((\mathcal{T}|\mathcal{Q})|[(\mathcal{P}|\mathcal{T})|(\mathcal{P}|\mathcal{T})])]$ je možno s úspěchem pochybovat.

* * *

[u2)] Implikaci $\mathsf{p} \rightarrow \mathsf{q}$ vyjádříme formulí $\neg\mathsf{p} \vee \mathsf{q}$ a také formulí $\neg(\mathsf{p}\ \&\ \neg\mathsf{q})$, viz tabulku B na konci knihy.

[u3)] Indukcí ukážeme, že všechny formule vytvořené pouze pomocí spojek implikace, konjunkce, disjunkce a ekvivalence nabývají pravdivostní hodnoty 1 pro ohodnocení proměnných hodnotou 1. Pro popis negace by však bylo potřeba, abychom alespoň někdy dostali hodnotu 0.

[u4)] Indukcí ukážeme, že v tabulkách pravdivostních hodnot všech formulí vytvořených pouze pomocí negace a ekvivalence je vždy sudý počet hodnot 0. V základní tabulce pravdivostních hodnot implikace je však přesně jedna hodnota 0.

[u5)] $\neg\mathsf{p}$ je vyjádřitelné zápisem $\mathsf{p}|\mathsf{p}$ a také zápisem $\mathsf{p} \downarrow \mathsf{p}$. O implikaci $\mathsf{p} \rightarrow \mathsf{q}$ již víme, že je ekvivalentní formuli $\neg\mathsf{p} \vee \mathsf{q}$, je tedy tvaru $\mathsf{p}|\neg\mathsf{q}$, takže také tvaru $\mathsf{p}|(\mathsf{q}|\mathsf{q})$. Zápisu $(\mathsf{p} \downarrow \mathsf{p}) \downarrow \mathsf{q}$ odpovídá $\neg(\neg\mathsf{p} \vee \mathsf{q})$ neboli $\neg(\mathsf{p} \rightarrow \mathsf{q})$. Pročež $\mathsf{p} \rightarrow \mathsf{q}$ je možno vyjádřit pomocí $[(\mathsf{p} \downarrow \mathsf{p}) \downarrow \mathsf{q}] \downarrow [(\mathsf{p} \downarrow \mathsf{p}) \downarrow \mathsf{q}]$.

[u6)] Okamžitě můžeme vyřadit ta spojení, která v posledním řádku tabulky 1 nabývají hodnoty 1, protože pomocí těchto spojení nikdy nemůžeme vyjádřit formuli $\neg\mathsf{p}$, a analogicky vyřadíme ta spojení, která v prvém řádku nabývají hodnotu 0. Zbudou jen čtyři možnosti, ale z nich dvě spojení (sloupce 10 a 11 tabulky 1) jsou ve skutečnosti unární, takže neumožňují vyjádřit druhou proměnnou.

p	¬p
0	1
1/2	1/2
1	0

Tabulka 2

p	q	p → q
0	0	1
0	1/2	1
0	1	1
1/2	0	0
1/2	1/2	1
1/2	1	1
1	0	0
1	1/2	1/2
1	1	1

Tabulka 3

Na počátku paragrafu jsme uvedli, že nástrojem pro prokazování nezávislosti jednotlivých vyvozovacích principů bude trojhodnotová logika. Nechť tedy pravdivostní hodnoty nejsou dvě (0 a 1), nýbrž tři (0, 1/2 a 1). (Hodnotu 1/2 je možno interpretovat např. jako „nevím“). Základní tabulka pravdivostních hodnot pro negaci bude mít tři řádky (viz např. tabulku 2 popisující představu „když neznám pravdivost p, nemohu znát ani pravdivost ¬p“, tzv. Łukasiewiczova negace), pro implikaci již 9 řádků (viz např. třetí tabulku, kterou navrhl Arend Heyting při zkoumání sémantiky intuicionistické logiky — několik slov o této části logiky najde čtenář v poslední kapitole). Je třeba důrazně upozornit, že při sestrojování tabulek pravdivostních hodnot v tomto paragrafu je třeba důsledně vycházet ze zadaných základních tabulek pravdivostních hodnot a nespoléhat se na intuici.

I v trojhodnotové logice nazýváme tautologií formuli, jejíž pravdivostní hodnota je 1 při *každém* ohodnocení výrokových proměnných, které se v ní vyskytují (tautologie nejenže nesmí nabývat hodnoty 0, povoleno není ani nabytí hodnoty 1/2). Předpokládejme, že se nám podaří sestrojit takové tabulky pravdivostních hodnot, že jsou tautologiemi právě dva axiomy z axiomů **VP1** − **VP3** a modus ponens je korektní v tom smyslu, že je-li implikace tautologií a současně je tautologií i její antecedent, je nutně tautologií i její konsekvent. Ukážeme si, že takováto konstrukce zajistí nedokazatelnost axiomu, který není tautologií, na oněch dvou axiomech, jež tautologiemi jsou. Předpokládáme-li dokazatelnost zkoumaného axiomu, předpokládáme existenci posloupnosti formulí formulí $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k$ výrokového počtu takovou, že pro každé i menší nebo rovno k je formule $\mathcal{D}_i$ buďto jedním z uvažované dvojice axiomů-tautologií, nebo vzniká aplikací dedukčního pravidla modus ponens na dvě formule v posloupnosti předcházející a takovou, že axiom, jenž není tautologií, je posledním členem posloupnosti. Protože alespoň jedna formule ve zkoumané posloupnosti není tautologií, musí existovat nejmenší j menší nebo rovno k takové, že $\mathcal{D}_j$ není tautologií. Formule $\mathcal{D}_j$ nemůže být jedním z axiomů z naší dvojice, neboť oba axiomy ve dvojici jsou tautologiemi. Takže formule $\mathcal{D}_j$ musela být získána pomocí aplikace modus ponens na dvě formule, které *předcházejí* formuli $\mathcal{D}_j$. To však není možné, protože všechny formule předcházející formuli $\mathcal{D}_j$ jsou tautologiemi, a tedy každá formule vynikající užitím modus ponens na dvě z nich musí být také tautologií.

Příklad 1. Uvažujme trojhodnotovou sémantiku zadanou tabulkami 2 a 3. Systém obsahující **VP1**, **VP2** a modus ponens je korektní vůči uvedené sémantice (ještě jednou: tzn. každý zmíněný axiom má při *každém* pravdivostním ohodnocení hodnotu 1, a nadto nabývají-li formule $\mathcal{P}$ a $\mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ při nějakém ohodnocení hodnoty 1, musí pro toto ohodnocení nabývat hodnotu 1 rovněž formule $\mathcal{Q}$).

Z tabulky 3 je patrné, že nabývá-li konsekvent implikace hodnotu 1, nabývá hodnotu 1 celá implikace. Pokud tedy zjistíme, že hodnota konsekventu je 1 (např. tím, že hodnota konsekventu konsekventu je 1), není již zapotřebí podrobně vyplňovat další hodnoty ve vyšetřovaném řádku, hodnota celé implikace je určitě 1. Touto úvahou si podstatně zjednodušíme vyplnění čtvrté tabulky, která předvádí korektnost axiomu **VP2:**

p	q	r	$p \to r$	$p \to q$	$(p \to q) \to (p \to r)$	$q \to r$	$p \to (q \to r)$	**VP2**
0	0	0	1					1
0	0	1/2	1					1
0	0	1	1					1
0	1/2	0	1					1
0	1/2	1/2	1					1
0	1/2	1	1					1
0	1	0	1					1
0	1	1/2	1					1
0	1	1	1					1
1/2	0	0	0	0	1			1
1/2	0	1/2	1					1
1/2	0	1	1					1
1/2	1/2	0	0	1	0	0	0	1
1/2	1/2	1/2	1					1
1/2	1/2	1	1					1
1/2	1	0	0	1	0	0	0	1
1/2	1	1/2	1					1
1/2	1	1	1					1
1	0	0	0	0	1			1
1	0	1/2	1/2	0	1			1
1	0	1	1					1
1	1/2	0	0	1/2	0	0	0	1
1	1/2	1/2	1/2	1/2	1			1
1	1/2	1	1					1
1	1	0	0	1	0	0	0	1
1	1	1/2	1/2	1	1/2	1/2	1/2	1
1	1	1	1					1

Tabulka 4

Korektnost axiomu **VP1** je vypočtena v níže uvedené páté tabulce; korektnost modus ponens je velice jednoduchá: jak implikace, tak také antecedent nabývají 1 pouze v posledním řádku tabulky 3, avšak v tomto řádku je rovněž hodnota konsekventu jedničkou. Šestá tabulka ukazuje pravdivostní ohodnocení výrokových proměnných p a q, při němž axiom **VP3** není ohodnocen hodnotou 1.

p	q	q → p	**VP1**
0	0	1	1
0	1/2	0	1
0	1	0	1
1/2	0	1	1
1/2	1/2	1	1
1/2	1	1/2	1
1	0	1	1
1	1/2	1	1
1	1	1	1

Tabulka 5

p	q	¬p	¬q	¬q → ¬p	p → q	**VP3**
1/2	0	1/2	1	1/2	0	0

Tabulka 6

V trojhodnotové sémantice zadané tabulkami 2 a 3 jsme ukázali korektnost axiomů **VP1** a **VP2** a odvozovacího pravidla modus ponens, naproti tomu jsme nalezli ohodnocení, při kterém není pravdivý axiom **VP3**. Takže při využití pouhých vyvozovacích principů modus ponens a axiomů **VP1** a **VP2** není dokazatelný axiom **VP3**.

Úloha 7. Prokažte, že při ohodnocení daném základními tabulkami pravdivostních hodnot z předchozího příkladu jsou tautologiemi formule $p \to \neg\neg p$ a formule $\neg\neg p \to p$. Naproti tomu prokažte, že zákon Dunse Scota (tj. formule $\neg p \to (p \to q)$), formule $\mathcal{A}$ tvaru $(p \to q) \to [(p \to \neg q) \to \neg p]$ a rovněž formule $\mathcal{B}$ tvaru $(\neg p \to q) \to [(\neg p \to \neg q) \to p]$ tautologiemi nejsou.

Úloha 8. Uvažme trojhodnotovou sémantiku výrokové logiky, při které je pravdivostní hodnota negace popsána tabulkou 2 a pravdivostní hodnota implikace je zadána sedmou tabulkou; tuto sémantiku navrhl Jan Łukasiewicz již na počátku zkoumání vícehodnotových logik. Ukažte, že vůči této sémantice jsou korektní všechny vyvozovací principy s výjimkou axiomu **VP2.**

p	q	p → q
0	0	1
0	1/2	1
0	1	1
1/2	0	1/2
1/2	1/2	1
1/2	1	1
1	0	0
1	1/2	1/2
1	1	1

Tabulka 7

Úloha 9. Prokažte, že v sémantice z předchozí úlohy je korektní tranzitivita implikace, tj. pravdivost formule $(p \to q) \to [(q \to r) \to (p \to r)]$. Tím prokážete (užívajíce výsledek předešlé úlohy), že tranzitivita implikace je skutečně slabší požadavek než axiom **VP2** a že prostým nahrazením axiomu **VP2** tran-

u7) viz tabulky C–F na konci knihy

u8) Korektnost axiomů **VP1, VP3** je prokázána v tabulce G pravdivostních hodnot těchto formulí. Modus ponens je korektní vůči zkoumané sémantice, neboť jak antecedent, tak celá implikace nabývají pravdivostní hodnoty 1 v sedmé tabulce pouze v posledním řádku, na tomto řádku však nabývá rovněž konsekvent pravdivostní hodnoty 1. Ve zkoumané sémantice není pravdivý axiom **VP2** pro ohodnocení výrokových proměnných p, q hodnotou 1/2 a proměnné r hodnotou 0, což dokládá tabulka H.

zitivitou implikace opravdu oslabíme[2] systém axiomů **VP1**–**VP3**. Pro potřeby závěrečné kapitoly ukažte dále, že ve vyšetřované sémantice je pravdivá formule $[(p \to \neg p) \to p] \to p$.

Úloha 10. Uvažte ohodnocení implikace dané tabulkou 8 a ohodnocení negace dané druhou tabulkou. Jsou v takové sémantice korektní všechny vyvozovací principy s výjimkou axiomu **VP1**?

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1/2	1
0	1	1
1/2	0	0
1/2	1/2	1
1/2	1	1
1	0	0
1	1/2	0
1	1	1

Tabulka 8

p	$\neg p$
0	1
1/2	0
1	0

Tabulka 9

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1/2	1
0	1	1
1/2	0	0
1/2	1/2	1
1/2	1	1
1	0	0
1	1/2	1
1	1	1

Tabulka 10

Úloha 11. Nezávislost kterého vyvozovacího principu výrokového počtu na ostatních týkajících se pouze implikace prokazuje sémantika popsaná tabulkou 10 pro implikaci? Ukažte, že při ohodnocení negace zadaném tabulkou 9 je axiom **VP3** korektní (devátá tabulka popisuje tzv. pesimistickou negaci — negace hodnoty „nevím" je nepravda).

Úloha 12. Je korektní axiom **VP3** v sémantice určené tabulkami 2 a 10?

Úloha 13. Je korektní axiom **VP3** v sémantice určené tabulkami 3 a 9?

---

[2] A. Tarski ve svém axiomatickém systému (viz [T1]) přijímá modus ponens, axiomy **VP1, VP3,** tranzitivitu implikace, avšak navíc axiom $[p \to (p \to q)] \to (p \to q)$.

[u9] Korektnost tranzitivity implikace předvádí tabulka I, korektnost druhé formule ukazuje tabulka J.

[u10] Správnost odpovědi „ano" na dotaz po korektnosti axiomů **VP2, VP3** dokumentují tabulky M a K, tabulka L předvádí ohodnocení, při kterém je nepravdivý axiom **VP1.** Odvozovací pravidlo modus ponens je opět korektní vůči vyšetřované sémantice, neboť jak antecedent, tak celá implikace nabývají pravdivostní hodnoty 1 v tabulce 8 pouze v posledním řádku, na tomto řádku však opětovně nabývá rovněž konsekvent pravdivostní hodnoty 1.

[u11] Korektní není modus ponens, protože v tabulce 10 v předposledním řádku nabývá antecedent pravdivostní hodnoty 1, konsekvent hodnoty 1/2, a přesto celá implikace je pravdivostně ohodnocena hodnotou 1. Pravdivost axiomů **VP1**–**VP3** ukazují tabulky N a O.

[u12] Není, volte ohodnocení při kterém p nabývá hodnoty 1/2 a q hodnoty 0 (viz tabulka P). Pokud jsme volili tabulku 10 k prokázání nezávislosti modu ponens na ostatních principech, museli jsme zcela určitě zvolit jiné ohodnocení negace než to, které bylo zadána tabulkou 2.

[u13] Není, volte ohodnocení při kterém p nabývá hodnoty 1 a q hodnoty 1/2 (viz tabulka Q). K prokázání nezávislosti třetího axiomu na ostatních vyvozovacích principech jsme tudíž

Úloha 14. V sémantice zadané tabulkami 3 a 9 zjistěte, zda jsou tautologiemi formule $\neg\neg p \to p$, $p \to \neg\neg p$, zákon Dunse Scota $p \to (\neg p \to q)$, formule $\mathcal{A}$ tvaru $(p \to q) \to [(p \to \neg q) \to \neg p]$ a rovněž formule $\mathcal{B}$ tvaru $(\neg p \to \neg q) \to [(\neg p \to q) \to p]$.

*

Úloha 15. V úloze 1 jsme viděli, že v klasické dvouhodnotové sémantice, ve které jsou negace a implikace popsány základními tabulkami pravdivostních hodnot podle prvního paragrafu, jsou všechna možná spojení dvou výroků vyjádřitelná pomocí negace a implikace. Prokažte, že v trojhodnotové sémantice zadané základními tabulkami pravdivostních hodnot 2 a 3 z tohoto paragrafu nevyjádříme všechna možná spojení dvou výroků. Návod: Upravte ideu z úlohy 3.

Zopakujme, že tabulky, na něž jsme se odkazovali v úlohách týkajících se trojhodnotové logiky (tj. počínaje tabulkou B) jsou soustředěny ku konci knihy.

* * *

Ve druhém paragrafu jsme zaváděli konjunkci, disjunkci a ekvivalenci jako nové logické operace. Provedli jsme to vlastně dvojím způsobem. Nejprve jsme v úloze 1 §2 sémanticky nalezli formule pouze s implikací a negací, jejichž tabulky (jen s hodnotami pravda a nepravda) se od tabulek zaváděných operací liší pouze záhlavím. Tím jsme popsali algoritmus pro přepis formulí s novými spojkami na formule obsahující pouze $\to$ a $\neg$. Pak jsme předvedli odvozovací pravidla pro nově zaváděné spojky (např. důkaz konjunkce a důkaz užitím konjunkce) a slíbili jsme, že v tomto paragrafu ukážeme jednoznačnost operací, které jsou popsány těmito dedukčními pravidly.

K tomuto účelu zkoumejme systém axiomů založených po řadě na odvozovacích pravidlech pro konjunkci, disjunkci a ekvivalenci:

$(\&_1)$ $(\mathcal{P} \mathbin{\&} \mathcal{Q}) \to \mathcal{P}$	$(\vee_1)$ $\mathcal{P} \to (\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$
$(\&_2)$ $(\mathcal{P} \mathbin{\&} \mathcal{Q}) \to \mathcal{Q}$	$(\vee_2)$ $\mathcal{Q} \to (\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$
$(\&_3)$ $\mathcal{P} \to [\mathcal{Q} \to (\mathcal{P} \mathbin{\&} \mathcal{Q})]$	$(\vee_3)$ $(\mathcal{P} \to \mathcal{R}) \to ((\mathcal{Q} \to \mathcal{R}) \to [(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \to \mathcal{R}])$
$(\equiv_1)$ $(\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}) \to (\mathcal{P} \to \mathcal{Q})$	
$(\equiv_2)$ $(\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}) \to (\mathcal{Q} \to \mathcal{P})$	
$(\equiv_3)$ $(\mathcal{P} \to \mathcal{Q}) \to [(\mathcal{Q} \to \mathcal{P}) \to (\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q})]$	

---

mohli použít místo tabulek 2 a 3 také tabulky 3 a 9; v našem příkladu 1 jsme však dali přednost přirozenější sémantice negace. (Druhý řádek tabulky Q je pro řešení vyšetřované úlohy nadbytečný, ukazuje však, že k prokázání nekorektnosti **VP3** vzhledem k sémantice zadané tabulkami 3 a 9 nelze použít stejného ohodnocení jako v prvém příkladu, kde byla uvažována sémantika popsaná tabulkami 2 a 3.)

[u14)] Stejně jako v úloze 7 je tautologií formule $p \to \neg\neg p$; dále, opět stejně jako v citované úloze, tautologií není formule $\mathcal{B}$. Formule $\neg\neg p \to p$ v úloze 7 tautologií byla, nyní není, a naproti tomu zákon Dunse Scota a formule $\mathcal{A}$ ve srovnávané úloze tautologiemi nebyly, nyní jsou. Oznámené výsledky jsou předvedeny v tabulkách R–T.

[u15)] Zvažme unární „spojku“, jejíž základní pravdivostní tabulka přiřazuje všem třem hodnotám 0, 1/2, 1 konstantně hodnotu 1/2. Uvědomte si, že pomocí tabulek 2 a 3 přiřadíme jakékoli dvojici nul a jedniček vždy nulu nebo jedničku a nikdy hodnotu 1/2.

Pro získání důkladnější motivace představených formulí pro konjunkci uvažme nejprve pravidlo důkaz užitím konjunkce $(\mathcal{P} \mathbin{\&} \mathcal{Q}) \vdash \mathcal{P}$. Jestliže na toto pravidlo použijeme pravidlo důkaz dedukcí, získáme dokazatelnost formule $(\&_1)$ ve výrokovém počtu, v jehož jazyce je kromě negace a implikace povolena také konjunkce. Na druhé straně současná aplikace modus ponens a užití formule $(\&_1)$ nahradí užití prvního pravidla důkaz konjunkce. Zcela analogicky použijeme-li na pravidlo důkaz konjunkce $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \vdash \mathcal{P} \mathbin{\&} \mathcal{Q}$ dvakrát pravidlo důkaz dedukcí, získáme dokazatelnost formule $(\&_3)$ ve výrokovém počtu s obohaceným jazykem a současná dvojitá aplikace modus ponens a formule $(\&_3)$ nahradí užití odvozovacího pravidla důkaz užitím konjunkce.

Při formulaci axiomu $(\vee_3)$ se inspirujeme jedním odvozovacím pravidlem důkaz rozborem případů a nikoli dvěma pravidly důkaz užitím disjunkce, čímž snížíme počet axiomů[3)]. Motivace představených formulí pro disjunkci a ekvivalenci užívá podobných idejí jako jsme užili pro motivování konjunkce.

Pokud se uvažuje hned od počátku výrokový počet se všemi obvyklými operacemi, je zvykem přidávat výše představené formule jako axiomy popisující chování konjunkce, disjunkce a ekvivalence k našim axiomům **VP1–VP3** (v tomto případě vystačíme s jediným pravidlem modus ponens). O uvedených formulích pojednáme ještě v závěru našeho textu při popisu intuicionistické logiky.

Abychom ukázali jednoznačnost formule zavedené odvozovacími pravidly důkaz konjunkce a důkaz užitím konjunkce, nahraďme nyní ve formulích $(\&_1)$–$(\&_3)$ konjunkci $\mathcal{P} \mathbin{\&} \mathcal{Q}$ nějakou formulí $\mathcal{A}$, tj. uvažujme formule

$(\&_1^{\mathcal{A}})$ $\mathcal{A} \to \mathcal{P}$
$(\&_2^{\mathcal{A}})$ $\mathcal{A} \to \mathcal{Q}$
$(\&_3^{\mathcal{A}})$ $\mathcal{P} \to (\mathcal{Q} \to \mathcal{A})$.

Naším cílem je dokázat ekvivalentnost formulí $\mathcal{P} \mathbin{\&} \mathcal{Q}$ a $\mathcal{A}$, tzn. ze systému předpokladů $(\&_1)$–$(\&_3)$, $(\&_1^{\mathcal{A}})$–$(\&_3^{\mathcal{A}})$, dokázat jak formuli $(\mathcal{P} \mathbin{\&} \mathcal{Q}) \to \mathcal{A}$, tak také formuli $\mathcal{A} \to (\mathcal{P} \mathbin{\&} \mathcal{Q})$.

Nejprve vycházejme ze systému předpokladů $(\&_1)$–$(\&_3)$, $(\&_1^{\mathcal{A}})$–$(\&_3^{\mathcal{A}})$, $\mathcal{P} \mathbin{\&} \mathcal{Q}$. Z formulí $(\&_1)$–$(\&_2)$ vyvodíme obě formule $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$. Užívajíce modus ponens, „vše dokázané lze použít k dokazování“ a formuli $(\&_3^{\mathcal{A}})$ nahlédneme dokazatelnost formule $\mathcal{A}$; použitím důkazu dedukcí tedy obdržíme dokazatelnost implikace $(\mathcal{P} \mathbin{\&} \mathcal{Q}) \to \mathcal{A}$ ze systému předpokladů $(\&_1)$–$(\&_3)$, $(\&_1^{\mathcal{A}})$–$(\&_3^{\mathcal{A}})$.

Pro ukázání obrácené implikace pracujme v systému předpokladů $(\&_1)$–$(\&_3)$, $(\&_1^{\mathcal{A}})$–$(\&_3^{\mathcal{A}})$, $\mathcal{A}$. Zopakujme úvahu z předchozího odstavce zaměňujíce role formulí

[3)] Je samozřejmě potřeba ukázat, že odvozovací pravidlo důkaz rozborem případů může zastoupit pravidla důkaz užitím disjunkce, což však není obtížné:

$\mathcal{P} \vdash \neg\mathcal{Q} \to \mathcal{P}$	v důsledku **PP1** a důkazu dedukcí
$\mathcal{Q} \vdash \neg\mathcal{Q} \to \mathcal{P}$	systém předpokladů $\mathcal{Q}, \neg\mathcal{Q}$ je sporný, stačí tedy užít důkaz dedukcí
$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \vdash \neg\mathcal{Q} \to \mathcal{P}$	podle důkazu rozborem případů
$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}, \neg\mathcal{Q} \vdash \mathcal{P}$	užitím důkazu dedukcí.

$\mathcal{P}$ & $\mathcal{Q}$ a $\mathcal{A}$: Z formulí ($\&_1^{\mathcal{A}}$)–($\&_2^{\mathcal{A}}$) vyvodíme jak formuli $\mathcal{P}$, tak také formuli $\mathcal{Q}$. Užívajíce modus ponens, „vše dokázané lze použít k dokazování“ a formuli ($\&_3$) nahlédneme dokazatelnost formule $\mathcal{P}$ & $\mathcal{Q}$; použitím důkazu dedukcí tedy obdržíme dokazatelnost implikace $\mathcal{A} \to (\mathcal{P} \,\&\, \mathcal{Q})$ ze systému předpokladů ($\&_1$)–($\&_3$), ($\&_1^{\mathcal{A}}$)–($\&_3^{\mathcal{A}}$).

Ve druhém paragrafu jsme konstatovali, že pro formuli $\neg(\mathcal{P} \to \neg\mathcal{Q})$ jsou korektní odvozovací pravidla důkaz konjunkce a důkaz užitím konjunkce. Aplikujeme-li předchozí výsledky na tuto formuli, dostaneme speciálně dokazatelnost jak implikace $(\mathcal{P} \,\&\, \mathcal{Q}) \to \neg(\mathcal{P} \to \neg\mathcal{Q})$, tak také implikace $\neg(\mathcal{P} \to \neg\mathcal{Q}) \to (\mathcal{P} \,\&\, \mathcal{Q})$ ve výrokovém počtu. Takže přijetí odvozovacích pravidel pro konjunkci vede k dokazatelnost formulí, které jsme na začátku §2 odůvodňovali sémanticky.

V předchozích úvahách jsme vyšetřovali převážně jen konjunkci. Avšak úvahy, které jsme použili mohou být užity bez podstatných změn i pro zkoumání disjunkce a ekvivalence a rovněž výsledky jsou zcela analogické.

KAPITOLA II

PREDIKÁTOVÝ POČET

. . . je-li něco dáno, nutně něco jiného,
různého od toho, co je dáno,
prostřednictvím daného vyplývá.
Aristotelés, Topiky

§1

SYLOGISMY

Zakladatel logiky Aristotelés pokládal zkoumání sylogismů za hlavní náplň logiky[1)]. Jím podrobně prozkoumaná problematika tvoří jen malou část dnešního predikátového počtu, nicméně úsudky tvaru Aristotelem uvažovaných sylogismů představují nezanedbatelnou část úsudků běžného života. Výslovně řečeno: tento paragraf má velký význam z hlediska aplikací logiky a z hlediska její historie, pokud se však někdo zajímá jen o současné pojetí matematické logiky, může ho zcela vypustit[2)].

Představte si, že jste ženitbychtivý mladík, který se snaží získat informace o jakési skupině žen[3)]. Informace o skupině však můžete získat pouze od jednoho informátora, a ten vám nadto poskytne přesně dvě informace (bohužel ne více). Avšak mnohem politováníhodnější skutečností je, že informátor neumí mluvit o ničem, co nesouvisí s matematikou. Takže jedna jeho výpověď o skupině se bude týkat svobodných žen, druhá žen půvabných, avšak do obou výpovědí zaplete matematičky[4)]. Vy chcete výpověď týkající se slečen a jejich půvabnosti nebo nepůvabnosti. Problémem, který budeme zkoumat, je, zda z výpovědí do

[1)] viz [A1], zejména První analytiky

[2)] Pak je třeba pochopitelně vypustit i těch několik málo odkazů na první paragraf ve druhém paragrafu a zejména další rozvíjení nauky o sylogismech na počátku třetího paragrafu druhé kapitoly.

[3)] Pokud je pro vás představitelnější, že jste vdavekchtivá slečna, můžete pochopitelně za okamžik uvažovat o pohledných svobodných matematicích. Příslušnou variaci textu si však, prosím vás, vyrobte sama.

[4)] Zda zkoumaná skupina bude půvabné svobodné matematičky obsahovat, záleží samozřejmě na zadané skupině samé. Autor může pouze konstatovat, že obecně takové bytosti skutečně existují (i když pro něho samého bylo mnohem významnější, že existovaly před čtyřiceti roky).

matematiky zahleděného informátora umíme vyvodit novou informaci, do které se nebude promítat matematické či nematematické zaměření svobodných žen (to vás nezajímá — matematičkám ani nedáváte přednost, ani je neznevýhodňujete). Jak s závěrečnou informací naložíte a jakou další činnost vyvinete na jejím základě, již bude zcela vaší záležitostí, do které se vám z hlediska logiky nehodláme míchat.

Zkoumejme jeden konkrétní případ. Představme si, že informátor nám sdělí, že ve skupině jsou současně pravdivé následující informace:

(1) Každá matematička je půvabná.
(2) Každá matematička je svobodná.

Ptáme se, zda můžeme *vyvodit*, že ve skupině je pravda:

(3) Některá svobodná žena je půvabná.

Zamyslete se. — Už jste se rozhodli, jakou dáte odpověď? — Jestliže nebudeme nic dalšího předpokládat, je správná odpověď pochopitelně „ne“, protože jestliže ve skupině žádná matematička neexistuje, jsou obě informace pravdivé, avšak výpověď zkoumaná jako závěr, *může* být nepravdivá (všechny půvabné ženy jsou již vdané).

Předpokládejme, že známe dodatečný fakt, že ve skupině alespoň jedna matematička existuje. (Víme např., že náš matematicky orientovaný informátor by se skupinou bez matematiček vůbec nezabýval; předpoklady tohoto druhu přijímal při svém zkoumání také Aristotelés.) Zamyslete se, zda se změní předchozí odpověď. — Opravdu již víte, jak odpovíte? — Nyní je samozřejmě správná odpověď „ano“. Uvažujme totiž jednu matematičku ve skupině (nezáleží na tom kterou, dodatečný fakt však zaručuje, že si jednu matematičku můžeme vybrat). Tato matematička je na základě získaných informací jak svobodná, tak i půvabná a je tedy příkladem půvabné slečny v uvažované skupině.

Pokud se vás teď, milý čtenáři, zmocňují pochyby, zda s vámi nehraje autor nečistou hru a nevybral si příklad zvlášť jednoduchý[5)], je vaše ostražitost vůči autorům zcela na místě, avšak tento autor se vás nesnaží podvést. Je pochopitelně pravda, že

(a) nalézt skupinu, která by mohla sloužit jako protipříklad bylo poměrně jednoduché — stačilo uvažovat skupinu bez matematiček; v obecném případě musíme umět sestrojovat protipříklady i v případě neprázdnosti jednotlivých význačných skupin;
(b) ve druhém případě sama forma závěrečné informace „existuje alespoň jedna taková, že ... “ usnadňovala prokazování (stačilo nalézt jen jedno individuum

[5)] Autor skutečně vybral příklad vhodný, avšak jeho volba byla ovlivněna především snahou předvést, že dodatečný fakt neprázdnosti může ovlivnit odpověď.

(jedince)[6] s vhodnou vlastností); v obecném případě budeme muset uvažovat všechna možná individua v množině.

Nicméně zavažme se explicitně, že ve druhé části paragrafu předvedeme[7], jak ve zcela obecném případě po probrání konečného (a to ještě poměrně malého) počtu případů zjistíme, zda závěrečná informace je vyvoditelná z těch dvou daných. Účelem samozřejmě není, aby čtenář v okamžiku, kdy se v praktickém životě nebo při nějaké zkoušce setká s otázkou vyvoditelnosti té které informace ze dvou informací jiných, začal okamžitě vyplňovat příslušné diagramy. Účelem je, aby si čtenář, jenž se z počátku při odpovědích mýlí nebo nemá potřebnou jistotu, probral dostatečně případů, a tím nabyl takový vhled do problematiky, že následně správnou odpověď téměř vždy okamžitě „uvidí" (a teprve v případě skutečné potřeby (nejistoty) se uchýlí k předvedenému algoritmu).

Ve středověku řešili nastíněnou problematiku zcela jinak — vytvořili řadu mnemotechnických pomůcek, které se student naučil a na jejichž základě pak rozhodl, zda závěrečná informace je ze dvou daných vyvoditelná, či nikoli (viz §3 kap. II).

Nyní nadešel čas formulovat přesněji, jaká tvrzení jsme až dosud intuitivně nazývali „informacemi". Předpokládejme, že máme tři vlastnosti[8] označované písmeny[9] $\mathcal{S}, \mathcal{P}$ a $\mathcal{M}$. „Závěrečná informace" má vypovídat, zda individua mající vlastnost $\mathcal{S}$ mají, či nemají rovněž vlastnost $\mathcal{P}$. Za zajímavé „závěrečné informace" tudíž považujeme kterékoli z následujících čtyř tvrzení[10] seznamu (i):

(i)

a	Každé $\mathcal{S}$ je $\mathcal{P}$,
e	Žádné $\mathcal{S}$ není $\mathcal{P}$,
i	Některé $\mathcal{S}$ je $\mathcal{P}$,
o	Některé $\mathcal{S}$ není $\mathcal{P}$.

Výroky, které mají tvar jednoho z výše uvedených tvrzení, je zvykem od dob Aristotela nazývat subjekt-predikátové **soudy** (v našem textu budeme pro zjed-

[6] Slovo „individuum" mívá někdy hanlivý přídech ve významu podezřelý člověk; v naší terminologii předjímající terminologii teorie modelů (viz následující paragraf) však nikoli.

[7] Mírně modifikujeme hru Lewise Carrolla (autora známé Alenky v říši divů a za zrcadlem) z posledních let devatenáctého století, viz [Ca]. Čtenáře knihy [Ca] je však zapotřebí *důrazně varovat*, Carroll chápe větu „Všechna $\mathcal{S}$ jsou $\mathcal{P}$" ve významu, který dnes není obvyklý — jako konjunkci „Každé $\mathcal{S}$ je $\mathcal{P}$" a „Existuje objekt s vlastností $\mathcal{S}$".

[8] tj. v terminologii predikátového počtu (popsané v druhém paragrafu této kapitoly) tři *unární* predikáty; omezení na unární predikáty je jedním z nejpodstatnějších rysů té části logiky, o které pojednáváme v tomto paragrafu

[9] Písmena pocházejí z latiny a zastupují již zčeštěné subjekt, predikát a latinské medius (střední). Použití přesně těchto písmen není pro nás nikterak závazné, v aplikacích se často volí písmena vhodná pro aplikaci, nyní však při obecném výkladu není důvod měnit obvyklé znaky.

[10] I když si autor neumí představit, jak by v našem příkladu získání čtvrté informace mohlo ovlivnit vaše další chování jakožto hypotetického ženitbychtivého mladíka — pokud byste ovšem z jiných zdrojů nevěděl, že ve skupině je nanejvýše jedna žena svobodná.

nodušení používat výraz „soud“ jen pro výroky tvarů ze seznamu (i) — a většinou vynechávat určení „subjekt-predikátový“ — i když mnozí autoři používají slova „soud“ a „výrok“ ve stejném významu). Samohlásky ***a, e, i, o*** byly vybrány k označení jednotlivých *tvarů* soudů ve středověku[11]; mají svůj mnemotechnický význam (viz třetí paragraf), který však v tomto okamžiku pro nás nebude významný.

Výchozí dva soudy nazýváme — v souladu s terminologií zavedenou ve výrokovém počtu — **premisami**. O premisách předpokládáme pouze, že jedna (řekněme[12]) prvá) se týká přesně predikátů $\mathcal{P}$ a $\mathcal{M}$ v libovolném pořadí a druhá premisa pojednává o predikátech $\mathcal{S}$, $\mathcal{M}$, a pouze o nich, opět v libovolném pořadí. Jako prvá premisa přichází tudíž v úvahu kterýkoli z následujících 8 soudů seznamu (ii):

	a	Každé $\mathcal{M}$ je $\mathcal{P}$,	***i***	Některé $\mathcal{M}$ je $\mathcal{P}$,
(ii)		Každé $\mathcal{P}$ je $\mathcal{M}$,		Některé $\mathcal{P}$ je $\mathcal{M}$
	e	Žádné $\mathcal{M}$ není $\mathcal{P}$,	***o***	Některé $\mathcal{M}$ není $\mathcal{P}$,
		Žádné $\mathcal{P}$ není $\mathcal{M}$,		Některé $\mathcal{P}$ není $\mathcal{M}$.

(Druhých) možných premis týkajících se přesně predikátů $\mathcal{S}$ a $\mathcal{M}$ je také 8 a jejich seznam vznikne ze seznamu soudů (ii) prostou záměnou predikátu $\mathcal{P}$ predikátem $\mathcal{S}$:

	a	Každé $\mathcal{M}$ je $\mathcal{S}$,	***i***	Některé $\mathcal{M}$ je $\mathcal{S}$,
(ii')		Každé $\mathcal{S}$ je $\mathcal{M}$,		Některé $\mathcal{S}$ je $\mathcal{M}$
	e	Žádné $\mathcal{M}$ není $\mathcal{S}$,	***o***	Některé $\mathcal{M}$ není $\mathcal{S}$,
		Žádné $\mathcal{S}$ není $\mathcal{M}$,		Některé $\mathcal{S}$ není $\mathcal{M}$.

Sylogismem se rozumí trojice soudů sestávající z jednoho soudu ze seznamu (ii), z jednoho soudu ze seznamu (ii') a jednoho soudu ze seznamu (i)[13]. Sylogismus je **platný**, jestliže z pravdivosti premis *vždy* plyne pravdivost třetího soudu, nazývaného **závěrem**.

Jestliže jako hypotetický ženitbychtivý mladík získáte informaci, že ve skupině je každá svobodná žena pohledná, zvýší se váš zájem o tuto skupinu. Přitom si pravděpodobně vůbec neuvědomíte, že tento soud je pravdivý i v případě, že ve skupině vůbec žádná svobodná žena neexistuje. Podvědomě totiž — na základě obdržené informace — asi přijmete dodatečný předpoklad, že ve skupině slečny existují. Při zkoumání sylogismů předpoklad neprázdnosti (vědomě) přijímal i Aristotelés, pročež sylogismy platné za dodatečného předpokladu ne-

11) Williamem z Shyreswoodu

12) podle tradice

13) Není třeba uvažovat všech 8 soudů týkajících se predikátů $\mathcal{S}$ a $\mathcal{P}$, další čtyři dostaneme prostou záměnou těchto predikátů — bez újmy na obecnosti však můžeme provést takovouto výměnu pouze v jednom ze soudů vytvářejících sylogismus, a proto v případě každé ze dvou premis uvažujeme všech osm možností.

prázdnosti některé skupiny budeme nazývat **aristotelsky platné** (pochopitelně každý platný sylogismus je také aristotelsky platný — dodatečný předpoklad nejsme totiž povinni využít).

Nyní již můžete bez zábran tvořit sylogismy a zkoumat jejich platnost. Výsledky si můžete zkontrolovat na počátku závěrečného paragrafu této kapitoly, kde jsou v tabulce uvedeny všechny platné sylogismy. My se k této problematice vrátíme na začátku třetí části tohoto paragrafu, kdy už budete mít možnost — v případě jakékoli pochybnosti — podrobněji prozkoumat platnost sylogismu metodou popsanou ve druhé části našeho paragrafu. Uvědomte si, že neplatnost sylogismu můžeme prokázat protipříkladem, tzn. sestrojením skupiny individuí s vlastnostmi zvolenými tak, aby premisy byly pro tuto skupinu pravdivé, avšak závěr nikoli.

Konstatujme explicitně, že pro zkoumání platnosti sylogismů není znalost následující poměrně rozsáhlé části nezbytně nutná (což naznačujeme petitem) — pro každý jednotlivý sylogismus lze buďto nalézt úvahu prokazující jeho platnost nebo nalézt protipříklad ukazující jeho neplatnost. Následující pojednání pouze ukazuje *algoritmus*, který nás *vždy* dovede ke správnému rozhodnutí o platnosti sylogismu a buďto ukáže, jak platnost zdůvodnit, nebo nás navede na konstrukci protipříkladu.

* * *

Při grafickém zobrazení[14] soudu týkajícího se např. vlastnosti $\mathcal{S}$ použijeme jako jednu součást obdélník[15] (viz diagram 1). (Vyšrafovaný) vnitřek obdélníku bude představovat množinu těch uvažovaných individuí, která mají vlastnost $\mathcal{S}$, a vnějšek obdélníku bude naproti tomu reprezentovat množinu uvažovaných individuí, jež vlastnost $\mathcal{S}$ nemají. (V případě predikátu „být svobodná“, který zkoumáte jakožto hypotetický ženitbychtivý mladík, se do vnitřku obdélníku označeného $\mathcal{S}$ shromáždí všechny svobodné ženy z uvažované skupiny a vně (oblast označena $\neg$ S) zůstanou všechny ženy z vyšetřované skupiny, které svobodné nejsou.)

[14] Grafické zobrazování navrhl Leonhard Euler již r. 1768 (viz [Eul]), avšak v našem textu budeme užívat grafické vyjádření navržené Johnem Vennem koncem 19. stol. (viz [Ve]), *později* týž princip grafického zobrazování byl používán obecněji při vizualizaci základních pojmů teorie množin.

[15] Pro pozdější užití poznamenejme, že čtverec (v protikladu k některým autorům školských učebnic) považujeme za obdélník, který má ještě dodatečnou vlastnost (např. „mít všechny strany stejně dlouhé“). Můžete se také rozhodnout dát přednost např. kruhům místo obdélníků, tyto však mají jisté výhody.

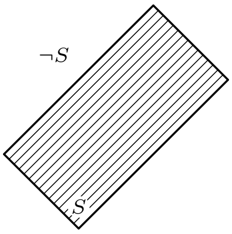

Diagram 1

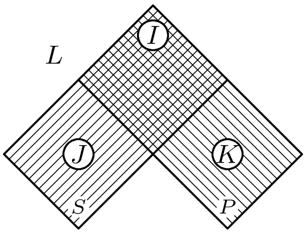

Diagram 2

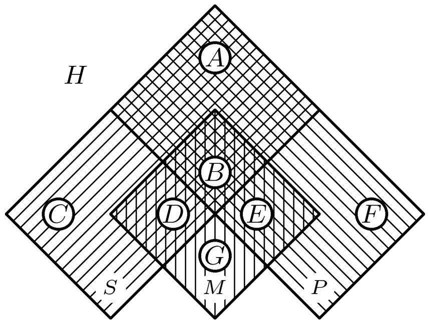

Diagram 3a

Budeme-li se najednou zabývat dvěma vlastnostmi, např. vlastnostmi $\mathcal{S}$ a $\mathcal{P}$, je vhodné uvažovat obdélníky dva (viz diagram 2). Čtverec I vyšrafovaný doleva i doprava představuje množinu těch individuí, která mají jak vlastnost $\mathcal{S}$, tak i vlastnost $\mathcal{P}$. Čtverec J vyšrafovaný pouze doleva představuje množinu individuí, jež mají vlastnost $\mathcal{S}$, avšak nemají vlastnost $\mathcal{P}$. Čtverec K vyšrafovaný jenom doprava představuje množinu individuí majících vlastnost $\mathcal{P}$ a současně nemajících vlastnost $\mathcal{S}$. Zbytek obrázku (oblast značená L) představuje množinu individuí, které nemají ani jednu z vlastností $\mathcal{S}$ a $\mathcal{P}$. Písmena I, J, K odkazující na jednotlivé oblasti diagramu 2 budeme užívat v celé části textu popisující algoritmus určený k rozhodování o platnosti sylogismů.

Při grafickém znázorňování tří vlastností kreslíme obdélníky tři (viz diagram 3a). Čtenáři by měl být již jasný význam jednotlivých oblastí. — Je význam opravdu zřejmý? — Například třemi směry šrafovaná oblast B představuje množinu individuí, které mají všechny tři vlastnosti; pouze svisle šrafovaná oblast G představuje množinu individuí, která mají vlastnost $\mathcal{M}$ a nemají ani jednu z vlastností $\mathcal{S}$ a $\mathcal{P}$. Pro jistotu připojujeme diagram 3b, na kterém do jednotlivých oblastí zakreslujeme obrázky, které charakterizují vlastnosti individuí náležejících do té které oblasti. Svobodné ženy jsou zakresleny bez čepce. (Znáte ještě obrat „dostat se pod čepec“ mající týž význam jako „vdáti se“?) Usmívající se ženy označují ženy půvabné (ty, které se neusmívají, představují nepůvabné ženy). Matematičky se v našem diagramu vyznačují tím, že nosí náušnice ve tvaru $\sum$. Písmena A–G užitá v diagramu 3a budeme nadále používat při popisu našeho algoritmu.

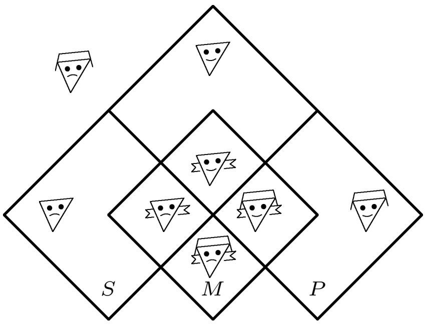

Diagram 3b

Popišme nyní, jak lze vyjádřit jednotlivé soudy týkající se vlastností $\mathcal{S}$ a $\mathcal{P}$. K tomu účelu se však nejprve umluvme, že prázdnost množiny reprezentované jakoukoli oblastí budeme vyjadřovat tím, že do této oblasti napíšeme znak 0 a samozřejmě zcela analogicky neprázdnost množiny představované jakoukoli oblastí budeme vyjadřovat tím, že do této oblasti napíšeme znak 1.

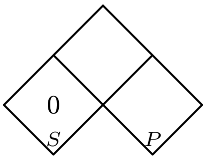

Diagram 4

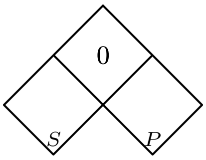

Diagram 5

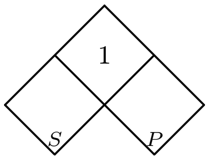

Diagram 6

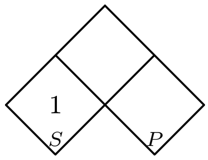

Diagram 7

(1a) Soud „Každé $\mathcal{S}$ je $\mathcal{P}$“ znamená, že všechna individua s vlastností $\mathcal{S}$ mají i vlastnost $\mathcal{P}$, tzn. neexistuje individuum s vlastností $\mathcal{S}$, které by nemělo vlastnost $\mathcal{P}$. Tento soud lze tudíž vyjádřit, že množina představovaná čtvercem J je prázdná, tzn. zapsáním 0 do čtverce J (viz diagram 4).

(1b) Zcela analogicky soud „Žádné $\mathcal{S}$ není $\mathcal{P}$“ vyjadřuje neexistenci individua s vlastností $\mathcal{S}$, které by mělo současně vlastnost $\mathcal{P}$. Takže soud, jímž se právě zabýváme, je ekvivalentní umístění 0 do čtverce I (viz diagram 5).

(1c) Podobně soud „Některé $\mathcal{S}$ je $\mathcal{P}$“ je pravdivý, právě když existuje alespoň jedno individuum mající obě vlastnosti $\mathcal{S}$ a $\mathcal{P}$, což vyjádříme umístěním znaku 1 do čtverce I (viz diagram 6).

(1d) Na závěr si uvědomme, že soud „Některé $\mathcal{S}$ není $\mathcal{P}$“ vyjadřuje existenci alespoň jednoho individua, jež má vlastnost $\mathcal{S}$ a současně nemá vlastnost $\mathcal{P}$, neboli znamená přesně neprázdnost množiny reprezentované čtvercem J, takže zkoumaný soud vyznačíme zápisem 1 do čtverce J (viz diagram 7).

A už můžeme začít hrát naši hru, kterou zpočátku hrajeme na hrací desce s oblastmi A–H (viz diagram 3a), a poté výsledek „přepíšeme“ na desku s oblastmi I–L (viz druhý diagram).

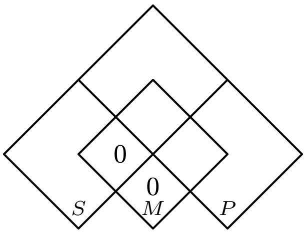

Diagram 8

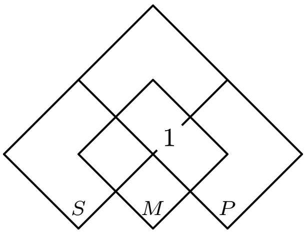

Diagram 9

Pravidla (1a)–(1d) aplikovaná jak na dvojici $\mathcal{M}$, $\mathcal{P}$, tak také na dvojici $\mathcal{M}$, $\mathcal{S}$ od nás vyžadují označit některé oblasti diagramu 3a číslicemi 0 nebo 1. (Například soud „Každé $\mathcal{M}$ je $\mathcal{P}$“ nám přikazuje vyznačit nulou oblast sestávající ze čtverců D a G.) Tyto oblasti se však nyní v třetím diagramu skládají ze dvou podoblastí (jak už náš příklad ukazuje), je proto ještě potřeba si uvědomit pravidla pro označování podoblastí:

(2a) Pokud máme označit 0 nějakou oblast skládající se ze dvou podoblastí, označíme 0 obě podoblasti (není-li v celé oblasti žádné individuum, nemůže být ani v žádné podoblasti). Například soud „Každé $\mathcal{M}$ je $\mathcal{P}$“ vyjádříme zápisem 0 do obou čtverců D a G (viz diagram 8).

(2b) Jestliže pravidla (1a)–(1d) vynucují označit znakem 1 nějakou oblast skládající se ze dvou podoblastí a jedna z těchto podoblastí již byla označena znakem 0, označíme druhou podoblast znakem 1 (pokud se má individuum vyskytovat alespoň v jedné ze dvou podoblastí a současně víme, že se v jedné z nich nevyskytuje, musí se zcela určitě nacházet ve druhé).

(2c) Přikazují-li nám pravidla (1a)–(1d) označit 1 nějakou oblast skládající se ze dvou podoblastí a žádná z těchto oblastí nebyla dosud označena znakem 0, napíšeme 1 na „plot" (hranici) mezi těmito dvěma oblastmi, protože nevíme, do které podoblasti bychom měli 1 napsat — např. soud „Některé $\mathcal{P}$ je $\mathcal{M}$" je znázorněn diagramem 9. Znázornění dalšího soudu nás může donutit „zahnat 1 s plotu" do některé z přilehlých oblastí (bude-li dodatečně jedna oblast „přiléhající k plotu" označena 0, musí být 1 „zahnána s plotu" do druhé oblasti, viz příklad 2).

Po vyplnění oblastí A–G na základě soudů (1) a (2) začneme zkoumat „přepis"[16)] znaků 0, 1 do oblastí I a J (použitím stejných pravidel se můžeme pokusit vyplnit i čtverec K, protože však na rozhodování o platnosti sylogismu nemá takovéto vyplnění žádný vliv, není třeba se namáhat):

(3a) Je-li *alespoň jedna* podoblast některé z oblastí I a J označena 1, označíme 1 celou oblast (existuje-li prvek v některé podoblasti, musí existovat v celé oblasti).

(3b) Jestliže jsou *obě* podoblasti některé z oblastí I a J označeny 0, označíme 0 celou oblast (neexistuje-li prvek v *žádné* podoblasti, nemůže existovat dokonce v celé oblasti).

(3c) Pro jistotu připojme explicitně jednak, že máme-li označenu znakem 0 jen jednu z podoblastí a druhá je nevyplněna, nemáme dost informací, abychom v tomto případě provedli přepis na oblasti I a J, a jednak, že znaky 1, které zůstaly „na plotě" nebereme v úvahu, protože by také mohly skončit v jiné oblasti, než bychom využili při počítání.

Označení oblastí I a J pomocí 0 a 1 nyní může reprezentovat některé soudy ze seznamu (i). *Pro tyto soudy jakožto závěry je sylogismus platný, pro ostatní nikoli.*

Diagramy nás dokonce navedou, jak sestrojit protipříklady prokazující neplatnost příslušných sylogismů:

(4a) Doplníme do všech oblastí A–G znaky 0 nebo 1 tak, aby po přepisu doplněného diagramu do oblastí I a J, takto vzniklý diagram neodpovídal závěrečnému soudu vyvraceného sylogismu. (Možností doplnění bývá více, a proto bývá možno sestrojit více *různých* protipříkladů; pokud je to možné, snažíme se o protipříklad, ve kterém jsou všechny oblasti S, P a M neprázdné — takovýto protipříklad ukáže i aristotelskou neplatnost sylogismu.) Při tomto doplnění však musíme nejprve „zahnat všechny 1 s plotů", jednu každou do některé z oblastí přilehlých k jejímu plotu.

(4b) Protipříkladem bude množina tvořená individui zastupujícími oblasti označené znakem 1 a jedno každé z těchto individuí bude mít, či nemít vlastnosti $\mathcal{S}$, $\mathcal{P}$ a $\mathcal{M}$ podle toho, jakou oblast zastupuje. Takže každá množina takto vytvořená jako protipříklad pro nějaký sylogismus bude mít nanejvýš 7 individuí (reálně ještě podstatně méně).

Při ověřováni aristotelské platnosti sylogismů budeme mírně modifikovat předchozí hru tím, že přidáme navíc jedno pravidlo (reprezentující předpoklad neprázdnosti):

> Jestliže v diagramu s oblastmi A–H tři podoblasti některé z oblastí označených písmeny S, P a M jsou zaplněny znakem 0, musíme do zbývající oblasti dopsat znak ***1***

(je-li vyloučena přítomnost individua ve všech podoblastech (uvedených oblastí) kromě jedné, zaručí předpoklad neprázdnosti existenci individua ve zbývající podoblasti). Vý-

[16)] Autor doufá, že alespoň tento přepis nebude muset v brzké budoucnosti čtenář reálně provádět, tzn. že z prvého diagramu již nahlédne výsledek.

znam znaku ***1*** je naprosto stejný jako znaku 1, rozdílnost značení pouze upozorňuje na to, že hrajeme hru s předpokladem neprázdnosti.

Příklad 1. Zkoumejme sylogismy, které mají premisy

(1) Žádné $\mathcal{P}$ není $\mathcal{M}$,

(2) Každé $\mathcal{S}$ je $\mathcal{M}$.

Prvý soud přikazuje označit oblasti B, E nulami, druhý naproti tomu vyžaduje položení nul do oblastí A, C (viz diagram 10a). Obě podoblasti oblasti I jsou označeny nulou a tedy nezbývá než označit znakem 0 celou oblast I (viz diagram 10b). Pro označení oblasti J nemáme dostatek informací, necháme ji proto nevyplněnou.

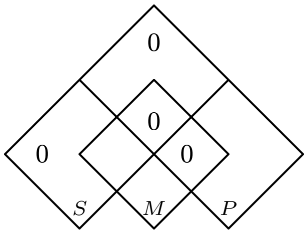

Diagram 10a

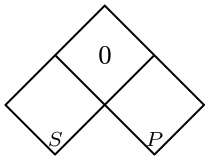

Diagram 10b

Označení oblasti I nulou odpovídá soud

(3***e***) Žádné $\mathcal{S}$ není $\mathcal{P}$,

a proto sylogismus, jehož počátečními soudy jsou (1) a (2) a jehož závěrečným soudem je (3***e***), je platný.

Zbývající sylogismy s premisami (1) a (2) nejsou platné. Diagramy 11a a 11b nás inspirují k vytvoření množiny s jediným individuem **F** (kde individuum **F** má vlastnost $\mathcal{P}$ a nemá druhé dvě vlastnosti), která najednou poslouží jako protipříklad pro sylogismy končící jedním ze soudů:

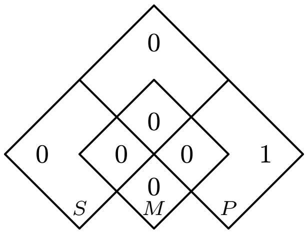

Diagram 11a

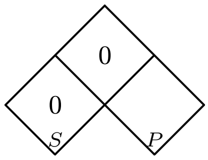

Diagram 11b

(3***i***) Některé $\mathcal{S}$ je $\mathcal{P}$.

(3***o***) Některé $\mathcal{S}$ není $\mathcal{P}$.

Avšak naše variantní hra přikazuje v diagramu 10a doplnit podoblasti D, F znakem 1 (viz diagram 12a), z něhož následně obdržíme diagram 12b a tak nahlédneme aristotelskou platnost sylogismu s premisami (1) a (2) a zakončeného soudem (3***o***).

Dosud jsme nerozhodli o platnosti sylogismu s premisami (1) a (2) a závěrem

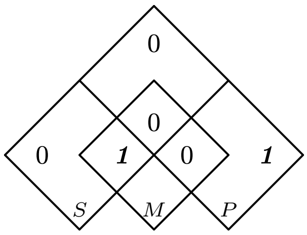

Diagram 12a

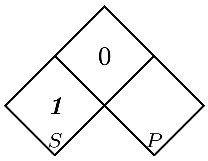

Diagram 12b

(3***a***) Každé $\mathcal{S}$ je $\mathcal{P}$.

Uvědomme si, že i v případě, že nejsme *nuceni* pravidly variantní hry vyplnit podoblasti D, F znakem 1, *můžeme* tak učinit. Diagram 12a nás inspiruje k vytvoření množiny s individui **D**, **F** (z nichž první má přesně vlastnosti $\mathcal{S}$ a $\mathcal{M}$ a druhé má pouze vlastnost $\mathcal{P}$). Vytvořená množina prokazuje neplatnost sylogismu se závěrem (3***a***).

Příklad 2. Nyní se budeme zabývat sylogismy, které mají premisy

(1) Žádné $\mathcal{M}$ není $\mathcal{P}$.

(2) Některé $\mathcal{M}$ je $\mathcal{S}$,

tento příklad však již zkuste nejprve vyřešit sám.

Prvý soud vyžaduje, abychom označili oblasti B, E nulami, druhý žádá zapsání 1 do některé z oblastí B, D (viz diagram 13a); tedy určitě do oblasti D. Při přepisu těchto zápisů do diagramu 13b získáme 1 v oblasti J, pro zanesení znaků do druhé oblasti nemáme dostatek informací. Takže sylogismus se závěrem (3$\boldsymbol{o}$) je platný (viz diagram 13b).

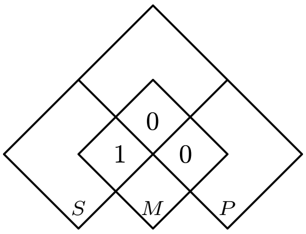

Diagram 13a

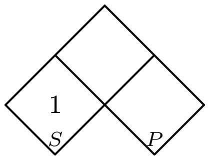

Diagram 13b

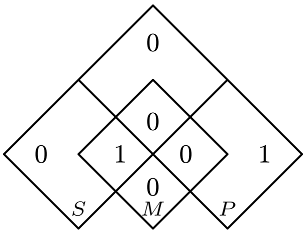

Diagram 14a

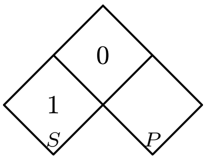

Diagram 14b

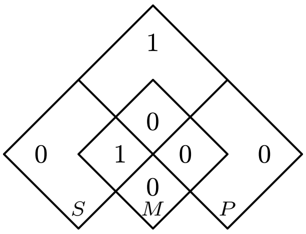

Diagram 15a

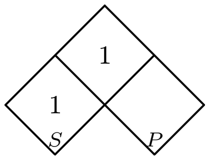

Diagram 15b

Ukažme, že sylogismy se závěrečnými soudy (3$\boldsymbol{a}$), (3$\boldsymbol{e}$) a (3$\boldsymbol{i}$) nejsou platné. Jako protipříklad pro sylogismy se závěry (3$\boldsymbol{a}$) a (3$\boldsymbol{i}$) poslouží (viz diagramy 14a a 14b) množina s individui **D, F** a pro sylogismus se závěrem (3$\boldsymbol{e}$) množina individuí **A, D** (viz diagram 15a a 15b).

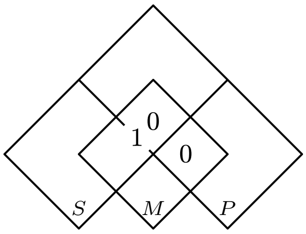

Diagram 16

Při označování oblastí A–G v souladu se soudy (1) a (2) bylo výhodné začínat soudem (1), tj. soudem tvaru $\boldsymbol{e}$, nicméně začneme-li soudem (2) (tvaru $\boldsymbol{i}$), dojdeme ke stejnému výsledku: Nejprve podle soudu (2) napíšeme 1 „na plot“ mezi oblasti B, D a na základě soudu (1) zapíšeme 0 do oblastí B a E (viz diagram 16); poté již zcela jistě musíme „zahnat 1 s plotu“ do oblasti D, protože oblast B má zakázánu, pročež získáme opět diagram 13a. Obecně řečeno: je praktické nejprve vyznačovat soudy tvaru $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{e}$, teprve pak soudy tvaru $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{o}$; při obráceném pořadí dojdeme ke stejnému výsledku, avšak malinko obtížněji.

Příklad 3. Ukažme si jednoduchý trik, kterým vyřešíme najednou čtvrtinu všech sylogismů (prokážeme jejich neplatnost — srovnej podmínku (2) pro platnost sylogismu v třetím paragrafu této kapitoly). Kterýkoli ze soudů označených $\boldsymbol{i}$ nebo $\boldsymbol{o}$ v seznamu (*ii*), tzn. ze soudů ze seznamu (*iii*):

(*iii*)
Některé $\mathcal{M}$ je $\mathcal{P}$,
Některé $\mathcal{P}$ je $\mathcal{M}$,
Některé $\mathcal{M}$ není $\mathcal{P}$,
Některé $\mathcal{P}$ není $\mathcal{M}$

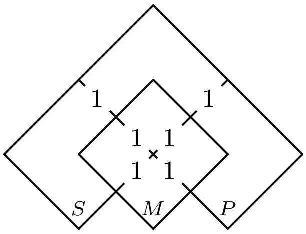

Diagram 17

nebo ze soudů vznikajících ze soudů seznamu (*iii*) nahrazením znaku $\mathcal{P}$ znakem $\mathcal{S}$, je realizován zápisem 1 „na některý plot" podle diagramu 17. S plotů je možno sehnat všechny 1 do oblastí A, B a G (viz diagram 18a), nebo „na druhou stranu" do oblastí C, D, E a F (viz diagram 19a). V množině s individui **A, B** a **G** a rovněž v množině sestávající z individuí **C, D, E** a **F** — kterážto individua mají, či nemají vlastnosti $\mathcal{S}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{M}$ podle toho, kterou oblast reprezentují — jsou pravdivé všechny soudy dosud zkoumané v tomto příkladu. Na druhé straně každý ze soudů ze seznamu (*i*) je nepravdivý alespoň v jedné z uvedených skupin (viz diagramy 18b, 19b).

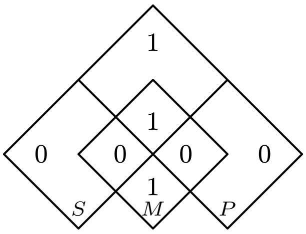

Diagram 18a

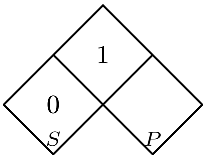

Diagram 18b

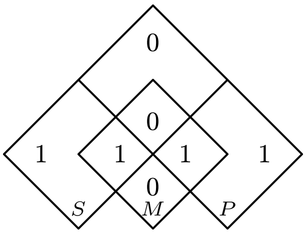

Diagram 19a

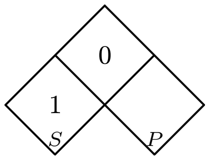

Diagram 19b

Je tedy neplatný každý sylogismus skládající se z jednoho soudu ze seznamu (*iii*), jednoho soudu vzniklého ze soudu ze seznamu (*iii*) nahrazením predikátu $\mathcal{P}$ predikátem $\mathcal{S}$ a jakéhokoli soudu ze seznamu (*i*) jakožto soudu závěrečného. Pro každý takovýto sylogismus poslouží jako protipříklad jedna ze dvou výše popsaných množin. Protože jak seznam (*iii*), tak také seznam (*i*) obsahují přesně čtyři položky, ukázali jsme předvedeným trikem neplatnost $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ sylogismů.

Uvědomme si, že všech sylogismů je $8 \cdot 8 \cdot 4 = 256$.

Z hlediska uživatele je třeba umět rozhodnout o každém jednotlivém případu vyvození — v tomto paragrafu problém omezujeme na vyvození, která jsou sylogismy. Z hlediska logiky, jakožto popisu správného vyvozování, je třeba (mimo jiné) umět popsat přesně všechny platné sylogismy. Ovšem vytvoření seznamu všech správných sylogismů je možno chápat také jako zábavu na úrovni řešení hlavolamů. Pro čtenáře, který se rozhodne k této činnosti (jež kromě zábavy přinese i poučení) připojme tři poznámky: (1) Soubor sylogismů je vhodné nějak strukturovat, abychom na některý nezapomněli nebo jiný nezkoumali vícekrát. Jedním z možných dělení je tradiční rozdělení na 4 figury (viz §3 kap. II). (2) Podle třetího příkladu stačí zkoumat $3 \cdot 64$ sylogismů, avšak u každého je zapotřebí vyšetřit jak obecnou, tak i aristotelskou platnost. Pokud však začneme se zkoumáním aristotelské platnosti, zjistíme, že aristotelsky platných je 24 sylogismů a poté stačí zkoumat obecnou platnost pouze těchto dvaceti čtyř sylogismů. Zkoumání je pak omezeno na „pouhých" $3 \cdot 64 + 24$ případů. (3) Podaří-li se vám vyřešit cv. II-1.5, ubude vám ještě $3 \cdot 16$ případů (o šestnácti sylogismech začínajících dvěma soudy tvaru ***o*** jsme již rozhodli výše).

V textu tohoto paragrafu a v jeho cvičeních se objeví všech 24 aristotelsky platných sylogismů (podrobněji viz počátek §3 naší kapitoly) a některé sylogismy neplatné.

* * *

Příklad 4. Je možno z premis

(1) Žádný kos nemá křídla.

(2) Některý pták má křídla.

vyvodit závěr

(3) Některý pták není kosem?

(Sledujte pouze vyvození a nepřihlížejte ke skutečnosti, že kos křídla má.) Sylogismus je platný: Ten pták, který má křídla, nemůže být kosem.

Příklad 5. Je možno z premis

(1) Žádný Čech není Polák.

(2) Každý Čech je Evropan.

vyvodit závěr

(3) Některý Evropan není Polák?

Obecně není vyvození korektní (předpoklady nezaručují, že nějaký Čech existuje). Přijmeme-li však (dokonce podle reality) dodatečný předpoklad „Existuje alespoň jeden Čech.“, je vyvození správné[17)] — zdůvodnění: podle dodatečného předpokladu můžeme zvolit Čecha; ten je podle premis Evropanem, který není Polákem a je proto příkladem člověka, který současně je Evropanem a není Polákem.

Příklad 6. Je možno z premis

(1) Každý matematik je zapomnětlivý.

(2) Žádný student ze 3.B není zapomnětlivý.

vyvodit závěr

(3) Některý student ze 3.B není matematikem?

Ne, nevíme, zda třída 3.B existuje, tzn. jestli vůbec existuje student 3.B. Jestliže však takový student existuje, je sylogismus platný, neboť kdyby ve 3.B byl matematik, musel by současně být i nebýt zapomnětlivý.

Povšimněte si, že v obou příkladech 5 a 6 jsou sylogismy platné aristotelsky (a nikoli obecně), avšak v podmínkách jejich platnosti je rozdíl. V příkladu 5 jsme potřebovali mít zaručenu existenci objektu majícího společnou vlastnost obou premis (v obecném značení $\mathcal{M}$) a v příkladu 6 jsme potřebovali existenci objektu s vlastností značenou v obecném případě znakem $\mathcal{S}$.

[17)] Při řešení aristotelské platnosti pomocí výše popsaného algoritmu je vhodné si povšimnout, že řešení závisí na vyplňování podoblastí čtverce M, *včetně čtverce G*, a to přesto, že tento čtverec neprotíná ani obdélník S ani obdélník P. (V podoblastech B, E, G je zapsána 0; má-li být v některé podoblasti čtverce M zapsána 1, musíme ji dopsat do podoblasti D.)

Příklad 7. Je možno z premis

(1) Každý kovový předmět je vodivý.

(2) Každý měděný předmět je vodivý.

vyvodit závěr

(3) Každý měděný předmět je kovový?

Ne — protipříkladem je například dvouprvková skupina, ve které jedno individuum je měděným vodivým předmětem, který není kovový a druhé individuum je kovový vodič, který není měděný. (Sledujte pouze vyvození a nepřihlížejte k realitě, kde měď je kovem.)

Příklad 8. Představme si, že kromě predikátu $\mathcal{P}$ máme ještě další predikát $\mathcal{P}'$, jenž je silnější — každý objekt, který má vlastnost $\mathcal{P}'$, má rovněž vlastnost $\mathcal{P}$ (jinak řečeno každé $\mathcal{P}'$ je $\mathcal{P}$). Zkoumejme, pro které typy soudů plyne ze soudu pro predikáty $\mathcal{S}$ a $\mathcal{P}$ týž soud pro predikáty $\mathcal{S}$ a $\mathcal{P}'$. Ptáme se tedy na platnost sylogismů:

(1) Každé $\mathcal{P}'$ je $\mathcal{P}$.	(1) Každé $\mathcal{P}'$ je $\mathcal{P}$.
(2***e***) Žádné $\mathcal{S}$ není $\mathcal{P}$.	(2***o***) Některé $\mathcal{S}$ není $\mathcal{P}$.
pak	pak
(3***e***) Žádné $\mathcal{S}$ není $\mathcal{P}'$.	(3***o***) Některé $\mathcal{S}$ není $\mathcal{P}'$.

a sylogismů:

(1) Každé $\mathcal{P}'$ je $\mathcal{P}$.	(1) Každé $\mathcal{P}'$ je $\mathcal{P}$.
(2***a***) Každé $\mathcal{S}$ je $\mathcal{P}$.	(2***i***) Některé $\mathcal{S}$ je $\mathcal{P}$.
pak	pak
(3***a***) Každé $\mathcal{S}$ je $\mathcal{P}'$.	(3***i***) Některé $\mathcal{S}$ je $\mathcal{P}'$.

(Pozor: značení ve znění tohoto problému neodpovídá dříve uváděnému obecnému značení pro sylogismy. Úlohu vlastností $\mathcal{P}$, $\mathcal{M}$ a $\mathcal{S}$ z obecného značení hrají nyní po řadě vlastnosti $\mathcal{P}'$, $\mathcal{P}$ a $\mathcal{S}$.)

V horní dvojici jsou sylogismy platné — zdůvodnění pro prvý sylogismus: objekt, který by měl současně vlastnosti $\mathcal{S}$ a $\mathcal{P}'$, musil by mít podle první premisy rovněž vlastnost $\mathcal{P}$, což je ve sporu s druhou premisou; pro druhý sylogismus: objekt, který má vlastnost $\mathcal{S}$ a nemá vlastnost $\mathcal{P}$, nemůže mít podle prvé premisy ani vlastnost $\mathcal{P}'$.

Ve dolní dvojici jsou sylogismy neplatné (jako protipříklad pro oba tyto sylogismy může sloužit množina tvořená individui **D**, **E**, z nichž první má vlastnosti $\mathcal{S}$ a $\mathcal{P}$ a současně nemá vlastnost $\mathcal{P}'$ a druhé má vlastnosti $\mathcal{P}$ a $\mathcal{P}'$ a nemá zbývající.

Takže soudy tvaru ***e, o*** si přechodem na silnější predikát $\mathcal{P}'$ zachovávají platnost, avšak soudy tvaru ***a, i*** nikoli.

V následujících úlohách opět zapomeňte na pravdivost nebo nepravdivost jednotlivých tvrzení ve skutečném světě a sledujte pouze logické vyvození.

Úloha 1. Můžeme z premis „Každý plavec dýchá žábrami.“ a „Každá ryba plave.“ vyvodit závěr „Každá ryba dýchá žábrami.“?

Úloha 2. Můžeme z premis „Každý plavec dýchá žábrami.“ a „Některá ryba plave.“ vyvodit závěr „Každá ryba dýchá žábrami.“?

Úloha 3. Můžeme z premis „Některý plavec nedýchá žábrami.“ a „Každá ryba plave.“ vyvodit závěr „Některá ryba nedýchá žábrami.“?

Úloha 4. Můžeme z premis „Některý plavec dýchá žábrami.“ a „Některá ryba plave.“ vyvodit závěr „Některá ryba dýchá žábrami.“?

Úloha 5. Můžeme z premis „Každý plavec dýchá žábrami.“ a „Každá ryba plave.“ vyvodit závěr „Některá ryba dýchá žábrami.“?

Ve cvičeních 6–10 máte zjistit, který závěr týkající se vlastností „být dítětem“ a „být šikovný“ je možno vyvodit z vyšetřovaných premis. Dále se ptáme, zda je možno vyvodit některý další závěr přijmeme-li navíc některý z předpokladů existence dítěte, existence hezkého člověka nebo existence šikovného člověka (pokud chcete být — až přehnaně — přesný, nahraďte slova „dítě je hezké“ slovním spojením „dítě je hezký člověk“).

Úloha 6. Vyvozujte z premis „Každý hezký člověk je šikovný.“ a „Některé dítě je hezké.“

Úloha 7. Vyvozujte z premis „Někteří hezcí lidé nejsou šikovní.“ a „Žádné dítě není hezké.“

Úloha 8. Vyvozujte z premis „Žádný hezký člověk není šikovný.“ a „Každé dítě je hezké.“

Úloha 9. Vyvozujte z premis „Každý hezký člověk je nešikovný.“ a „Některé děti jsou hezké.“

Úloha 10. Vyvozujte z premis „Někteří hezcí lidé jsou nešikovní.“ a „Některé děti jsou hezké.“

[u1] Ano.

[u2] Ne; jako protipříklad poslouží množina se dvěma individui **B**, **C**, z nichž první je ryba-plavec dýchající žábrami a druhé je ryba nemající druhé dvě vlastnosti.

[u3] Ne; za protipříklad můžeme vzít množinu se dvěma individui **B**, **G**, z nichž první je ryba-plavec dýchající žábrami a druhé je plavec, který nemá zbývající dvě vlastnosti.

[u4] Ne; uvažte množinu se dvěma individui **D**, **E**, z nichž první je ryba-plavec nedýchající žábrami a druhé je plavec dýchající žábrami, který není rybou.

[u5] Obecně nikoli, za předpokladu existence ryb ano.

[u6] „Některé dítě je šikovné.“; žádný z dodatečných předpokladů nezaručí platnost dalšího soudu.

[u7] Nevyvodíme žádný z uvažovaných soudů.

[u8] „Žádné dítě není šikovné.“; dodatečný předpoklad existence dítěte zaručí navíc platnost soudu „Některé dítě není šikovné.“.

[u9] „Některé dítě není šikovné.“; žádný z dodatečných předpokladů nezaručí platnost dalšího soudu.

[u10] Nevyvodíme žádný z uvažovaných soudů.

Úloha 11. Je možno z premis

Každý učitel matematiky učí také fyziku.
Některý učitel angličtiny učí také matematiku.
Žádný učitel fyziky neučí češtinu.

vyvodit

Některý učitel angličtiny neučí češtinu?

Úloha 14. Je možno z týchž premis vyvodit

Některý učitel matematiky neučí angličtinu?

Úloha 15. Je možno z týchž premis vyvodit

Některý učitel matematiky neučí češtinu?

Před závěrečným příkladem shrňme, že při zkoumání sylogismů vydělujeme z predikátového počtu jen malou část. Připouštíme jen vlastnosti (tj. v terminologii predikátového počtu jen *unární* predikáty) a navíc vlastnosti musí být přesně tři (každá přesně ve dvou soudech, takže také v každém soudu jsou přesně dvě vlastnosti) a navíc každý soud musí začínat některým ze slov „Každý“, „Žádný“ nebo „Některý“ (neboli v terminologii predikátového počtu kvantifikací). Avšak dokonce neuvažujeme ani všechna tvrzení, která vyhovují popsaným omezením (např. tvrzení tvaru „Některá $\neg\mathcal{S}$ jsou $\neg\mathcal{P}$“ nejsou pro sylogistiku dost zajímavá). V následujícím paragrafu nahlédneme, že *z hlediska predikátového počtu* jsou uvedená tvrzení zcela plnoprávná a jejich vyřazení z úvah je naprosto svévolné.

Naproti tomu *z hlediska některých aplikací* může být vyřazení některých tvrzení opravdu smysluplné. Vraťme se obloukem na začátek našeho paragrafu a dejme predikátům $\mathcal{S}$, $\mathcal{P}$ a $\mathcal{M}$ stejný smysl jako tehdy. Tvrzení z minulého odstavce pak můžeme vyslovit jako

Ve zkoumané skupině existuje nepůvabná žena, jež není svobodná.

Jako hypotetický ženitbychtivý mladík pokýváte hlavou a řeknete si, že k rozhodování zda jít, či nejít na večírek zkoumané skupiny, je vám takové sdělení zcela k ničemu[18)].

V případech s více premisami se může jedna vlastnost při zadání vyskytovat positivně i negativně. Pak může být výhodné po určitou dobu chápat negaci

---

[u11)] Ano; z premis „Každý učitel matematiky učí také fyziku.“ a „Některý učitel angličtiny učí také matematiku.“ vyvodíme „Některý učitel angličtiny učí také fyziku.“.

[u14)] Ne; jako protipříklad poslouží škola s jediným učitelem matematiky, fyziky a angličtiny, který neučí češtinu.

[u15)] Ano; premisu „Některý učitel angličtiny učí také matematiku.“ užijeme jen k existenci učitele matematiky.

[18)] A tentokrát Vám — na rozdíl od poznámky 10 — rozhodování neulehčí ani případné vědomí, že ve skupině je nanejvýš jedna žena svobodná.

vlastnosti jako jakousi positivní vlastnost, na ni aplikovat to, co jsme se naučili o sylogismech a teprve ve vhodný okamžik si uvědomit, že se jedná o negaci jiné vlastnosti. Při úvahách se také může ukázat vhodné užít zákonů výrokového počtu (zejména zákon dvojité negace). Předveďme si tyto možnosti na konkrétním příkladu.

Příklad 9. Ukažme, že z premis

(1) Žádný vysoký student neumí anglicky.
(2) Některý student, který umí anglicky, nečte básně.
(3) Každý student, který nesedí vpředu, čte básně.
(4) Každý student, který sedí vpředu, rozumí fyzice.

je možno vyvodit závěr

Některý student rozumí fyzice a není vysoký.

Z třetí a druhé premisy vyvodíme (uvažujeme vlastnost „nesedět vpředu“)

(5) Některý student umí anglicky a není pravda, že nesedí vpředu.

Užívajíce zákon dvojité negace přeformulujeme (5) na

(5′) Některý student umí anglicky a sedí vpředu.

Z premis (5′) a (4) vyvodíme

(6) Některý student umí anglicky a rozumí fyzice.

Požadovaný soud je důsledkem (6) a (1).

Pokud jste nevyřešili úlohy z bodu 6 ne-předmluvy, vraťte se k nim nyní.

CVIČENÍ

II-1.1 Ukažte, že v každé skupině soud „Žádné $\mathcal{S}$ není $\mathcal{P}$“ je pravdivý, právě když je pravdivý soud „Žádné $\mathcal{P}$ není $\mathcal{S}$“. Dále ukažte, že soud „Některé $\mathcal{S}$ je $\mathcal{P}$“ je pravdivý, právě když je pravdivý soud „Některé $\mathcal{P}$ je $\mathcal{S}$“.

II-1.2 Sestrojte skupinu, ve které je pravdivý soud „Každé $\mathcal{S}$ je $\mathcal{P}$“ a současně soud „Každé $\mathcal{P}$ je $\mathcal{S}$“ je nepravdivý.

II-1.3 Graficky v diagramech prozkoumejte platnost sylogismů, které mají premisy

(1) Některé $\mathcal{M}$ není $\mathcal{P}$,
(2) Každé $\mathcal{M}$ je $\mathcal{S}$.

II-1.4 Graficky v diagramech prozkoumejte platnost sylogismů, které mají premisy

(1) Každé $\mathcal{P}$ je $\mathcal{M}$,
(2) Žádné $\mathcal{M}$ není $\mathcal{S}$.

II-1.5 Prokažte neplatnost všech sylogismů, v nichž každá (jednotlivá) premisa je tvaru ***e*** nebo ***o***. Návod: Ukažte, že v žádném ze čtverců I a J neoznačíte obě podoblasti.

II-1.6 Problém, zda soudy zachovávají platnost při přechodu na silnější predikát zkoumejte nyní pro predikát $\mathcal{S}'$, o kterém předpokládáme, že je silnější než $\mathcal{S}$, tzn. předpokládáme, že každé $\mathcal{S}'$ je $\mathcal{S}$. Pro sylogismy užité při rozhodování buďto zdůvodněte jejich platnost, nebo najděte protipříklady.

II-1.7 Můžeme z premis „Každý dlouhovlasý je kudrnatý.“ a „Žádný dlouhovlasý není černovlasý.“ vyvodit závěr „Žádný černovlasý není kudrnatý.“?

II-1.8 Můžeme z premis „Některý dlouhovlasý je kudrnatý.“ a „Každý dlouhovlasý je černovlasý.“ vyvodit závěr „Některý černovlasý je kudrnatý.“?

II-1.9 Který soud týkající se chytrých žen a vlastnosti „být hezká“ je možno vyvodit z premis „Každá mladá žena je hezká.“ a „Některá mladá žena je chytrá.“?

II-1.10 Který soud o chytrých ženách a vlastnosti „být hezká“ je možno vyvodit z premis „Každá hezká žena je mladá.“ a „Každá mladá žena je chytrá.“?

II-1.11 Prozkoumejte sylogismy (o rozumných mužích a vlastnosti „být chytrý“), jejichž premisy jsou

(a) „Žádný podnikavý muž není sportovec.“ a „Některý sportovec muž je rozumný.“
(b) „Některý podnikavý muž je sportovec.“ a „Každý sportovec je rozumný.“
(c) „Každý podnikavý muž je sportovec.“ a „Žádný sportovec není rozumný.“

II-1.12 Je možno z premis

Každý učitel matematiky učí také fyziku.
Žádný učitel angličtiny neučí fyziku.
Každý učitel angličtiny učí češtinu.

vyvodit závěr

Některý učitel češtiny neučí matematiku?

II-1.13 Je možno z premis předchozího cvičení vyvodit závěr

Žádný učitel češtiny neučí matematiku?

II-1.14 Je možno z premis

Každý učitel matematiky učí také fyziku.
Žádný učitel angličtiny neučí fyziku.
Některý učitel angličtiny neučí češtinu.

vyvodit závěr

Některý učitel angličtiny neučí matematiku?

II-1.15 Je možno z premis

Některý učitel matematiky učí také fyziku.
Žádný učitel angličtiny neučí fyziku.
Některý učitel angličtiny neučí češtinu.

vyvodit závěr

Některý učitel češtiny neučí matematiku?

II-1.16 Můžeme z premis

Každý vysoký student umí anglicky.
Každý student, který umí anglicky čte básně.
Žádný student, který sedí vpředu, nečte básně.
Každý student, který rozumí fyzice, sedí vpředu.

vyvodit závěr

Některý student rozumí fyzice a není vysoký?

Následující dvě cvičení jsou převzaty z knihy L. Carrolla Symbolická logika:

II-1.17 Můžeme z premis

Nemluvňata jsou nelogická.
Nepohrdáme nikým, kdo dovede ovládnout krokodýla.
Pohrdáme nelogickými osobami.

vyvodit závěr

Nemluvňata nedovedou ovládnout krokodýla?

II-1.18 Můžeme z premis

(1) Žádný žralok nepochybuje o tom, že je dobře vybaven.
(2) Ryba, která nedovede tančit čtverylku je politováníhodná.
(3) Žádná ryba si není jista o svém dobrém vybavení, nemá-li alespoň tři řady zubů.
(4) Všechny ryby, s výjimkou žraloků, jsou laskavé k dětem.
(5) Těžké ryby nedovedou tančit čtverylku.
(6) Ryba se třemi řadami zubů není politováníhodná.

vyvodit závěr

Těžké ryby nejsou nelaskavé k dětem?

§2

ZÁKLADY PREDIKÁTOVÉHO POČTU

Vztah výrokového a predikátového počtu lze — s vědomím, že každé přirovnání je nepřesné — přirovnat ke vztahu chemie a fyziky. Chemie zkoumá jednu velikostní úroveň (molekulovou) hmotného světa; fyzika zkoumá úrovně „nižší" (atomární a subatomární) i „vyšší" (např. fyziku těles). Analogicky můžeme chápat, že výrokový počet vyděluje „střední" úroveň logiky. Výrokový počet totiž zkoumá vlastnosti logických spojek a základním pojmem je přitom pojem výroku (nebo pojem výrokové proměnné), jehož strukturu již tento počet dále neanalyzuje. Naproti tomu predikátový počet se zajímá o predikáty, proměnné a logické funkce, na jejichž základě se vytvářejí výpovědi, kterým je přiřaditelná pravdivostní hodnota (tj. výroky). Zkoumání tohoto druhu se dá chápat jako práce na úrovni „nižší" („podrobnější"), než je úroveň výrokového počtu. Dále predikátový počet pracuje s kvantifikací a formule se současně budují pomocí logických spojek a kvantifikátorů (v tomto směru jsou tedy logické spojky a kvantifikátory chápatelné na „stejné" úrovni a jejich užití se opakovaně střídá). V následujícím paragrafu však ukážeme, že každou formuli můžeme vyjádřit také v „prenexním tvaru", tzn. napřed vytvořit potřebné základní formule, pak užívat spojky popsané ve výrokovém počtu (a nikoli kvantifikátory) a na závěr užít kvantifikátory (a již ne spojky); tento výsledek lze chápat jako možnost odsunutí kvantifikace, tj. nástroje specifického pro predikátový počet, až na úroveň „vyšší" („hrubší"), než jsou logické spojky — nástroje výrokového počtu.

*

Poměrně značná část paragrafu (strany 119–139) je věnována analýze a matematizaci (formalizaci) jazyka. Je jistě rozumné si rozmyslet, jaké prostředky používáme v běžném vyjadřování (a na ukázku například nahlédnout, jak můžeme pomocí omezených prostředků vyjádřit vztahy v rodině), avšak z hlediska logiky je takovýto rozbor jazyka pouhou přípravou pro popis našeho usuzování a nikoli tím, oč v logice skutečně jde, tzn. popisem lidského způsobu vyvozování důsledků. Musíme proto přijmout, že to podstatné z hlediska logiky začíná v tomto paragrafu až popisem vyvozovacích principů. Zejména text před přesnou definicí formule predikátového počtu (str. 134) je třeba chápat jako „pouhou" motivaci pro tuto definici.

* * *

Představme si studenty nějaké školy a zkoumejme, jakými jazykovými prostředky se o takovéto skupině vyjadřujeme a co o ní můžeme sdělit.

Skupina studentů se vyznačuje nějakými vztahy mezi studenty, např. „být starší než", „sedět vedle", „kamarádit se" apod. Můžeme také zkoumat vlastnosti jednotlivých studentů např. „být ze 3.B“ nebo „být mužem“ apod. Vztahy mohu být nejrozmanitější, avšak u každého vztahu musíme přesně vědět, kolika objektů se týká. To může být zcela zřejmé z popisu vztahu — např. velice pravděpodobně se shodneme, že „být starší než“ se týká dvou objektů a že „být ze 3.B“ vypovídá o objektu jediném. Avšak u některých slovních vyjádření není jasné, o kolika objektech vypovídají, a je nutno dodat, který vztah máme na mysli — např. „být dítětem“ se může týkat tří objektů (pokud do vztahu s dítětem dáme oba rodiče) nebo dvou objektů (jestliže chápeme „být dítětem“ jako vztah jednoho, a to kteréhokoli, rodiče a jeho dítěte) a dokonce se slovní spojení „být dítětem“ může týkat jediného objektu, což nastává v případě, že tomuto slovnímu spojení dáváme stejný význam jako slovní vazbě „být velmi mladý“.

Pro počet objektů vstupujících do vztahu se užívá označení **četnost**; místo o vztahu četnosti n mluvíme také často o n-**árním** vztahu. Takže např. vztah „být starší než“ má četnost 2, vztah „být dítětem rodičů“ má četnost 3 a vztah „být dítětem rodiče“ má četnost 2. Vztahy četnosti 3 se běžně nazývají[1] **ternární** a místo o vztahu četnosti 2 mluvíme o **binárním** vztahu. Vlastnost vypovídá o jediném objektu, je proto označována jako **unární**[1]. Abychom nemuseli neustále rozlišovat vícečetné vztahy a unární vlastnosti, používá se v obou případech neutrální slovo **predikát**. Předchozí pozorování o významu slovního spojení „být dítětem“ můžeme nyní reformulovat tak, že je třeba ještě dodat, zda se jedná o ternární, binární nebo unární predikát (neboli o ternární vztah, o binární vztah, nebo o vlastnost).

Z pohledu současné matematické logiky jsou vlastnosti pouze speciální (a to unární) predikáty. Naproti tomu při popisu Aristotelova pojetí logiky v prvním paragrafu jsme viděli, že jeho zkoumání sylogismů se soustřeďovalo výhradně na vlastnosti a vícečetné vztahy nebyly uvažovány.

Velice důležitým (binárním) vztahem je rovnost, té se budeme později věnovat podrobněji. Nicméně se sluší již nyní uvést i příklady jiných vztahů v matematice. V teorii množin je základním vztahem „být prvkem množiny“, který je binární (běžně používáme „... je prvkem množiny ...“); v geometrii je jedním ze základních vztahů „ležet na“ (opět binární, používáme např. vazbu „bod ... leží na přímce ...“), důležitou vlastností trojúhelníků je „být pravoúhlý“ (užíváme vazbu „trojúhelník ... je pravoúhlý“).

*

Druhý vyjadřovací prostředek charakteristický pro predikátový počet souvisí s nenápadným slovem „student“. Tímto slovem označujeme *kteréhokoli* — zatím blíže neurčeného — studenta z uvažované školy. Mluvíme proto o proměnné,

[1] Názvy jsou odvozeny z latinských slov pro trojí a dvojí; slovo unární je odvozeno od latinského jeden.

která „probíhá obor studentů z vyšetřované školy“ (zastupuje kterýkoli objekt ze zkoumaného oboru studentů).

Budeme-li chtít zdůraznit, že proměnná v predikátovém počtu „probíhá obor objektů“, budeme mluvit o **objektové proměnné**; nicméně terminologie velice kolísá, a tak se v české literatuře objevují také názvy *individuová*[2], *předmětová*, a dokonce rovněž *individuální* proměnná.

Kdybychom měli jen jedinou proměnnou, vyjadřovali bychom velmi obtížně svou myšlenku zcela jednoznačně, např. kdybychom užili proměnnou „student“ a řekli „Student se kamarádí se studentem.“ vyvolávalo by to dojem, že se student kamarádí sám se sebou. Předpokládáme tedy, že máme vždy dostatek různých proměnných, abychom vyjádřili, že *může* (ale nemusí) jít o různé objekty — matematičtěji řečeno předpokládáme, že systém proměnných je nekonečný. Pokud nám nestačí znaky z nějakého systému znaků (např. abecedy), používáme znaky s indexy — nabývají-li indexy např. hodnot přirozených čísel, máme zaručeno, že (indexovaných) znaků je nekonečně mnoho.

V našich příkladech o studentech školy budeme, v souhlase s řečeným, pro ně používat proměnné $s, s_1, s_2, \ldots$ Ještě jednou zdůrazněme, že *použití dvou různých proměnných* např. s_1, s_2 nám automaticky *nezajišťuje, že mluvíme o různých studentech.*

Pro predikátový počet však nejsou charakteristické ani tak proměnné samy o sobě, význačné je zejména jejich užití při tzv. **kvantifikaci.** Tuto logickou operaci přidáváme v predikátovém počtu k logickým operacím negace, implikace, konjunkce, disjunkce a ekvivalence, které jsme zkoumali již v počtu výrokovém. Pomocí kvantifikace matematizujeme spojení běžného jazyka tvaru „každý student“ a „existuje student“; je proto přirozené, že rozlišujeme dva typy kvantifikace:

(1) **Kvantifikace univerzální** (též nazývaná *obecnou* nebo *velkou kvantifikací*) matematizuje obraty běžného jazyka „pro každé ... “ (nebo „pro všechna ... “, „pro libovolné ... “, atd.). Pro univerzální kvantifikaci se nejčastěji používá symbolu $\forall$, za který se pak píše proměnná, která je kvantifikována; podrobněji: jestliže s označuje nějakou proměnnou pro studenta, pak slovní vazbu „každý student“ vyjádříme pomocí soustavy znaků $(\forall s)$.

Čeština používá na rozdíl od většiny jazyků „dvojí zápor“ — v případě záporu *bezprostředně za* kvantifikací používáme obraty „pro žádné není ... “ nebo „nikdo není... “, atd.). Podrobněji: zápis $(\forall x)\neg\varphi$ budeme zásadně číst v souhlasu s pravidly používání češtiny a ve snaze o jednoznačnost[3] „Pro žádné x není φ.“ a *nebudeme* ho číst „Pro každé x není φ.“.

[2] Pojem individua a tím vysvětlení uvedeného názvu podáváme při popisu sémantiky predikátového počtu ve druhé polovině tohoto paragrafu.

[3] viz poznámku o čtení záporu psanou petitem na počátku prvního paragrafu kap. I

(2) **Kvantifikace existenční** (též mluvíme o *malé kvantifikaci*) matematizuje obrat „existuje ... “ (též „existuje alespoň jeden ... “). Při zápisu existenční kvantifikace budeme používat symbolu $\exists$, za kterým následuje proměnná, která je kvantifikována; podrobněji: slovní spojení „existuje student“ budeme v symbolech zapisovat užívajíce posloupnosti znaků $(\exists s)$.

Symboly používané pro zápis kvantifikace se nazývají **kvantifikátory** (pro znak $\forall$ opět užíváme slovní spojení univerzální, neboli obecný nebo velký kvantifikátor a pro znak $\exists$ existenční, neboli malý kvantifikátor)[4].

Dohodli jsme se, že existenční kvantifikace má význam „existuje alespoň jeden ... “, čtenáře však mohou napadat otázky, proč neuvažujeme také kvantifikace matematizující obraty typu „existuje přesně jeden ... “, „existují alespoň dva ... “ apod. V dalším textu nahlédneme, že podobné obraty budeme schopni rovněž vyjádřit, a to na základě existenční kvantifikace při použití predikátu rovnosti. Na druhé straně o matematizaci obratů typu „existuje nekonečně mnoho ... “, „téměř každý ... “, „většina ... “ apod. se nebudeme v našem textu ani pokoušet.

*

Třetí velice intuitivní a jednoduchý vyjadřovací prostředek získáme, jestliže si uvědomíme, že ve skupině studentů můžeme vytknout určité objekty např. „Jan ze 3.B“ (slovním popisem můžeme přesně určit jeden objekt za předpokladu, že ve třídě 3.B je právě jeden student, jenž se jmenuje Jan) nebo „nejstarší studentka školy“ (slovní popis rozumně určuje objekt za předpokladu, že školu navštěvuje alespoň jedna studentka) apod. Vidíme tedy, že můžeme mít dány znaky (např. $\mathfrak{Jan3B}$; $\mathfrak{nejststud}$) pro jakési **konstanty** — v našem případě pro přesně určené studenty.

V teorii množin je konstantou např. prázdná množina, tj. ta množina, která nemá vůbec žádné prvky; v aritmetice jako konstantu[5] běžně uvažujeme *0*.

*

Pro predikátový počet jsou nezbytné proměnné a alespoň jeden predikát; navíc jsme v předchozí části zavedli pojem konstanty, jehož motivace je velmi přirozená. V predikátovém počtu se však mohou vyskytovat i matematizace dalších vyjadřovacích prostředků, k jejichž popisu za okamžik přistoupíme. Předtím je vhodné ještě jednou zdůraznit, že pro obecné vyjádření našich myšlenkových

[4] Znak $\exists$ začal užívat Giuseppe Peano (1897) a znak $\forall$ zavedl Gerhard Genzen (1938); uvádí se, že se jedná o obrácená velká první písmena slov existovat (v různých jazycích) a německého alle (všichni), příp. allgemein (obecný). Místo znaků $\forall$ a $\exists$ užívají někteří autoři po řadě znaky $\bigwedge$ a $\bigvee$, případně podle Ch. S. Peirce Σ, Π.

[5] V textu hodláme rozlišovat konstantu *0* jazyka aritmetiky a intuitivní číslo „nula“ značené 0. Prosím čtenáře, který necítí potřebu tyto dva pojmy odlišit, aby zanedbal rozdíl mezi znaky *0* a 0.

pochodů při vyvozování důsledků opravdu postačují pouze predikáty, konstanty a jeden druh proměnných, tedy prostředky uvedené doposud (navíc ani pojem konstanty není bezpodmínečně nutný). Značně bychom si usnadnili následující práci, kdybychom jiné výrazové prostředky (tzn. funkce a více druhů proměnných) nepřipustili. Před praktickým užitím logiky bychom však museli popsat, jak další výrazové prostředky vyjádřit pomocí predikátů, proměnných a konstant a hlavně bychom při takovémto přístupu nereflektovali běžný způsob vyjadřování v matematice. Museli bychom např. popisovat, jak opsat jinou formulací tak jednoduché zápisy jako např. aritmetický výraz $x + y$, nebo jak opisovat jinými slovy možnost různých proměnných pro body, přímky, atd. v geometrii. Zvolíme tedy cestu, která je při popisu logiky poněkud obtížnější, tzn. dovolíme používat funkce a více druhů proměnných hned při popisu logiky za tu cenu, že se některé úvahy v logice trochu zesložití. Toto zesložitění je soustředěno hlavně do složitější definice termu (viz dále); umožníme sice čtenáři zabývat se jen jednoduší definicí, která nepřipouští funkce, nicméně důrazně upozorňujeme již nyní, že zanedbání obecné definice termu v tomto paragrafu zapříčiní snížení porozumění §1 kap. III.

Ve zkoumané škole můžeme rovněž uvažovat **funkci** (řekněme $\mathfrak{F}$), jež každému studentu vyšetřované školy přiřazuje nejstaršího studenta z jeho třídy. Nic nám však nebrání rovněž každému studentu naší školy přiřadit (řekněme funkcí $\mathfrak{G}$) toho studenta z uvažované školy, který je starší, avšak věkově nejbližší. Takováto funkce $\mathfrak{G}$ je definována pro každého studenta s výjimkou toho nejstaršího; pro nejstaršího studenta školy funkci $\mathfrak{G}$ nějak dodefinujeme, např. tím, že nejstaršímu studentu přiřadíme jeho samého. Pomocí funkcí $\mathfrak{F}$ a $\mathfrak{G}$ můžeme přesně popsat některé studenty naší školy. Například $\mathfrak{F}(\mathfrak{Jan}3\mathrm{B})$ bude nejstarší student ze třídy 3.B a $\mathfrak{G}(\mathfrak{Jan}3\mathrm{B})$ bude ten student školy, jenž je nejmladší ze všech studentů starších než Jan ze 3.B — za předpokladu, že Jan ze 3.B není nejstarším studentem naší školy, kdyby nastal tento případ, bude $\mathfrak{G}(\mathfrak{Jan}3\mathrm{B})$ prostě student označený $\mathfrak{Jan}3\mathrm{B}$.

Jestliže zadáváme funkci, musíme také určit počet objektů, na nichž závisí výsledná hodnota. Tento počet se opět nazývá **četnost**; funkci četnosti n nazýváme zase často n**-ární** funkcí. Takže např. výše zavedené funkce $\mathfrak{F}$ a $\mathfrak{G}$ jsou funkcemi četnosti 1 neboli unárními. Funkce četnosti 2 (resp. 3) se nazývají binárními (resp. ternárními).

Přesně stejně jako v případě predikátů může význam slovního spojení zadávajícího funkci záviset na udání četnosti. Pro jednoho a téhož muže může být hodnota unární funkce „nejstarší dítě“, přiřazující mu jeho nejstarší dítě, různá od hodnoty binární funkce „nejstarší dítě“, přiřazující jemu a jeho současné manželce jejich nejstarší společné dítě.

V aritmetice pracujeme zejména s binárními funkcemi součtu $+$ a součinu $\cdot$. Pokud zkoumáme přirozená čísla, užíváme často také unární funkci následovníka přirozeného čísla $\mathfrak{S}$ (gotické S, což je počáteční písmeno anglického successor); při práci s racionálními nebo reálnými čísly bývají dalšími uvažovanými funkcemi rozdíl a podíl. V teorii množin běžně užíváme binární funkce průniku dvou množin a sjednocení dvou množin, avšak je zvykem rovněž množině přiřazovat množinu všech jejích podmnožin — takto popíšeme unární funkci potence. V geometrii přiřazujeme např. dvěma různým bodům přímku, na níž oba leží (víme, že takováto přímka je jediná).

Konstanta určuje přesně popsaný objekt, proměnná určuje nějaký zatím ne přesně určený objekt; na základě konstant a proměnných můžeme pomocí (opakovaného užití) funkcí vytvářet popisy dalších objektů (přesně budou tyto objekty určeny poté, co přesně určíme význam proměnných). Takovéto popisy objektů budeme nazývat **termy.** Matematicky přesný popis pojmu „term“ uvedeme poněkud později, teď pro pochopení významu pojmu uveďme, že termy v popisu naší školy jsou např. proměnná s (označující studenta), konstanta $\mathfrak{Jan}$3B a zápisy z nich vytvořené při využití funkcí. Při popisu uvažované školy jsou termy např. zápisy tvaru $\mathfrak{F}(s)$, $\mathfrak{F}(\mathfrak{Jan}3\mathrm{B})$ a $\mathfrak{G}(\mathfrak{G}(\mathfrak{F}(\mathfrak{Jan}3\mathrm{B})))$; aritmetickými termy jsou např. proměnné x, y, konstanta $\mathit{0}$ a zápisy (využívající funkcí $+$ a $\cdot$) např. tvaru $x + \mathit{0}$ a $[(x + \mathit{0}) \cdot y] + y$.

Pokud nepřipouštíme konstanty a funkce, splývá pojem termu s pojmem proměnné.

*

Uvedli jsme, že se v predikátovém počtu neobejdeme bez (objektových) proměnných. Nicméně v některých případech je užitečné uvažovat dokonce proměnné různých druhů, a tím matematizovat další vyjadřovací prostředek běžného jazyka. Kromě proměnných (univerzálního) druhu „student naší školy“, které probíhají *celý* vyšetřovaný soubor (studentů naší školy) můžeme uvažovat rovněž proměnné druhu „student 3.B“ (příp. také proměnné druhu „student 3.A“, atd.), které probíhají obor studentů 3.B (resp. 3.A). Proměnná druhu „student 3.B“ označuje libovolného, zatím blíže neurčeného, studenta ze 3.B. Je zcela zřejmé, že obor studentů 3.B je částí oboru studentů naší školy, tedy vše, co je splněno pro (každého) studenta naší školy, je splněno i pro (každého) studenta ze 3.B. Naproti tomu obor proměnných druhu „student 3.B“ není částí oboru proměnných druhu „student 3A.“ (tyto obory dokonce ani nemají společný prvek), takže ze splněnosti něčeho byť všemi studenty 3A. nelze usuzovat na splněnost (a dokonce ani jediným) studentem ze 3.B.

V matematice používáme více druhů proměnných zejména v geometrii, kde je zcela běžné používat proměnné druhu „bod“, proměnné druhu „přímka“, proměnné druhu „kružnice“, atd. Proměnné druhu „bod“ probíhají obor, který nemá společný prvek s oborem, jenž probíhají proměnné druhu „přímka“. Naproti tomu jestliže v matematice uvažujeme proměnné probíhající obor racionálních čísel a proměnné probíhající obor přirozených čísel, pak druhá proměnná probíhá pouze část oboru, jenž probíhá proměnná první; následně vše, co je dokázáno pro všechna racionální čísla (např. v rámci reálných čísel nebo v rámci racionálních čísel), je automaticky také dokázáno pro kterékoli přirozené číslo (v témže rámci).

Pro jakýkoli druh proměnných musí být obor, který probíhají proměnné tohoto druhu, *neprázdný.* Například druh proměnných „student 3.B" smíme používat pouze v případě, že na zkoumané škole existují studenti ze třídy 3.B. Není-li však na naší škole třída 3.E (tzn. je-li systém studentů 3E. prázdný), nepřipouští se užívání (zavedení) proměnné druhu „student 3.E".

* * *

Již jsme zmínili, že významným (binárním) predikátem je rovnost. Vztah rovnosti není užíván pouze pro vyjádření jednoduchých tvrzení typu „já jsem já", může totiž přinášet velice podstatné informace. Jako příklad se často uvádí astronomické pozorování matematizované vztahem jitřenka = večernice, který je vyjádřením toho, že dva nebeské objekty původně pozorované jeden na večerní obloze a druhý na obloze ranní jsou objektem jediným. Ovšem možnou netrivialitu rovnosti zažívá (v omezené míře) již každý školák, když zjistí např. vztah typu $3+7=5+5$.

Predikát rovnosti je běžně užívaným prostředkem umožňujícím vyjádřit mnoho vlastností a vztahů a v našem textu budeme pro zjednodušení [6] vždy předpokládat, že rovnost je k dispozici. Výjimečnost predikátu rovnosti tkví také v tom, že je jediným predikátem, pro který v logice automaticky přijímáme zvláštní axiomy, tzv. axiomy rovnosti.

Abyste si, milý čtenáři, uvědomil výhodnost užití rovnosti, zkuste uvažovat studenty školy a jedinou další teď uvažovanou vlastností budiž unární predikát „být mužem". Pokuste se vyjádřit, že do uvažované školy chodí alespoň tři studenti-muži. — Máte již vyjádření této skutečnosti? — Pokud jste rovnost nepoužil a vytvořil např. vyjádření „Existují studenti s_1, s_2, s_3, kteří jsou muži.", pak jste, přes všechna varování vyslovená při popisu pojmu proměnné, nevyloučil možnost, že všichni tři studenti s_1, s_2, s_3 jsou týmž studentem, tj. vaše vyjádření zajišťuje pouze, že do školy chodí alespoň jeden student-muž. Správné vyjádření skutečnosti, že do školy chodí alespoň tři studenti-muži je např. „Existují studenti s_1, s_2, s_3, kteří jsou muži a kteří jsou *od sebe různí.*" (při podrobnějším rozpisu formulací „Existují studenti s_1, s_2, s_3, kteří jsou muži a s_1 není roven s_2 a s_1 není roven s_3 a s_2 není roven s_3.").

* * *

[6] Je sice možno uvažovat predikátový počet bez rovnosti, v mnoha případech je však nutno užití predikátu rovnosti nějak nahrazovat. Navíc formulace některých tvrzení logiky závisejí na tom, zda je, či není predikát rovnosti k dispozici, a v našem textu se nehodláme takovýmito podrobnosti zabývat, lze je najít např. v [So].

Představme si, že chceme část skutečnosti v uvažované škole popsat a podrobně prozkoumat. Nejprve si určíme, jakou část budeme zkoumat — k tomu účelu vybereme některé predikáty, případně také konstanty, funkce a druhy proměnných; takovýto systém výrazových prostředků nazýváme **jazykem**. Obvykle popisujeme pouze část skutečnosti, protože vydělenou část jsme schopni prozkoumat mnohem podrobněji a navíc tak vyniknou souvislosti mezi vybranými prvky jazyka, které by při souběžném zkoumání větší části skutečnosti mohly být přehlédnuty.

Pro další úvahy omezme úvahy o naší škole jen na některé z dosud uvažovaných predikátů, avšak kromě proměnných $s, s_1, s_2, \dots$ probíhajících (všechny) studenty školy, připusťme ještě navíc druh proměnných $u, u_1, u_2, \dots$, tyto proměnné budou probíhat „upovídané studenty".

Jazyk **Ls** popisující skupinu studentů školy tedy obsahuje dva druhy proměnných $s, \dots$ a $u, \dots$ (přičemž první druh je univerzální), dále nechť jazyk obsahuje dva binární predikáty „být starší než" $\succ$ a „kamarádit se" $\mathcal{K}am$, unární predikát „být mužem" $\mathcal{M}u\check{z}$, dvě konstanty $\mathfrak{Jan}\mathrm{3B}$ a $\mathfrak{nejststud}$ (označující Jana ze 3.B a nejstarší studentku) a dvě unární funkce $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ s výše popsaným významem.

Přikročme nyní k popisu formulí vznikajících pomocí těchto výrazových prostředků, matematicky řečeno k popisu formulí jazyka **Ls.** Při vytváření formulí využijeme nedávno získanou znalost vytváření termů na základě konstant a funkcí jazyka **Ls.**

Základní formule[7)] týkající se naší školy budou výpovědi, že zkoumaní studenti (popsaní termy) jsou v tom kterém vztahu nebo že zkoumaný student (popsaný termem) má tu nebo onu vlastnost. Jinak řečeno: základní formuli získáme, jestliže do predikátu „dosadíme" tolik termů, kolik je četnost predikátu.

Základní formule jazyka **Ls** budou odpovídat např. slovním spojením „Student je mužem." a „Upovídaný student je mužem." (do unárního predikátu „být mužem" „dosazujeme" v prvém případě univerzální proměnnou a ve druhém proměnnou druhu u — v symbolech $\mathcal{M}u\check{z}(s)$ a $\mathcal{M}u\check{z}(u)$), „Nejstarší studentka je mužem." (do unárního predikátu „být mužem" „dosazujeme" konstantu $\mathfrak{nejststud}$. — v symbolech $\mathcal{M}u\check{z}(\mathfrak{nejststud})$), „Jan ze 3.B je starší než nejstarší studentka", „Nejstarší studentka je starší než Jan ze 3.B." (do binárního predikátu „být starší" jsme v předchozích dvou případech „dosadili" dvě konstanty; základní formule zapíšeme v symbolech $\mathfrak{Jan}\mathrm{3B} \succ \mathfrak{nejststud}$ a $\mathfrak{nejststud} \succ \mathfrak{Jan}\mathrm{3B}$ — uvědomte si, že změnou pořadí termů „dosazovaných" do predikátu můžeme dostat různé formule!), „Jan ze 3.B je starší než Jan ze 3.B." (do binárního predikátu jsme „dosadili" dvakrát týž term — v symbolech $\mathfrak{Jan}\mathrm{3B} \succ \mathfrak{Jan}\mathrm{3B}$), „Student se kamarádí s Janem ze 3.B." (do binárního predikátu „kamarádit se" jsme „dosadili" jednu proměnnou a jednu konstantu — v symbolech $\mathcal{K}am(s, \mathfrak{Jan}\mathrm{3B})$) a také

7) Někteří autoři používají název *atomická* (či *atomární*) formule.

slovním spojením „První student se kamarádí s druhým studentem.“ (do binárního predikátu jsme „dosadili“ dvě různé proměnné — v symbolech $\mathcal{K}am(s_1, s_2)$) a „Student se kamarádí sám se sebou.“ (do binárního predikátu jsme „dosadili“ dvakrát tutéž proměnnou — v symbolech $\mathcal{K}am(s, s)$).

Teď se pokuste sám vyjádřit v symbolech základní formule „Nejstarší student 3.B je mužem.“, „Nejstarší studentka je nejstarší ve 3.B.“ a „Upovídaný student se kamarádí s Janem ze 3.B.“. — Doufám, že vytvoření symbolických zápisů $\mathcal{M}u\check{z}(\mathfrak{F}(\mathfrak{Jan}3\mathrm{B}))$, $\mathfrak{F}(\mathfrak{Jan}3\mathrm{B}) = \mathfrak{nejststud}$ a $\mathcal{K}am(u, \mathfrak{Jan}3\mathrm{B})$ vám nečinilo žádné potíže.

Zkuste vyjádřit slovy následující dvě základní formule (vzniklé „dosazením“ termů do binárního predikátu rovnosti): $\mathfrak{F}(\mathfrak{Jan}3\mathrm{B}) = \mathfrak{Jan}3\mathrm{B}$ a $\mathfrak{F}(\mathfrak{Jan}3\mathrm{B}) = \mathfrak{S}(\mathfrak{Jan}3\mathrm{B})$. — Alespoň tu první byste měl, milý čtenáři, přeformulovat sám — první formule vyjadřuje, že $\mathfrak{Jan}3\mathrm{B}$ je nejstarším studentem ve třídě 3.B, druhá formule má již trochu složitější slovní vyjádření, říká totiž, že buďto je Jan druhým nejstarším studentem ve 3.B a navíc nejstarší student ze 3.B je Janovi ze 3.B věkově nejblíže ze všech studentů *celé školy* starších než Jan ze 3.B, nebo je Jan ze 3.B nejstarším studentem *celé školy.*

Základní formule $\mathcal{K}am(\mathfrak{nejststud}, \mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathfrak{F}(\mathfrak{Jan}3\mathrm{B}))))$ napsaná v symbolech je poměrně jednoduchá, její slovní vyjádření je však již poněkud složitější: „Nejstarší studentka se kamarádí se studentem, který je druhý nejmladší ze všech studentů starších než nejstarší student ze 3.B — pokud takový student existuje; pokud neexistuje, pak se nejstarší studentka kamarádí se studentem, který je starší než nejstarší student ze 3.B — pokud takový student existuje; pokud neexistuje, pak se nejstarší studentka kamarádí s nejstarším studentem ze 3.B.“.

V aritmetice jsou základními formulemi např. $\mathit{0} = y$, $y = \mathit{0}$ (v obou předchozích formulích jsme do predikátu rovnosti „dosadili“ proměnnou a konstantu; uvedené základní formule jsou různé, avšak níže popsané axiomy rovnosti zajistí, že obě formule mají týž význam), $\mathit{0} = \mathit{0}$ („dosadili“ jsme dvakrát tutéž konstantu) nebo $x = y$ („dosadili“ jsme dvě různé proměnné). Jako příklady základních formulí, které vzniknou užitím termů vybudovaných pomocí aritmetických funkcí, uveďme např. $x = x \cdot y + y$ („dosadili“ jsme jednu proměnnou a jeden složitější term) a také $(x+y)\cdot x = x\cdot x+y\cdot x$. Jaký je intuitivní význam formule $x = \mathfrak{S}(\mathit{0})$? — x je následovníkem $\mathit{0}$, tzn. je číslem $\mathit{1}$.

*

V prvé kapitole jsme popsali logické operace používané ve výrokovém počtu (negaci, implikaci, konjunkci, disjunkci a ekvivalenci); tyto logické operace používáme i v počtu predikátovém, a to v témže intuitivním významu. V predikátovém počtu jsme však logické operace rozmnožili ještě o kvantifikace a všechny tyto prostředky budeme opakovaně užívat pro tvorbu formulí predikátového počtu.

Formule vypovídající o naší škole pak odpovídají např. slovním spojením „Není pravda, že nejstarší studentka je mužem.“ (takto vyjádříme, že nejstarší studentka je žena; uvědomme si, že predikát „být žena“ není k dispozici — v symbolech $\neg\mathcal{M}u\check{z}(\mathfrak{nejststud}))$, „Jan ze 3.B není nejstarším studentem školy.“ (v symbolech $\neg\mathfrak{G}(\mathfrak{Jan}3\mathrm{B}) = \mathfrak{Jan}3\mathrm{B})$, „Existuje student, který se kamarádí s Janem ze 3.B.“ (v symbolech $(\exists s)\mathcal{K}am(s, \mathfrak{Jan}3\mathrm{B}))$, „Existuje upovídaný student, který se kamarádí s Janem ze 3.B.“ (v symbolech $(\exists u)\mathcal{K}am(u, \mathfrak{Jan}3\mathrm{B}))$ a „Nejstarší student ze 3.B má ve škole kamarádku, která je starší než on.“ (v symbolech $(\exists s)[\mathcal{K}am(s, \mathfrak{F}(\mathfrak{Jan}3\mathrm{B}))\ \&\ \ s \succ \mathfrak{F}(\mathfrak{Jan}3\mathrm{B})\ \&\ \neg\mathcal{M}u\check{z}(s)]$.

Navažte na problematiku diskutovanou výše a pomocí symbolů napište formuli vyjadřující, že v naší škole existují alespoň tři studenti-muži. — Teď jste snad již nezapomněl použít rovnosti a napsal např.

$$(\exists s_1)(\exists s_2)(\exists s_3)(\mathcal{M}u\check{z}(s_1)\ \&\ \mathcal{M}u\check{z}(s_2)\ \&\ \mathcal{M}u\check{z}(s_3)\ \&$$
$$\&\ \neg s_1 = s_2\ \&\ \neg s_1 = s_3\ \&\ \neg s_2 = s_3).$$

Nyní vyjádřete užívajíce pouze vyjadřovací prostředky uvažované k popisu naší školy, že existují dvě kamarádky, které se již nekamarádí s nikým jiným. — Už se vám to podařilo? — Řešením je např. „Existují různí studenti s_1, s_2, kteří spolu kamarádí a nejsou muži, a každý student s_3, který se kamarádí s první z nich, je roven druhé z nich, a nadto každý student s_4, který se kamarádí s druhou z nich, je roven první z nich.“, tzn. v symbolech

$$(\exists s_1)(\exists s_2)[\mathcal{K}am(s_1, s_2)\ \&\ \neg s_1 = s_2\ \&\ \neg\mathcal{M}u\check{z}(s_1)\ \&\ \neg\mathcal{M}u\check{z}(s_2)\ \&$$
$$\&\ (\forall s_3)(\mathcal{K}am(s_1, s_3) \to s_3 = s_2)\ \&\ (\forall s_4)(\mathcal{K}am(s_2, s_4) \to s_4 = s_1)].$$

Možná, že se vaše vyjádření liší od výše uvedeného a nyní rozvažujete, proč je vám nabízeno něco jiného. V každém případě byste si měl v tomto okamžik uvědomit, že se jedna idea dá vyjádřit více způsoby. Jako ilustraci uveďme jiné možné vyjádření ideje dvou kamarádek, které se již nekamarádí s nikým jiným[8)]: „Existují různí studenti s_1, s_2, kteří spolu kamarádí, nejsou muži a každý student s_3, který se kamarádí s kteroukoli z nich je některé z nich roven.“, tzn. v symbolech

$$(\exists s_1)(\exists s_2)\big(\mathcal{K}am(s_1, s_2)\ \&\ \neg s_1 = s_2\ \&\ \neg\mathcal{M}u\check{z}(s_1)\ \&\ \neg\mathcal{M}u\check{z}(s_2)\ \&$$
$$\&\ (\forall s_3)[(\mathcal{K}am(s_1, s_3) \vee \mathcal{K}am(s_2, s_3)) \to (s_3 = s_1 \vee s_3 = s_2)]\big).$$

Úloha 1. Vyjádřete v symbolech jazyka **Ls,** že nejstarší student školy je ženou, a to různými způsoby podle zadání:

a) můžete použít celý jazyk **Ls,** avšak formule musí být formulí základní;
b) nesmíte použít konstanty a kvantifikovat smíte nejvýše jednou;
c) nesmíte použít ani konstanty ani funkce jazyka **Ls.**

[8)] K ukázání, že obě vyjádření popisují tutéž ideu, užijeme fakt, že žádný student se nekamarádí sám se sebou.

[u1)] a) $\mathfrak{G}(\mathfrak{nejststud}) = \mathfrak{nejststud}$ (tj. nejstarší studentka je nejstarší v celé škole); b) $(\exists x)(\mathfrak{G}(x) = x\ \&\ \neg\mathcal{M}u\check{z}(x))$; c) $(\exists x)[\neg\mathcal{M}u\check{z}(x)\ \&\ (\forall y)(\neg y \succ x)]$ nebo $(\exists x)[\neg\mathcal{M}u\check{z}(x)\ \&\ \neg(\exists y)(y \succ x)]$.

Teď se naopak pokuste zápisy v symbolech vyjádřit slovy. Jako první uvažte formuli $(\forall s_1)(\forall s_2)(s_1 \succ s_2 \vee s_1 = s_2 \vee s_2 \succ s_1)$ — už se vám podařilo ji rozluštit? — zápis vyjadřuje, že „Ze dvou různých studentů je vždy jeden starší.“.

A jaký význam přiřknete zápisu $(\forall s_1)(\exists s_2)\mathcal{K}am(s_1, s_2)$ a zápisu a $(\exists s_2)(\forall s_1)\mathcal{K}am(s_1, s_2)$? — Víte již zda zápisy mají stejný význam? — První zápis vyjadřuje, že každý student má ve škole kamaráda, druhý však vypovídá, že ve škole existuje jeden student, který se kamarádí s každým studentem školy. Doufám, že jste si uvědomil, vážený čtenáři, že záměnou pořadí univerzálního a existenčního kvantifikátoru se může výrazně změnit význam formule. Naproti tomu záměnou dvou po sobě bezprostředně následujících univerzálních nebo záměnou dvou po sobě bezprostředně následujících existenčních kvantifikátorů se význam nemění, např. jak formule $(\exists s_1)(\exists s_2)\mathcal{K}am(s_1, s_2)$, tak také formule $(\exists s_2)(\exists s_1)\mathcal{K}am(s_1, s_2)$ vypovídají, že existují dva studenti, kteří se spolu kamarádí. Podrobněji o možné změně významu formule vzniklé prohozením pořadí logických znaků pojednáme v dalším textu (viz úlohy 25, 29 a 31).

Jak se změní význam dvou posledně zkoumaných formulí, jestliže proměnnou s_1 zaměníme proměnnou u_1, tzn. jaký je význam formulí $(\forall u_1)(\exists s_2)\mathcal{K}am(u_1, s_2)$ a $(\exists s_2)(\forall u_1)\mathcal{K}am(u_1, s_2)$? — Samozřejmě, že první vyjadřuje, že každý upovídaný student se s někým kamarádí a druhá, že existuje student (ne nutně upovídaný), který se kamarádí se všemi upovídanými studenty. Zapsat, že každý upovídaný student kamarádí s nějakým upovídaným studentem by mělo být pro vás velice jednoduché. — Je tomu tak? — Nejpřirozenější je zápis $(\forall u_1)(\exists u_2)\mathcal{K}am(u_1, u_2)$.

V aritmetice je formulí např. slovní spojení „Pro každé číslo x existuje číslo y tak, že $x + \mathit{0} = y$“ (v symbolech $(\forall x)(\exists y)(x + \mathit{0} = y)$). Jaký je význam aritmetických formulí (uvažujeme jen přirozená čísla) $(\exists y)(y + y = x)$ a $(\forall y)(\forall z)\big(\neg x = \mathfrak{S}(\mathit{0})\ \&\ [y \cdot z = x \rightarrow (y = x \vee y = \mathfrak{S}(\mathit{0}))]\big)$? První formule vyjadřuje, že x je sudé. — Pro nalezení významu druhé formule připomeňme, že jsme již zjistili, že formule $y = \mathfrak{S}(\mathit{0})$ znamená, že y je jedničkou. Tato nápověda by vám měla stačit. — Druhá formule vypovídá, že x je prvočíslo (první člen konjunkce, tj. formule $\neg x = \mathfrak{S}(\mathit{0})$, požaduje, aby x nebylo číslem 1 — jedničku nepovažujeme za prvočíslo). Napište formuli vyjadřující, že x je dělitelné šesti aniž užijete jakoukoli konstantu — řešením je např. zápis $(\exists y)(\exists z)(x = y + y\ \&\ x = z + z + z)$.

* * *

Protože vyjadřování vztahů a vlastností v omezeném jazyce je potřeba v nejrůznějších situací (včetně matematických teorií), objasníme pojem formule ještě na několika příkladech rodinných vztahů. Budeme uvažovat tři predikáty: vlastnost „být mužem“ a dva binární vztahy „být dítětem rodiče“ a „být manžely“, které budeme po řadě značit $\mathcal{M}u\check{z}, \mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}$ a $\mathcal{M}an\check{z}$; členy rodiny budeme označovat proměnnými $x, y, z, \ldots$; nepřipouštíme ani konstanty ani funkce. (Předpokládáme, že v rodině nedošlo k rozvodům, úmrtím a opakovaným sňatkům ani sňatkům mezi členy rodiny, atd. — otázky typu zda vdova po synovi je snachou nebo zda třetí manželka prvního manžela otcovy sestry je tetou, nehodláme řešit, natož řešení vyjadřovat v matematizované podobě.) V následující tabulce je v levém sloupci zadán vztah, který má být vyjádřen, a v pravém sloupci je slovní vyjádření užívající jen vyjmenovaných predikátů a pod ním ryze formální formule. Autor doufá, že již jste, milý čtenáři, ztratil odpor k vyjádření v symbolech a že budete schopen přijmout tuto trochu formalismu. Abyste při vlastní tvorbě vyjádření vztahu řešení nebyl ovlivňován řešením navrženým autorem, doporučuji vám si pravý sloupec zakrýt a postupně odkrývat potřebný řádek pro kontrolu (další příklady lze nalézt ve cvičeních II-2.1 a II-2.2).

x je otcem y	x je mužem a y je dítě x $\mathcal{M}u\check{z}(x)\ \&\ \mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(y,x)$;
x je dcerou y	x není mužem a x je dítě y $\neg\mathcal{M}u\check{z}(x)\ \&\ \mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(x,y)$;
x je vnukem y	x je mužem a existuje z takové, že x je dítě z a z je dítě y $\mathcal{M}u\check{z}(x)\ \&\ (\exists z)(\mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(x,z)\ \&\ \mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(z,y))$;
x je tchánem y	x je mužem a existuje z takové, že z je dítě x a y, z jsou manželé $\mathcal{M}u\check{z}(x)\ \&\ (\exists z)(\mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(z,x)\ \&\ \mathcal{M}an\check{z}(y,z))$.

Popis následujících příbuzenských vztahů je trochu složitější, než se jeví na první pohled:

x je sourozencem y	existuje z takové, že x je dítě z a y je dítě z a x, y jsou *různé* $(\exists z)(\mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(x,z)\ \&\ \mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(y,z)\ \&\ \neg x = y)$;
x je sestřenicí y	x není mužem a existuje u a existují z_1, z_2 od sebe *různé* děti u takové, že x je dítětem z_1 a y je dítětem z_2 $\neg\mathcal{M}u\check{z}(x)\ \&\ (\exists u)(\exists z_1)(\exists z_2)[\mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(x,z_1)\ \&$ $\&\ \mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(y,z_2)\ \&\ \neg z_1 = z_2\ \&\ \mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(z_1,u)\ \&\ \mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(z_2,u)]$;

při matematizaci pojmu sourozenec musíme totiž zabezpečit *různost* uvažovaných členů rodiny (žádný člověk není svým vlastním sourozencem); v popisu sestřenice musíme zajistit, že se nejedná o sestru (musí existovat *sourozenci*, z nichž jeden je rodičem x a druhý je rodičem y).

Vztah „x je tetou y“ zapište jednak v slovníkové podobě (sestra otce nebo matky) a jednak respektujíce běžné užití, při kterém se tetou nazývá také manželka strýce. — V slovníkové podobě: x není mužem a existuje u a jeho dítě z různé od jeho dítěte x takové, že y je dítětem z — v symbolech $\neg\mathcal{M}u\check{z}(x)\ \&\ (\exists u)(\exists z)(\mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(z,u)\ \&\ \mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(x,u)\ \&\ \neg z = x\ \&\ \mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(y,z))$. Druhý význam vyjádříme pomocí popisu x není mužem a existuje u a existují z_1, z_2 od sebe *různé* děti u takové, že y je dítětem z_1 a buďto x je rovné z_2, nebo x a z_2

jsou manželé — v symbolech

$$\neg \mathcal{M}u\check{z}(x) \mathbin{\&} (\exists u)(\exists z_1, z_2)[\mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(z_1, u) \mathbin{\&} \mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(z_2, u) \mathbin{\&} \neg z_1 = z_2 \mathbin{\&} \mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(y, z_1) \mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&} (z_2 = x \vee \mathcal{M}an\check{z}(z_2, x))].$$

Rozpoznejte, který rodinný vztah popisují následující formule (řešení jsou v pravém sloupci):

$\neg \mathcal{M}u\check{z}(y) \mathbin{\&} \mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(x, y)$	y je matkou x;
$(\exists z)(\mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(x, z) \mathbin{\&} \mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(y, z) \mathbin{\&} \mathcal{M}u\check{z}(x) \mathbin{\&} \neg x = y)$	x je bratrem y;
$(\exists z)(\mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(y, z) \mathbin{\&} \mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(z, x))$	y je vnoučetem x;
$(\exists z_1, z_2)(\mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(y, z_1) \mathbin{\&} \mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(z_1, z_2) \mathbin{\&} \mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(z_2, x) \mathbin{\&} \neg \mathcal{M}u\check{z}(x))$	x je prababičkou y;
$\mathcal{M}u\check{z}(x) \mathbin{\&} (\exists z)(\mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(z, y) \mathbin{\&} \mathcal{M}an\check{z}(x, z))$	x je zetěm y.

* * *

Uvedli jsme, že zkoumání nějakého jevu (např. popisu uvažované školy, avšak také popisu aritmetiky) je vhodné začít vymezením jazykových prostředků, které hodláme používat, tzn. formulací jazyka. To však nestačí, zkoumaný jev je třeba dále charakterizovat nějakými tvrzeními (tj. formulemi zvoleného jazyka) pozorovanými ve zkoumaném výseku skutečnosti (nezávisle na tom, zda výseku světa reálného nebo myšleného). Tato tvrzení se při následném zkoumání stanou **axiomy** — přijímáme je jako základní tvrzení, která již nedokazujeme. Je pochopitelně žádoucí vybrat za axiomy tvrzení, která vystihují podstatu vyšetřovaného jevu, neboť v takovém případě budeme schopni z axiomů vyvodit netriviální tvrzení týkající se zkoumaného jevu.

Jazykem a soustavou axiomů je určena **teorie**; pro teorie budeme používat symboly $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{S}, \ldots$ Tvůrčí práci teoretického matematika můžeme popsat jako hledání dokazatelných tvrzení v matematických teoriích (např. prokázání určitého tvrzení v geometrii, aritmetice apod.). Prvním, kdo systematicky využil vyvozování, byl Eukleidés (315–271 př. Kr.), který ve svých Základech vyvozuje z několika axiomů celou nauku (geometrii, ale protože aritmetiku chápe jako součást geometrie, je možno říci, že celou tehdejší matematiku).

Deduktivní přístup předvedený při budování geometrie ovlivnil celé pojetí vyvozování včetně aplikací mimo matematiku. Matematicky popsatelné teorie se totiž již dlouho vytvářely také v přírodních vědách (speciálně ve fyzice), v posledních desetiletích[9)] se běžně vytvářejí i ve vědách společenských, tedy už vlastně všude ve vědě.

[9)] Nicméně již Spinozovo pojednání Etika (z r. 1665) představuje filozofii metodou věta – – důkaz, tudíž ve značně formální podobě. Podtitul knihy (podle vydání nákladem České akademie věd a umění z r. 1926) „po geometricku vyložená“ se odvolává na Eukleidovo užití vyvozování v geometrii.

Náš příklad školy je příliš jednoduchý. Abychom získali lepší představu o významu teorií, představme si raději fyzika, který pro naše pochopení světa vytvořil nějakou hypotézu. Pokud hypotézu formuluje dostatečně přesně, vytváří teorii ve smyslu logiky. V této teorii pak může prokazovat různé důsledky pouze teoretickými úvahami, tzn. na základě principů popisovaných logikou. Tyto důsledky fyzik ověřuje pokusy. Pokud výsledky pokusů neodpovídají dokázaným důsledkům, nahlédne fyzik, že jeho hypotéza je neudržitelná, zavrhne ji a pokouší se vytvořit jiný pohled na reálný svět, tj. novou hypotézu. Pokud však pokusy odpovídají dokázaným důsledkům, stává se hypotéza čím dál tím více pravděpodobnou a teorie zachycující takovouto hypotézu se stává čím dál tím více všeobecně přijímaným popisem reálného světa.

Jednou z často uvažovaných teorií je například aritmetika (přirozených čísel). Její jazyk se skládá z binárních funkcí součtu $+$ a součinu $\cdot$ a unární funkce následovníka $\mathfrak{S}$, konstantou je $\mathit{0}$; proměnné značíme obvykle $x, y, z, \ldots$ a jediným predikátem je rovnost. Systémy axiomů Robinsonovy a Peanovy aritmetiky, kteréžto jsou nejčastěji používány, uvedeme v prvním paragrafu následující kapitoly. V předchozím textu jsme již předložili několik příkladů z aritmetiky; zkontrolujte nyní zpětně, že v těchto případech nebyly použity jiné symboly než symboly jazyka aritmetiky.

Ve třetím paragrafu uvedeme jako příklady jazyky a axiomatické systémy několika málo dalších matematických teorií.

*

Pochopitelně kromě axiomů teorie budeme — stejně jako ve výrokovém počtu — při důkazu užívat axiomů logiky. Pro formulaci těchto axiomů jsou klíčové pojmy vázaného a volného výskytu proměnné. Předveďme si proto tyto pojmy na neustále diskutovaném příkladu školy. Poté se již budeme věnovat pojmům formule, termu, vázaného a volného výskytu proměnné ve vší obecnosti.

O pravdivosti věty „Student se kamarádí s Janem ze 3.B.“ (symbolicky zapsatelné formulí $\mathcal{K}am(s, \mathfrak{Jan}3\mathrm{B})$) nemá cenu obecně uvažovat dříve než určíme, o kterého studenta se jedná — pro některé studenty může být formule pravdivá a pro jiné nepravdivá. Protože jediný výskyt proměnné „student“ v předcházející formuli potřebuje ještě upřesnit, nazýváme ho **volným**. Naproti tomu věta „Každý student se kamarádí s Janem ze 3.B.“ (rozšiřující předchozí slovní spojení o slovíčko „každý“ a symbolicky zapsatelné formulí $(\forall s)\mathcal{K}am(s, \mathfrak{Jan}3\mathrm{B})$) je buďto pravdivé nebo nepravdivé (význam je již plně určen). Proměnná s má v předchozí formuli dva výskyty, na oba je aplikována kvantifikace (první výskyt se nachází bezprostředně za kvantifikátorem, druhý se nachází ve formuli, na niž je kvantifikátor aplikován); výskyty proměnné, na které je kvantifikace aplikována nazýváme **vázané**. Výše jsme dovolili spojovat formule pomocí logických spojek, takže můžeme vytvořit formuli $(\forall s)\mathcal{K}am(s, \mathfrak{Jan}3\mathrm{B}) \rightarrow \mathcal{K}am(s, \mathfrak{Jan}3\mathrm{B})$. Protože spojením dvou formulí by se neměla měnit vázanost či volnost toho kterého výskytu proměnné, je přirozené prohlásit, že dva výskyty proměnné s v první části diskutované formule jsou vázané a že další výskyt proměnné s ve druhé části formule je volný. Naproti tomu ve formuli $(\forall s)[\mathcal{K}am(s, \mathfrak{Jan}3\mathrm{B}) \to \mathcal{K}am(s, \mathfrak{Jan}3\mathrm{B})]$ je kvantifikace aplikována na formuli $[\mathcal{K}am(s, \mathfrak{Jan}3\mathrm{B}) \to \mathcal{K}am(s, \mathfrak{Jan}3\mathrm{B})]$ (a nikoli na formuli $\mathcal{K}am(s, \mathfrak{Jan}3\mathrm{B})$ jako v předchozím příkladu), je proto přirozené všechny výskyty proměnné s v ní označit za vázané. Aby nevznikly pochyby o významu pojmů vázaný a volný výskyt, uveďme ještě jeden příklad a uvažujme formuli $(\forall s_1)\mathcal{K}am(s_1, s_2)$, ve které jsou dvě proměnné s_1, s_2. Oba výskyty proměnné s_1 pochopitelně prohlásíme za vázané, avšak výskyt proměnné s_2 označíme za volný — na formuli $\mathcal{K}am(s_1, s_2)$ je sice kvantifikace aplikována, ale tato kvantifikace se týká proměnné s_1 *různé* od proměnné s_2.

Zkuste rozhodnout, které výskyty proměnných jsou volné a které jsou vázané jednak ve formuli $(\forall s_1)[\mathcal{K}am(s_1, s_2) \vee (\forall s_2)(\neg\mathcal{K}am(s_1, s_2) \to s_1 = s_2)]$ a jednak v aritmetické formuli $(\forall x)(\exists z)(x + y = \mathit{0} \to y = \mathit{0})$. — Že je to jednoduché! — V první formuli jsou všechny výskyty proměnné s_1 vázané, první výskyt proměnné s_2 je volný, další tři jsou vázané; ve druhé formuli jsou vázané oba výskyty proměnné x, rovněž výskyt proměnné z je vázaný, avšak oba výskyty proměnné y jsou volné.

* * *

Na úvod zcela obecného (a formálnějšího) popisu formulí daného jazyka **L** shrňme všechny prostředky jazyka, které mohou být užity. Při zadání jazyka **L** jsou určeny znaky pro predikáty tohoto jazyka (a ke každému predikátu je udána jeho četnost, což je nenulové přirozené číslo); pro predikáty budeme užívat symboly $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \ldots$ Predikát rovnosti se obvykle neudává při výčtu predikátů jazyka, bývá pokládán za symbol logiky podobně jako logické spojky a kvantifikátory. V našem textu budeme vždy předpokládat, že máme proměnné univerzálního druhu, pro které budeme používat zejména závěrečná písmena abecedy, tj. znaky $x, y, z, \ldots$, případně s indexy. Nadto mohou být zadány ještě další druhy proměnných probíhající jen některé části oboru všech objektů; pak musí být určeno, jaké znaky budeme používat pro proměnné těchto druhů. Dále mohou být zadány znaky pro konstanty a funkce; pokud jazyk obsahuje funkce, musíme u každé z nich znát její četnost, což je přirozené číslo[10)]; pro konstanty budeme užívat znaky $\mathfrak{c}, \ldots$ a pro funkce symboly $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \ldots$

V případě, že jazyk **L** neobsahuje funkce, označujeme pojmem **term** všechny proměnné a konstanty jazyka **L** a nic jiného. Pro jazyky bez funkcí popisuje tedy následující definice kompletně všechny formule jazyka **L**. Pro jazyky obsahující funkce je definice termu složitější, bude podána až o několik odstavců dále a definice formule pro jazyky obsahující funkce bude úplná až po této definici. Pořadí

10) V souladu s obvyklým přístupem nevylučujeme chápání konstant jako 0-árních funkcí, v našem textu však dáme přednost přehlednosti před jednoduchostí vyjadřování a budeme proto vyšetřovat konstanty odděleně.

definic umožní čtenáři, který se nehodlá zabývat poněkud složitějším případem jazyků s funkcemi, toto své přání naplnit a skutečně tento případ přeskočit.

Pokud vám, vážený čtenáři, chybí přesná definice vázaného a volného výskytu, naleznete ji jako dodatek k jednotlivým krokům rekurze při následující definici formule. Autor však předpokládá, že pro většinu čtenářů bude předchozí popis pojmu volných a vázaných výskytů proměnné dostatečný, a proto zmíněnou definici uvádí petitem.

Formulí predikátového počtu jazyka **L** je jakýkoli zápis, který dokážeme sestrojit rekurzí s následujícími parametry:

Stavební kameny: znaky pro predikáty jazyka **L**, termy téhož jazyka, znak rovnosti (tzn. znak $=$),
výrokové spojky (tj. znaky $\neg, \rightarrow, \ \&\ , \vee$ a $\equiv$), kvantifikátory (tj. znaky $\forall$ a $\exists$)
a závorky (jakožto pomocné symboly);

Základní formule: zápisy $\mathcal{P}(t_1, \ldots, t_k)$, kde $\mathcal{P}$ označuje k-ární predikát jazyka **L** nebo znak
rovnosti a $t_1, \ldots, t_k$ jsou termy téhož jazyka;
v základní formuli jsou všechny **výskyty** všech proměnných **volné;**

Pravidla pro vytváření dalších formulí:

(a) je-li φ formule jazyka **L**, je formulí téhož jazyka také její negace $\neg\varphi$;
negace nemění charakter proměnné, tzn. je-li **výskyt** proměnné volný (resp. **vázaný**) ve formuli φ, je odpovídající výskyt ve formuli $\neg\varphi$ volný (resp. vázaný);

(b) jestliže φ a ψ jsou formule jazyka **L**, jsou formulemi téhož jazyka rovněž implikace $(\varphi \rightarrow \psi)$, konjunkce $(\varphi \ \&\ \psi)$, disjunkce $(\varphi \vee \psi)$ a ekvivalence $(\varphi \equiv \psi)$ vytvořené užitím formulí φ a ψ;
(binární) logické spojky nemění charakter proměnné, tzn. je-li výskyt proměnné volný (resp. vázaný) ve formuli φ nebo ψ, jsou odpovídající výskyty ve formulích $\varphi \rightarrow \psi$, $\varphi \ \&\ \psi$, $\varphi \vee \psi$ a $\varphi \equiv \psi$ volné (resp. vázané);

(c) je-li φ formule jazyka **L** a je-li v proměnná (jakéhokoli druhu) jazyka **L**, jsou formulemi téhož jazyka také zápisy $(\forall v)\varphi$ a $(\exists v)\varphi$;
ve formulích $(\forall v)\varphi$ a $(\exists v)\varphi$ je každý výskyt proměnné v vázaný (včetně výskytu těsně za kvantifikátory v zápisech $(\forall v), (\exists v)$); byl-li výskyt proměnné *různé* od v volný (resp. vázaný) ve formuli φ, je odpovídající výskyt této proměnné volný (resp. vázaný) jak ve formuli $(\forall v)\varphi$, tak i ve formuli $(\exists v)\varphi$.

Formuli budeme nazývat **uzavřenou**, jestliže v ní jsou všechny výskyty všech proměnných vázané; formule se nazývá **otevřená**, pokud se v ní vůbec kvantifikátor nevyskytuje (neboli jsou-li v ní všechny výskyty všech proměnných volné).

Pro formule predikátového počtu budeme používat znaky $\varphi, \psi, \vartheta, \ldots$ Vyznačení proměnných (tj. zápis tvaru $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$) vyjadřuje, že všechny proměnné, které mají volné výskyty ve formuli φ, jsou mezi proměnnými $x_1, \ldots, x_n$ (ale v seznamu mohou být i proměnné, které nemají volné výskyty ve formuli φ, neboť se v ní např. vůbec nevyskytují).

Tato dohoda je výhodná při vytváření složitějších formulí, např. konjunkce $x_1 = x_2 \;\&\; x_2 = x_3$ má volné výskyty proměnných x_1, x_2, x_3, při jejím zkoumání se tedy musíme zabývat všemi třemi proměnnými a je proto vhodné se zabývat těmito proměnnými již při zkoumání složek $x_1 = x_2$ a $x_2 = x_3$, tzn. zapisovat již složky $x_1 = x_2$ a $x_2 = x_3$ ve tvaru $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ a $\psi(x_1, x_2, x_3)$.

Při zápisu základních formulí vznikajících pomocí *běžně* užívaných znaků pro binární predikáty je zvykem psát tyto znaky mezi termy (a nikoli na začátek formule) — jsme všichni zvyklí psát např. $x = y$ (resp. $x \leq y$) a nikoli $=(x, y)$ (resp. $\leq(x, y)$; pro zvýšení čitelnosti však někdy navíc užijeme závorek a píšeme $(x = y), (x \leq y)$).

Pro následující příklady, úlohy 2–8 a cvičení II-2.3–II-2.9 nechť **La** označuje jazyk obsahující proměnné $x, y, z, \ldots$, unární predikát $\mathcal{P}$ a binární predikát $\mathcal{Q}$, konstantu $\mathfrak{c}$, unární funkci $\mathfrak{F}$ a binární funkci $\mathfrak{H}$. Zkoumejme, které zápisy jsou formulemi jazyka **La.**

Ku příkladu řada zápisů

$$\mathcal{P}(x), x = z, \mathfrak{c} = y, \neg\mathfrak{c} = y, (\mathcal{P}(x) \vee x = z),$$
$$(\forall x)(\mathcal{P}(x) \vee x = z), [(\forall x)(\mathcal{P}(x) \vee x = z) \rightarrow \neg\mathfrak{c} = y]$$

ukazuje posloupnost postupně vznikajících formulí jazyka **La,** jejímž posledním členem je zápis $[(\forall x)(\mathcal{P}(x) \vee x = z) \rightarrow \neg\mathfrak{c} = y]$ (v posloupnosti nejprve užijeme třikrát pravidlo popisující vznik základních formulí, a poté pravidla pro vytváření dalších formulí v pořadí: (a), (b), (c) a (b)). Protože posloupnost je vytvořena v souladu s pravidly pro tvorbu formulí, prokazuje konstrukce takovéto posloupnosti, že (závěrečný) zápis $[(\forall x)(\mathcal{P}(x) \vee x = y) \rightarrow \neg x = y]$ je formulí jazyka **La.** Nicméně takovýchto posloupností je možno sestrojit více, stejnou službu nám prokáže např. posloupnost

$$x = z, \mathcal{P}(x), (\mathcal{P}(x) \vee x = z), (\forall x)(\mathcal{P}(x) \vee x = z), \mathfrak{c} = \mathfrak{c}, \mathfrak{c} = y, \neg\mathfrak{c} = y,$$
$$(\exists y)(\mathfrak{c} = y), [(\exists y)(\mathfrak{c} = y) \;\&\; x = z], [(\forall x)(\mathcal{P}(x) \vee x = z) \rightarrow \neg\mathfrak{c} = y],$$

která má jiné pořadí formulí a tři formule nadbytečné. Naproti tomu posloupnost

$$\mathcal{P}(x), x = z, (\forall x)(\mathcal{P}(x) \vee x = z), \neg\mathfrak{c} = y,$$
$$(\exists y)(\mathfrak{c} = y), [(\exists y)(\mathfrak{c} = y) \;\&\; x = z], [(\forall x)(\mathcal{P}(x) \vee x = z) \rightarrow \neg\mathfrak{c} = y],$$

není vhodnou posloupností k prokázání, že zápis $[(\forall x)(\mathcal{P}(x) \vee x = y) \rightarrow \neg x = y]$ je formulí, protože není posloupností sestrojenou podle pravidel pro konstrukce formulí predikátového počtu (a fakt, že končí potřebným způsobem, tj. formulí $[(\forall x)(\mathcal{P}(x) \vee x = y) \rightarrow \neg x = y]$, již nemůže nerespektování potřebných pravidel napravit).

Ve formuli $\mathcal{P}(x) \vee x = z$ jsou všechny výskyty všech proměnných volné, tj. formule je otevřená; ve formuli $[(\forall x)(\mathcal{P}(x) \vee x = z) \to \neg\, \mathfrak{c} = y]$ jsou již všechny výskyty proměnné x vázané, výskyty proměnných y a z zůstávají volné, formule není ani otevřená ani uzavřená. Ve formuli $(\forall y)(\exists z)[(\forall x)(\mathcal{P}(x) \vee x = z) \to \neg\, \mathfrak{c} = y]$ jsou všechny výskyty všech proměnných vázané, pročež je formulí uzavřenou a formule $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}$ je formulí současně otevřenou i uzavřenou (proměnné se v ní vůbec nevyskytují).

Poznamenejme, že zápis $(\forall x)\mathcal{P}(z)$ je formulí jazyka **La,** neboť naše pravidla pro vytváření formulí povolují kvantifikovat také proměnnou, která se ve formuli nevyskytuje (i když — jak později nahlédneme — takováto kvantifikace nemá vliv na význam formule). Výskyt proměnné x je vázaný a výskyt proměnné z je volný (kvantifikátor je aplikován na proměnnou x a nikoli na z!)

Naproti tomu např. zápis $\mathcal{P}(x, x)$ nemůže být formulí jazyka **La** obsahujícího *unární* predikát $\mathcal{P}$; zápis $\mathcal{P}(x = y)$ není formulí jazyka **La,** protože $x = y$ je formulí a nikoli termem jazyka **La** a rovněž zápisy $(\mathcal{P}(x) \,\&\, x = x \vee \mathcal{P}(y))$ a $(\mathcal{P}(x) \to \forall y)(x = y \to \mathcal{P}(x))$ nejsou formulemi jazyka **La,** neboť nejsou správně uzávorkovány (v prvém případě nevíme, zda máme zápis číst $((\mathcal{P}(x) \,\&\, x = x) \vee \mathcal{P}(y))$ nebo $(\mathcal{P}(x) \,\&\, (x = x \vee \mathcal{P}(y)))$ a ve druhém případě chybí levá závorka před znaky $\forall y$), po jejím doplnění odpovídají jedné pravé závorce na konci zápisu dvě levé závorky).

Úloha 2. Ukažte, že oba zápisy $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(\mathcal{Q}(x, y) \,\&\, \mathcal{Q}(y, z)) \to \mathcal{Q}(x, z)]$ a $(\forall x)(\mathcal{Q}(x, \mathfrak{c}) \vee \mathcal{Q}(\mathfrak{c}, x))$ jsou formulemi jazyka **La.** Pro druhý zápis nalezněte alespoň dvě různé posloupnosti prokazující, že se jedná o formuli jazyka **La.** Které výskyty proměnných jsou volné a které jsou vázané? Jaký je význam zkoumaných formulí?

[u2)] Posloupnost zápisů

$$\mathcal{Q}(x, y), \mathcal{Q}(y, z), \mathcal{Q}(x, z), (\mathcal{Q}(x, y) \,\&\, \mathcal{Q}(y, z)), [(\mathcal{Q}(x, y) \,\&\, \mathcal{Q}(y, z)) \to \mathcal{Q}(x, z)],$$
$$(\forall z)[(\mathcal{Q}(x, y) \,\&\, \mathcal{Q}(y, z)) \to \mathcal{Q}(x, z)], (\forall y)(\forall z)[(\mathcal{Q}(x, y) \,\&\, \mathcal{Q}(y, z)) \to \mathcal{Q}(x, z)],$$
$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(\mathcal{Q}(x, y) \,\&\, \mathcal{Q}(y, z)) \to \mathcal{Q}(x, z)]$$

prokazuje, že první zápis je formulí jazyka **La.** Fakt, že i druhý zápis je formulí dokládá jak posloupnost formulí

$$\mathcal{Q}(x, \mathfrak{c}), \mathcal{Q}(\mathfrak{c}, x), (\mathcal{Q}(x, \mathfrak{c}) \vee \mathcal{Q}(\mathfrak{c}, x)), (\forall x)(\mathcal{Q}(x, \mathfrak{c}) \vee \mathcal{Q}(\mathfrak{c}, x)),$$

tak také např. posloupnost formulí

$$\mathcal{Q}(\mathfrak{c}, x), \mathcal{Q}(x, \mathfrak{c}), \mathcal{Q}(x, x), \mathcal{Q}(\mathfrak{c}, \mathfrak{c}), (\mathcal{Q}(x, \mathfrak{c}) \vee \mathcal{Q}(\mathfrak{c}, x)), (\forall x)(\mathcal{Q}(x, \mathfrak{c}) \vee \mathcal{Q}(\mathfrak{c}, x)),$$

ve které je částečně změněno pořadí zápisů a ve které jsou dokonce některé formule navíc. Výskyty všech proměnných v obou formulích jsou vázané, formule jsou tedy uzavřené. První formule vyjadřuje tranzitivitu predikátu $\mathcal{Q}$ a druhá formule zajišťuje, že každý objekt je ve vztahu $\mathcal{Q}$ ke konstantě $\mathfrak{c}$, avšak může být v tomto vztahu jak prvním členem, tak i členem druhým.

Úloha 3. Prokažte, že zápisy $(\mathcal{Q}(x)\ \&\ x = y)$, $\mathcal{Q}(x, \mathcal{Q}(x, x))$ a $(\forall\mathfrak{c})\mathcal{Q}(x, \mathfrak{c})$ nejsou formulemi jazyka **La.**

Úloha 4. Rozhodněte, zda zápisy $(\forall x)(\exists y)\mathcal{Q}(\mathfrak{c}, x)$, $(\exists y)(\ \&\ \mathcal{Q}(\mathfrak{c}, x))$, $(\forall x)(\exists y)(\neg\mathcal{R}(x) \to x = y)$ a $(\mathcal{Q}(\mathfrak{c}, \mathfrak{c}) \to (\exists x)\mathcal{Q}(x, x))$ jsou formulemi jazyka **La.**

Pokud v jazyce připustíme funkce, definujeme pojem termu rekurzí vycházejíce z proměnných a konstant a v obecném případě postupujíce ke stále složitějším a složitějším termům.

Termem jazyka L je jakýkoli zápis, který dokážeme sestrojit rekurzí s následujícími parametry (pro termy budeme používat symboly $t, s, \ldots$):

Stavební kameny: znaky pro proměnné a konstanty jazyka **L**, znaky pro funkce téhož jazyka a závorky (jakožto pomocné symboly);

Základní termy: znaky pro proměnné a konstanty jazyka **L**;

Pravidlo pro vytváření dalších termů: označuje-li $\mathfrak{F}$ jakoukoli n-ární funkci jazyka **L** a jsou-li $t_1, \ldots, t_n$ termy téhož jazyka, je zápis $\mathfrak{F}(t_1, \ldots, t_n)$ termem téhož jazyka.

Úloha 5. Ukažte, že zápisy $\mathfrak{H}(x, \mathfrak{F}(\mathfrak{c}))$, $\mathfrak{H}[\mathfrak{F}(\mathfrak{c}), \mathfrak{F}(\mathfrak{H}(\mathfrak{c}, \mathfrak{c}))]$ a $\mathfrak{F}\big(\mathfrak{F}[\mathfrak{H}(x, \mathfrak{H}(\mathfrak{c}, x))]\big)$ jsou termy jazyka **La.** Pro druhý zápis nalezněte alespoň dvě různé posloupnosti prokazující, že zápis je termem jazyka **La.**

Úloha 6. Prokažte, že zápisy $\mathfrak{H}(x)$, $\mathfrak{F}(x, \mathfrak{c})$ a $\mathfrak{H}(\mathfrak{c}, \mathfrak{F}(x)$ nejsou termy jazyka **La.**

---

u3) Protože $\mathcal{Q}$ je *binární* predikát, není $\mathcal{Q}(x)$ základní formulí jazyka **La;** zápis $\mathcal{Q}(x, \mathcal{Q}(x, x))$ není formulí, neboť do binárního predikátu $\mathcal{Q}$ jsme „dosadili“ formuli $\mathcal{Q}(x, x)$, jež není termem; za kvantifikátorem má následovat proměnná a nikoli konstanta, pročež ani třetí zápis není formulí jazyka **La.**

u4) Posloupnost formulí $\mathcal{Q}(\mathfrak{c}, x), (\exists y)\mathcal{Q}(\mathfrak{c}, x), (\forall x)(\exists y)\mathcal{Q}(\mathfrak{c}, x)$ ukazuje, že první zápis je formulí, totéž činí pro poslední zápis posloupnost formulí $\mathcal{Q}(\mathfrak{c}, \mathfrak{c}), \mathcal{Q}(x, x), (\exists x)\mathcal{Q}(x, x)$, $(\mathcal{Q}(\mathfrak{c}, \mathfrak{c}) \to (\exists x)\mathcal{Q}(x, x))$; obě formule jsou uzavřené. Druhé dva zápisy nejsou formulemi jazyka **La:** u prvního z nich si stačí uvědomit, že zápis $\&\ \mathcal{Q}(\mathfrak{c}, x)$ není formulí predikátového počtu, druhý zápis je sice formulí predikátového počtu, nikoli však jazyka **La,** protože predikát $\mathcal{R}$ není predikátem tohoto jazyka.

u5) Čtyřčlenná posloupnost termů $x, \mathfrak{c}, \mathfrak{F}(\mathfrak{c}), \mathfrak{H}(x, \mathfrak{F}(\mathfrak{c}))$ dokumentuje, že první zápis je termem jazyka **La;** tutéž službu vykoná pro poslední zápis posloupnost termů $x, \mathfrak{c}, \mathfrak{H}(\mathfrak{c}, x)$, $\mathfrak{H}(x, \mathfrak{H}(\mathfrak{c}, x)), \mathfrak{F}[\mathfrak{H}(x, \mathfrak{H}(\mathfrak{c}, x))], \mathfrak{F}\big(\mathfrak{F}[\mathfrak{H}(x, \mathfrak{H}(\mathfrak{c}, x))]\big)$. Fakt, že druhý zápis je termem jazyka **La** dokumentuje jak posloupnost termů $\mathfrak{c}, \mathfrak{H}(\mathfrak{c}, \mathfrak{c}), \mathfrak{F}(\mathfrak{H}(\mathfrak{c}, \mathfrak{c})), \mathfrak{F}(\mathfrak{c})$, $\mathfrak{H}[\mathfrak{F}(\mathfrak{c}), \mathfrak{F}(\mathfrak{H}(\mathfrak{c}, \mathfrak{c}))]$, tak také posloupnost termů $\mathfrak{c}, \mathfrak{F}(\mathfrak{c}), \mathfrak{H}(\mathfrak{c}, \mathfrak{c}), \mathfrak{F}(\mathfrak{H}(\mathfrak{c}, \mathfrak{c})), \mathfrak{H}[\mathfrak{F}(\mathfrak{c}), \mathfrak{F}(\mathfrak{H}(\mathfrak{c}, \mathfrak{c}))]$, ve které jsou sice tytéž termy, avšak v jiném pořadí.

u6) Funkce $\mathfrak{H}$ je binární a funkce $\mathfrak{F}$ je unární, takže v prvních dvou zápisech není „dosazen“ potřebný počet termů. Poslední zápis nemá potřebný počet pravých závorek; to je poněkud hnidopišská námitka, ve většině matematických textů — téměř jistě včetně tohoto textu — je mnoho takovýchto ne zcela správných zápisů a čtenář si je určitě schopen potřebnou opravu navrhnout sám; nicméně zcela důsledně vzato uvedený zápis termem není.

Úloha 7. Rozhodněte, zda zápisy $\mathfrak{H}(\mathfrak{H}(x,y),\mathfrak{H}(z,\mathfrak{c}))$, $\mathfrak{F}(\mathfrak{F}(x),\mathfrak{F}(y))$ a $\mathfrak{F}[\mathfrak{H}(\mathfrak{F}(x),\mathfrak{H}(\mathfrak{c},y))]$ jsou termy jazyka **La.**

Úloha 8. Určete, které ze zápisů

$$\mathcal{Q}(\mathcal{P}(x),\mathfrak{H}(\mathfrak{F}(x),\mathfrak{c})),\ \mathcal{Q}(\mathfrak{F}(x),\mathfrak{H}(\mathfrak{F}(x,\mathfrak{c}))),\ (\exists y)\mathcal{Q}(\mathfrak{F}(x),\mathfrak{H}(\mathfrak{F}(x),\mathfrak{c})),$$
$$(\forall x)\big([(\exists y)\mathcal{Q}(x,y)\ \&\ \mathcal{P}(\mathfrak{F}(x))] \to \neg\mathcal{Q}(x,x)\big) \text{ a } (\forall x)[\mathcal{Q}(x,x)\ \&\ \mathfrak{H}(\mathfrak{F}(x),\mathfrak{c})]$$

jsou formulemi jazyka **La.** Pro formule určete navíc, které výskyty proměnných jsou volné a které nikoli.

Úloha 9. Určete, které ze zápisů $x\cdot(x+y)$, $x-z, (x+y)\cdot[(y\cdot z)+(x\cdot x)]$, $x = z$ jsou termy aritmetiky přirozených čísel (jazyk aritmetiky jsme upřesnili o něco výše).

Úloha 10. Rozhodněte, zda jsou formulemi aritmetiky zápisy $\mathcal{P}(x)$, $\mathfrak{S}(\mathit{0}) = \mathit{1}$, $x = +y$, $x\cdot(y+z) = (x\cdot y)+(x\cdot z)$ a $(\exists z)(z+x = y)$. Uměli byste dát posledním dvěma zápisům intuitivní význam? Jsou výskyty proměnných v zápisech, které jsou formulemi aritmetiky, volné nebo vázané?

Úloha 11. Jaký je význam aritmetické formule $\mathfrak{S}(x) = x+x$? Napište v symbolech „x je odmocninou přirozeného čísla“, „každé číslo je liché“ a „x je společným násobkem čísel y a z“. Přiřaďte k čtyřem aritmetickým formulím z této úlohy ještě formuli $\mathit{0}+\mathit{0}=\mathit{0}$ a zkoumejte, která z těchto pěti formulí je otevřená

---

u7) Termem jazyka **La** jsou první a poslední zápis; v druhém zápise jsou do unární funkce „dosazeny“ dva termy.

u8) Třetí a čtvrtý zápis jsou formulemi jazyka **La.** První zápis není formulí, protože do binárního predikátu $\mathcal{Q}$ je „dosazena“ formule $\mathcal{P}(x)$, která není termem; ve druhém zápise není respektováno, že $\mathfrak{H}$ je binární funkcí a nadto v jednom případě se nezachází s funkcí $\mathfrak{F}$ jakožto funkcí unární; v posledním zápise není term „dosazen“ do žádného predikátu. V třetím zápise je výskyt proměnné y vázaný, výskyty proměnné x jsou volné, ve čtvrtém zápise jsou všechny výskyty obou proměnných vázané, pročež tato formule je uzavřená.

u9) První a třetí zápis jsou termy aritmetiky, poslední zápis je formulí aritmetiky a nikoli jejím termem; druhý zápis není termem aritmetiky, protože rozdíl není funkcí aritmetiky (a dokonce rozdíl není ani možno definovat v oboru přirozených čísel pro každou (uspořádanou) dvojici přirozených čísel, pokud od definované funkce požadujeme běžné vlastnosti rozdílu, zejména $z + (x - z) = x$).

u10) Formulemi aritmetiky jsou pouze dva poslední zápisy; první z nich je zákon distributivity a druhý se používá pro vyjádření vztahu, že x je menší nebo rovno y, protože z je vždy číslo nezáporné (připouštíme $z = \mathit{0}$). První zápis je formulí predikátového počtu, nikoli však aritmetiky, protože unární predikát $\mathcal{P}$ jsme nedali do jazyka aritmetiky; analogicky konstantu $\mathit{1}$ jsme nezahrnuli mezi konstanty aritmetiky při upřesňování jejího jazyka — uvedený vztah by mohl sloužit (v souladu vysvětlením intuitivního významu formule $x = \mathfrak{S}(\mathit{0})$ podaným výše) za *definici* nové konstanty, problematice definic se budeme věnovat níže; třetí zápis není formulí jazyka aritmetiky, protože $+y$ není termem aritmetiky s výše upřesněným jazykem.
V první formuli jsou všechny výskyty všech proměnných volné (formule je otevřená), ve druhé formuli jsou oba výskyty proměnné z vázané, výskyty proměnných x a y jsou volné.

a která je uzavřená.

Analogicky jako ve výrokovém počtu je zvykem vynechávat závorky, pokud takovéto zjednodušení neohrozí čitelnost formulí a termů. Kromě vynechávání závorek obvyklého ve výrokovém počtu (např. u vícečetných konjunkcí a disjunkcí a závorek obklopujících celou formuli) se v predikátovém počtu činí speciální dohody — např. místo dvou po sobě jdoucích univerzálních kvantifikátorů $(\forall x)(\forall y)$ píšeme prostě $(\forall x, y)$ a místo dvou po sobě jdoucích existenčních kvantifikátorů $(\exists x)(\exists y)$ píšeme prostě $(\exists x, y)$; analogicky pro větší počet kvantifikátorů *za předpokladu, že kvantifikátory jsou stejného druhu.* Místo zápisu $\neg x = y$ se používá obvykle zápis $x \neq y$. Běžně užívané binární funkce je opět zvykem psát mezi argumenty; píšeme např. $(x + y)$ nebo $(x \cdot y)$ místo $+(x, y)$ nebo $\cdot(x, y)$, jak jsme ostatně činili až dosud bez výslovného zdůraznění. V aritmetice je nadto dohodnuto, že „násobení má přednost před sčítáním" a je proto zvykem zjednodušovat aritmetický term $((x \cdot y) + z)$ na zápis $(x \cdot y + z)$ a většinou se docela — podobně jako při zápisu formulí — vynechávají i závorky, které obklopují celý term a píše se prostě $x \cdot y + z$, či dokonce ještě jednodušeji $xy + z$. Navíc v aritmetice vynecháváme závorky při vícenásobném sčítání a při vícenásobném násobení.

*

V jednoduchých případech se zcela jistě shodneme na tom, co znamená nahradit proměnnou nějakou jinou proměnnou nebo konstantou, obecně nahradit ji termem. Uvažujeme-li např. aritmetickou formuli $x = y \;\&\; \neg[x + y = \mathit{0}]$, pak nahrazením proměnné x proměnnou z dostaneme $z = y \;\&\; \neg[z + y = \mathit{0}]$, nahrazením konstantou $\mathit{0}$ získáme $\mathit{0} = y \;\&\; \neg[\mathit{0} + y = \mathit{0}]$ a nahrazením termem $x + z$ obdržíme $x + z = y \;\&\; \neg[(x + z) + y = \mathit{0}]$.

Pro upřesnění pojmu **nahrazení** (užívá se také slovo *substituce*) proměnné termem uveďme, že nahrazujeme jen *volné* výskyty proměnné (význam vázaných výskytů proměnných je již určen kvantifikací). Například z formule $(\forall x)(\exists y)(x + y = z) \;\&\; x \neq z$ obdržíme nahrazením proměnné z termem $z + y$ formuli $(\forall x)(\exists y)[x + y = z + y] \;\&\; x \neq z + y$, nahrazením proměnné y jakýmkoli termem dostaneme opět formuli $(\forall x)(\exists y)(x + y = z) \;\&\; x \neq z$ (uvědomte si, že proměnná y *nemá* volný výskyt už ve formuli $(\exists y)(x + y = z) \;\&\; x \neq z$) a nahrazením proměnné x termem $z + y$ získáme formuli $(\forall x)(\exists y)(x + y = z) \;\&\; z + y \neq z$.

[u11)] Formule $\mathfrak{S}(x) = x + x$ značí, že „následovník čísla x je jeho dvojnásobkem", čemuž podle naší intuice vyhovuje jediné číslo 1. Vlastnost „x je odmocninou přirozeného čísla" zapíšeme v symbolech např. formulí $(\exists y)(y = x \cdot x)$, výrok „každé číslo je liché" vyjádříme např. formulí $(\forall x)(\exists y)(x = \mathfrak{S}(y + y))$, nebo také formulí $(\forall x, y)(\neg x = y + y)$ a vztah „x je společným násobkem čísel y a z" zachytíme např. formulí $(\exists x_1)(x = x_1 \cdot y) \;\&\; (\exists x_2)(x = x_2 \cdot z)$. Formule $\mathfrak{S}(x) = x + x$ je otevřená, formule $(\exists y)(y = x \cdot x)$ není ani otevřená ani uzavřená (výskyty proměnné x jsou volné a oba výskyty proměnné y jsou vázané), formule $(\forall x)(\exists y)(\neg x = y + y)$ je uzavřená, ve formuli $(\exists x_1)(x = x_1 \cdot y) \;\&\; (\exists x_2)(x = x_2 \cdot z)$ jsou proměnné x, y a z volné, proměnné x_1, x_2 jsou vázané a formule $\mathit{0} = \mathit{0} + \mathit{0}$ je jak otevřená, tak i uzavřená.

Zaznamenejme, že nahrazením se vůbec nikdy nemůže *zmenšit* systém vázaných výskytů proměnných, protože nahrazujeme pouze *volné* proměnné.

V předposledním odstavci vypovídají nově utvořené formule postupně o proměnné z, konstantě $\mathit{0}$ a termu $x + z$ přesně to, co vypovídala původní formule $x = y \mathbin{\&} \neg x + y = \mathit{0}$ o proměnné x. Bohužel ve speciálních případech nahrazením proměnné může původní formule zásadně změnit svůj význam, jak si předvedeme v následujícím petitem psaném odstavci. V témže odstavci současně také uvidíme, že důvod zásadní změny významu formule je zvětšení systému vázaných výskytů proměnných způsobené nahrazením. V následujícím oddíle již začneme formulovat vyvozovací principy predikátového počtu. Je celkem přirozené, že nebudeme axiomem vynucovat vztah formule s formulí, která z ní sice nahrazením vznikla, avšak současně nahrazením zásadně změnila význam. Proto v axiomu specifikace bude vznesen požadavek, aby se nahrazením proměnné termem nezměnil systém vázaných výskytů proměnných (což je podle poslední věty v posledním odstavci totéž jako požadavek, aby se tento systém nezvětšil). Po takovémto nahrazení může sice nová formule vypovídat o jiných termech (a ve většině případů tak skutečně činí), avšak náš požadavek zaručuje, že se nahrazením nezmění význam formule zásadně.

Uvažme například aritmetickou formuli $(\exists y)(\exists z)(z + x = y \mathbin{\&} \neg z = \mathit{0})$. Je zcela zřejmé, že tato formule je pravdivá pro každé přirozené číslo x, protože tvrdí pouze, že k číslu x existuje číslo větší y (uvažte, že z je kladné). Nahradíme-li však proměnnou x proměnnou y, dostaneme formuli $(\exists y)(\exists z)(z + y = y \mathbin{\&} \neg z = \mathit{0})$, která vyjadřuje, že existuje přirozené číslo, které je *větší než ono samo*. Takové přirozené číslo však neexistuje, naše formule změnila význam zásadně, a nadto z formule pravdivé pro každé x se změnila na formuli nepravdivou. Intuitivně můžeme zásadní změnu významu vysvětlit faktem, že původně na proměnnou x nebyl aplikován žádný kvantifikátor (všechny výskyty proměnné x byly volné), tuto proměnnou jsme však nahradili proměnnou y, na kterou je kvantifikátor aplikován; *volné* výskyty proměnné x se změnily na *vázané* výskyty proměnné y — systém vázaných výskytů proměnných se zvětšil.

Úloha 12. Nahraďte ve formulích

$$\mathcal{P}(z) \to \mathcal{Q}(\mathfrak{c}, z),\ (\forall x)(\mathcal{Q}(x, \mathfrak{c}) \vee \mathcal{Q}(\mathfrak{c}, x)), (\exists y)\mathcal{Q}(\mathfrak{F}(x), \mathfrak{H}(x, \mathfrak{F}(y))),$$
$$\mathcal{Q}(\mathfrak{c}, y) \to (\forall x)(\mathcal{Q}(x, y) \mathbin{\&} \mathcal{P}(z)), (\forall y)[(\exists z)\mathcal{Q}(\mathfrak{F}(x), z) \mathbin{\&} \mathcal{P}(\mathfrak{F}(y))] \to \neg\mathcal{Q}(y, x)$$

výše zavedeného jazyka **La** postupně proměnnou

(a) x proměnnou x,
(b) x konstantou $\mathfrak{c}$,
(c) x proměnnou y,
(d) x proměnnou z,
(e) x termem $\mathfrak{F}(x)$,
(f) x termem $\mathfrak{H}(x, y)$,
(g) y termem $\mathfrak{F}(x)$,
(h) y termem $\mathfrak{H}(x, y)$.

Při kterých nahrazeních termu za proměnnou a v kterých formulích vzroste počet vázaných výskytů?

[u12)] Nejprve si uvědomte, že v první formuli se nevyskytuje ani proměnná x ani proměnná y a že ve druhé formuli není žádná proměnná volná, pročež žádným nahrazením proměnných x, y se tyto formule nezmění a ani se nezvětší systém vázaných výskytů proměnných; v dalším budeme proto uvádět jen formule vzniklé příslušným nahrazením do ostatních

Formuli vznikající z formule φ nahrazením proměnné x termem $\boldsymbol{t}$ budeme značit $\varphi(x/\boldsymbol{t})$.

* * *

V predikátovém počtu se budeme opět zabývat dokazatelností jakožto hlavním pojmem syntaxe a pravdivostí jakožto hlavním pojmem sémantiky. Pojem důkazu je naprosto analogický důkazu ve výrokovém počtu (jen odvozovacích principů je o něco více), jeví se proto vhodnější začít s ním, jakožto pojmem jednodušším pro ty, kteří pochopili pojem důkazu ve výrokovém počtu.

Výrokový počet jsme charakterizovali jako tu část logiky, která se zabývá zkoumáním vztahů formulí vzniklých pomocí logických spojek $(\neg, \rightarrow, \&, \vee, \equiv)$ k formulím, ze kterých vznikly. Je tedy pochopitelné, že nyní chceme beze změny a beze zbytku převzít výsledky první kapitoly do predikátového počtu (s jedinou výhradou, že výsledky budou aplikovány na formule predikátového počtu místo na formule výrokového počtu). Dokazatelnými formulemi by proto měly být všechny formule, které vzniknou z formulí dokazatelných ve výrokovém počtu nahrazením výrokových proměnných formulemi predikátového počtu. Myšlenka je natolik jednoduchá, že ji snad stačí ukazovat na jediném příkladu: ve výrokovém počtu jsme např. dokázali formuli *výrokového počtu* $\mathrm{p} \vee \neg \mathrm{p}$ (tertium non datur). V predikátovém počtu by tedy měla být dokazatelná formule *predikátového počtu* $\varphi \vee \neg\varphi$

formulí. Nadto nebudeme ani vypisovat formule vzniklé nahrazením (a), protože nahrazením proměnné touž proměnnou se formule nezmění, pročež se nemůže ani zvětšit systém vázaných výskytů. V jednotlivých sloupcích níže uvedeného seznamu se proto nacházejí jen formule, které získáme postupně nahrazeními (b)–(h) ze zbývajících tří zadaných formulí.

(b) $(\exists y)\mathcal{Q}(\mathfrak{F}(\mathfrak{c}), \mathfrak{H}(\mathfrak{c}, \mathfrak{F}(y)))$,
(c) $(\exists y)\mathcal{Q}(\mathfrak{F}(y), \mathfrak{H}(y, \mathfrak{F}(y)))$,
(d) $(\exists y)\mathcal{Q}(\mathfrak{F}(z), \mathfrak{H}(z, \mathfrak{F}(y)))$,
(e) $(\exists y)\mathcal{Q}(\mathfrak{F}(\mathfrak{F}(x)), \mathfrak{H}(\mathfrak{F}(x), \mathfrak{F}(y)))$,
(f) $(\exists y)\mathcal{Q}(\mathfrak{F}(\mathfrak{H}(x,y)), \mathfrak{H}(\mathfrak{H}(x,y), \mathfrak{F}(y)))$,
(g)–(h) $(\exists y)\mathcal{Q}(\mathfrak{F}(x), \mathfrak{H}(x, \mathfrak{F}(y)))$ (proměnná y nemá volný výskyt),

(b)–(f) $\mathcal{Q}(\mathfrak{c}, y) \rightarrow (\forall x)(\mathcal{Q}(x, y) \ \& \ \mathcal{P}(z))$,
(proměnná x nemá volný výskyt),
(g) $\mathcal{Q}(\mathfrak{c}, \mathfrak{F}(x)) \rightarrow (\forall x)(\mathcal{Q}(x, \mathfrak{F}(x)) \ \& \ \mathcal{P}(z))$,
(h) $\mathcal{Q}(\mathfrak{c}, \mathfrak{H}(x,y)) \rightarrow (\forall x)(\mathcal{Q}(x, \mathfrak{H}(x,y)) \ \& \ \mathcal{P}(z))$,

(b) $(\forall y)[(\exists z)\mathcal{Q}(\mathfrak{F}(\mathfrak{c}), z) \ \& \ \mathcal{P}(\mathfrak{F}(y))] \rightarrow \neg\mathcal{Q}(y, \mathfrak{c})$,
(c) $(\forall y)[(\exists z)\mathcal{Q}(\mathfrak{F}(y), z) \ \& \ \mathcal{P}(\mathfrak{F}(y))] \rightarrow \neg\mathcal{Q}(y, y)$,
(d) $(\forall y)[(\exists z)\mathcal{Q}(\mathfrak{F}(z), z) \ \& \ \mathcal{P}(\mathfrak{F}(y))] \rightarrow \neg\mathcal{Q}(y, z)$,
(e) $(\forall y)[(\exists z)\mathcal{Q}(\mathfrak{F}(\mathfrak{F}(x)), z) \ \& \ \mathcal{P}(\mathfrak{F}(y))] \rightarrow \neg\mathcal{Q}(y, \mathfrak{F}(x))$,
(f) $(\forall y)[(\exists z)\mathcal{Q}(\mathfrak{F}(\mathfrak{H}(x,y)), z) \ \& \ \mathcal{P}(\mathfrak{F}(y))] \rightarrow \neg\mathcal{Q}(y, \mathfrak{H}(x,y))$,
(g) $(\forall y)[(\exists z)\mathcal{Q}(\mathfrak{F}(x), z) \ \& \ \mathcal{P}(\mathfrak{F}(y))] \rightarrow \neg\mathcal{Q}(\mathfrak{F}(x), x)$ (první dva výskyty proměnné y jsou vázané, teprve třetí výskyt je volný),
(h) $(\forall y)[(\exists z)\mathcal{Q}(\mathfrak{F}(x), z) \ \& \ \mathcal{P}(\mathfrak{F}(y))] \rightarrow \neg\mathcal{Q}(\mathfrak{H}(x,y), x)$,

Při nahrazení proměnných v třetí formuli se zvětší systém vázaných výskytů pouze při nahrazení proměnné x proměnnou y a termem $\mathfrak{H}(x,y)$. V případě čtvrté formule se zvětší systém vázaných výskytů při nahrazení proměnné y termy $\mathfrak{F}(x)$ a $\mathfrak{H}(x,y)$, ve všech jiných zkoumaných případech zůstane systém vázaných výskytů zachován. Při nahrazování proměnné x proměnnými y a z a termem $\mathfrak{H}(x,y)$ v poslední formuli se zvětší systém vázaných výskytů, ve všech ostatních uvažovaných nahrazeních se systém vázaných výskytů nezmění.

pro jakoukoli formuli φ predikátového počtu. Nejjednodušší způsob, jak učinit nějaké formule dokazatelnými, je přijmout je jako axiomy. Jednou z cest, jak začít popisovat axiomy predikátového počtu, je tudíž vzít za axiomy všechny formule vzniklé z formulí dokazatelných ve výrokovém počtu (tj. z tautologií) nahrazením výrokových proměnných formulemi predikátového počtu.

Abychom skutečně přejali všechny výsledky a ideje výrokového počtu, je obzvláště důležité[11)] převzít také odvozovací pravidlo výrokového počtu, tzn. pravidlo modus ponens (opět s výhradou, že v predikátovém počtu bude pravidlo aplikováno na formule tohoto počtu místo na formule počtu výrokového).

Jako odvozovací pravidlo predikátového počtu přijmeme tedy princip **modus ponens** dovolující z formulí φ a $\varphi \to \psi$ predikátového počtu vyvodit formuli ψ.

Popsanou cestou velice rychle do predikátového počtu transformujeme výsledky výrokového počtu, avšak zcela rezignujeme na snahu předvést co nejpřehledněji východiska a minimalizovat je. Pozorného čtenáře první kapitoly jistě nepřekvapí sdělení, že můžeme také přijmout za axiomy pouze formule odpovídající třem tvarům axiomů **VP1–VP3** uvažovaným ve výrokovém počtu a z nich již *dokázat* všechny formule, které vzniknou z formulí dokazatelných ve výrokovém počtu nahrazením výrokových proměnných formulemi predikátového počtu (tzn. všechny formule přijaté výše jako axiomy predikátového počtu můžeme dokázat z pouhých tří tvarů axiomů).

Abychom předešli všem možným nedorozuměním, uveďme výslovně, co rozumíme třemi tvary axiomů predikátového počtu, které „odpovídají třem tvarům axiomům uvažovaným ve výrokovém počtu“ i když je téměř jisté, že je to čtenáři jasné:

PP1 $\qquad \varphi \to (\psi \to \varphi),$

PP2 $\qquad [\varphi \to (\psi \to \vartheta)] \to [(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \vartheta)],$

PP3 $\qquad (\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi).$

Přejděme nyní k vyvozovacím principům charakteristickým pro predikátový počet. Jako velice specifický prostředek predikátového počtu jsme představili kvantifikaci a je proto přirozené, že nejpodstatnější vyvozovací principy predikátového počtu se týkají kvantifikace.

První dva vyvozovací principy predikátového počtu přímo souvisí s chápáním slovního spojení „pro každý objekt“. Dříve než vyslovíme tyto principy[12)] obecněji, předveďme si obě ideje na konkrétním příkladu v naší škole — nechť formule φ znamená např. „Student má vlasy.“. Jestliže si každého konkrétního studenta školy prohlédneme a o každém zjistíme, že má vlasy, můžeme vyvodit

[11)] Pomocí modus ponens jsme ve výrokovém počtu dokázali mnohé formule vycházevše z axiomů tohoto počtu, avšak v predikátovém počtu budeme mít další axiomy, z nichž rovněž chceme vyvozovat. Musíme mít proto možnost znovu *a v nových souvislostech* vyvozovat pomocí modus ponens v predikátovém počtu.

[12)] Až budeme později v tomto paragrafu pojednávat o sémantice predikátového počtu, nahlédneme, že zcela analogické ideje stojí za definicí pravdivosti formule $(\forall x)\varphi$ ve struktuře.

tvrzení „Každý student má vlasy.“ (formálně: vyvodíme formuli $(\forall s)\varphi$). Naopak, jestliže nám někdo (např. lékař) zaručí, že „Každý student má vlasy.“, pak můžeme o každém konkrétním studentu usoudit, že má vlasy, a to dokonce dříve, než se na toho konkrétního studenta podíváme (tento princip byl zmíněn již v ne-předmluvě v bodě (3), jeho přesná formulace bude uvedena jako axiom specifikace).

Obecně můžeme první princip vyslovit ve tvaru: jestliže o každém jednotlivém objektu druhu určeném proměnnou u dokážeme, že má vlastnost φ, dokážeme tímto také formuli $(\forall u)\varphi$. Princip matematizujeme jako *odvozovací pravidlo*[13)] **generalizace,** které dovoluje z formule φ vyvodit formuli $(\forall u)\varphi$ (kde u označuje jakoukoli proměnnou kteréhokoli druhu)[14)].

Druhý princip již můžeme formulovat ve tvaru axiomu. Axiom **specifikace**[15)] je formule tvaru

PP4 $\quad (\forall x)\varphi \rightarrow \varphi(x/\boldsymbol{t})$, kde formule $\varphi(x/\boldsymbol{t})$ vznikne z formule φ nahrazením proměnné x jakýmkoli *termem* $\boldsymbol{t}$*, jehož nahrazení nemění systém vázaných výskytů proměnných.*

Intuitivněji řečeno, formuli tvaru uvedeného v axiomu **PP4** přijímáme jako axiom tehdy a jen tehdy, když se nahrazením nemění zásadně význam formule φ.

Zatím jsme axiom specifikace vyslovili jen pro proměnné univerzálního druhu x, protože toto je ten nejdůležitější a nejjednodušší případ. Nicméně princip je pochopitelně možno aplikovat na libovolný druh proměnných, máme-li navíc zaručeno, že substituovaný term je *tohoto druhu.* Například axiom tvaru „každými dvěma body lze vést právě jednu přímku“ můžeme aplikovat na dva objekty, o nichž máme zaručeno, že jsou body — každými dvěma konkrétními body proložíme právě jednu přímku. Bylo by zcela protismyslné vzít dvě kružnice a tvrdit, že axiom v uvozovkách zaručuje, že těmito kružnicemi je možno proložit právě jednu přímku. Je samozřejmé, že axiom specifikace i pro proměnné jiného než univerzálního druhu přijímáme pouze za předpokladu, že nahrazení nemění zásadně význam formule.

Při zápisu v symbolech jsme však postaveni před otázku, jak zapsat, že ten který term je jakéhosi druhu. Jestliže proměnná v je určitého druhu, pak pro zápis faktu, že term $\boldsymbol{t}$ je tohoto druhu, je možno užít formuli $(\exists v)(v = \boldsymbol{t})$. Při trochu podrobnějším

13) Princip není možné matematizovat jako axiom $\varphi \rightarrow (\forall u)\varphi$, viz rozbor na konci §3 užívající výsledek úlohy 23 našeho paragrafu.

14) Praktické použití má pravidlo generalizace za předpokladu, že formule φ vypovídá o objektu u, tzn. jestliže proměnná u má ve formuli φ volný výskyt. Pravidlo je však formulováno obecně, existence volného výskytu proměnné u ve formuli φ se nevyžaduje. Tato obecnost umožní dokázat, že nemá-li proměnná u volný výskyt ve formuli φ, je dokazatelná ekvivalence $\varphi \equiv (\forall u)\varphi$ v predikátovém počtu, tzn. bez jakýchkoli mimologických axiomů.

15) Někteří autoři používají názvy axiom substituce nebo axiom konkretizace.

rozboru je takový zápis velice přirozený: říkáme, že termu $\boldsymbol{t}$ je roven nějaký objekt druhu v, tedy tvrdíme, že $\boldsymbol{t}$ je druhu v (sobě rovné objekty by měly mít tytéž vlastnosti).

V následujícím axiomu buďtež proměnné u, v téhož druhu (případ, že u a v jsou toutéž proměnnou, se nevylučuje).

PP4′ $[(\forall u)\varphi \ \& \ (\exists v)(v = \boldsymbol{t})] \rightarrow \varphi(u/\boldsymbol{t})$, kde formule $\varphi(u/\boldsymbol{t})$ vznikne z formule φ nahrazením proměnné u jakýmkoli *termem* $\boldsymbol{t}$*, jehož nahrazení nemění systém vázaných výskytů proměnných.*

*

Na první pohled se jeví odvozovací pravidlo generalizace velice slabé. Je ho možno použít jen v případě, že o každém jednotlivém objektu prokážeme, že má zkoumanou vlastnost. Jestliže objektů je konečně mnoho, je snadné si představit, že postupným probíráním objektů dospějeme k cíli (i když realizace by při velmi velkém, byť konečném, počtu nebyla možná). Při nekonečném počtu však *postupným* probíráním objektů si nemůžeme být nikdy jisti, že každý jednotlivý objekt má požadovanou vlastnost (nepřichází v úvahu, že bychom postupné probírání všech objektů někdy ukončili). Avšak prokázat, že každý jednotlivý objekt má požadovanou vlastnost je naštěstí možno i jinak než postupným probíráním jednoho objektu po druhém. Je totiž možné libovolně, avšak pevně, zvolit jeden objekt a o něm prokazovat, že má uvažovanou vlastnost. Tuto možnost snad nejvýrazněji nahlédneme na důkazech v geometrii, jak si ukážeme na návodu důkazu Eukleidovy věty o odvěsně. (Návod na důkaz známější Pythagorovy věty je předváděn velice často, volíme proto jiný příklad; o běžném návodu na důkaz Pythagorovy věty pojednáme až ve cvičení II-2.24. Znalost Eukleidovy větě o odvěsně nám navíc umožní podat kromě běžného návodu na důkaz Pythagorovy věty i návod na ní založený (viz cvičení II-2.25.)

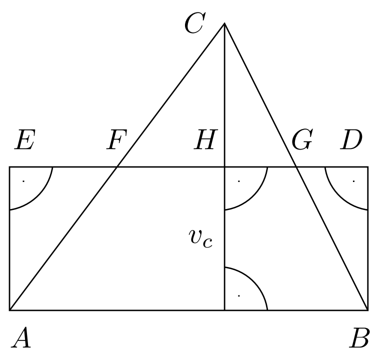

Diagram 1

Předložme nejprve návod na důkaz tvrzení „Plocha každého trojúhelníka je rovna ploše obdélníku, jehož jedna strana je rovna straně trojúhelníka a délka druhé strany je rovna polovině délky výšky trojúhelníka příslušné k této straně.“

Uvažujme *libovolný* trojúhelník $\triangle$ABC s vyznačenou výškou v_c spuštěnou z vrcholu C na stranu AB (viz diagram 1). Sestrojme obdélník o straně AB, délka jehož druhé strany je rovna polovině délky výšky v_c; zbývající vrcholy sestrojeného obdélníku označme D a E. Nakonec označme průsečíky úsečky ED s úsečkami AC a BC a výškou v_c po řadě písmeny F, G a H. Úhly $\sphericalangle$CGH a $\sphericalangle$BGD jsou stejné (jedná se o protilehlé úhly). Oba úhly $\sphericalangle$CHG a $\sphericalangle$BDG jsou pravé, a tedy stejné. Každá z úseček CH a BD má délku rovnou polovině výšky v_c. Uvedená fakta zaručují, že trojúhelníky △CHG a △BDG mají stejnou plochu. Zcela analogicky ukážeme, že stejnou plochu mají i △CHF a △AEF. Abychom prokázali, že plocha trojúhelníku △ABC je rovna ploše obdélníku ABDE, stačí uvážit, že △ABC je složen z lichoběžníku ABGF a trojúhelníků △CHF a △CHG a obdélník ABDE je složen z téhož lichoběžníku ABGF a △AEF a △BDG.

Pro zvolený △ABC jsme ukázali naše tvrzení o ploše trojúhelníku. Nyní chceme aplikovat odvozovací pravidlo generalizace a tím dokončit návod na důkaz, že plocha *každého trojúhelníku* je rovna ploše obdélníku, jehož jedna strana je rovna straně trojúhelníka a délka druhé strany je rovna polovině délky výšky trojúhelníka příslušné k této straně. Jsme oprávněni provést tuto úvahu? — Dobře si rozmyslete, zda jsme splnili vše, co jsme slíbili a na nic nezapomněli. — Už jste se rozhodl, jakou dáte odpověď?

Odpověď je „ne“. Aplikace odvozovacího pravidla bude v pořádku, avšak ještě jsme naše tvrzení nedokázali pro *libovolný trojúhelník* a *libovolnou jeho stranu.* Trojúhelník △ABC jsme nakreslili se všemi úhly ostrými. Obecně však může mít jeden úhel pravý nebo jeden úhel tupý. Jestliže pravý nebo tupý úhel je při vrcholu C, změní se trochu náš nákres (místo nákresu na prvním diagramu budeme mít např. nákres na druhém diagramu), na návodu důkazu však nemusíme měnit ani slůvko. Naproti tomu, jestliže pravý úhel je při vrcholu A, získáme nákres z diagramu 3 a je-li při vrcholu A tupý úhel, dopadne náš nákres tak, jak ukazuje čtvrtý diagram. (Bude-li pravý nebo tupý úhel při vrcholu B, je třeba zvažovat pouze naprosto nevýznamnou modifikaci.)

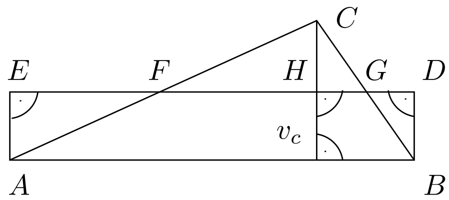

Diagram 2

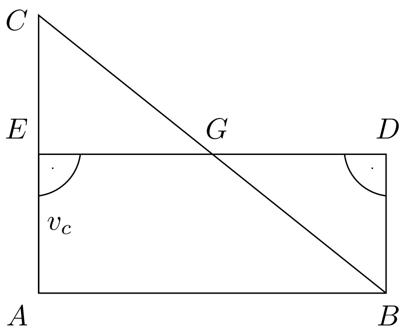

Diagram 3

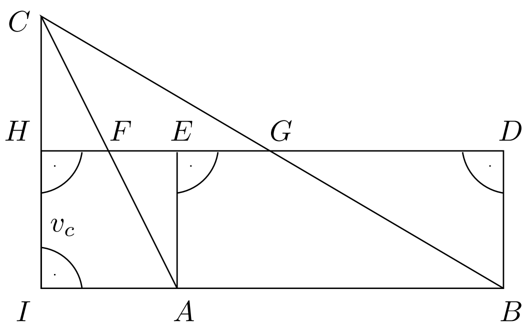

Diagram 4

V diagramu 3 leží bod E (vrchol obdélníku se stranou AB a druhou stranou příslušné délky) na úsečce AC; zopakujme počáteční úvahu z případu popsaného na diagramu 1 a ukažme, že trojúhelníky △CEG a △BDG mají stejnou plochu.

Dále uvažme, že △ABC je složen z (pravoúhlého) lichoběžníku ABGE a △CEG a obdélník ABDE se skládá z téhož lichoběžníku ABGE a trojúhelníku △BDG.

Ve čtvrtém diagramu je opět zakreslen obdélník ABDE, délka jehož strany BD je rovna polovině délky výšky v_c. Průsečík přímky ED s úsečkou AC, úsečkou BC a výškou v_c označme postupně F, G a H; navíc označme písmenem I ještě patu výšky v_c. Trojúhelníky △CHG a △BDG mají stejnou plochu. Obdélník IBDH je sestaven z (pravoúhlého) lichoběžníku IBGH a △BDG, trojúhelník △IBC se skládá z téhož lichoběžníku a △CHG, takže mají stejnou plochu. Nadto rovněž △CHF a △AEF mají stejnou plochu, obdélník IAEH je složen z (pravoúhlého) lichoběžníku IAFH a trojúhelníku △AEF, trojúhelník △IAC se skládá z toho samého lichoběžníku a △CHF, takže mají opět stejnou plochu. Trojúhelník △ABC vznikne vynecháním △IAC z trojúhelníku △IBC, jeho plocha je tedy rovna rozdílu ploch uvedených trojúhelníků, tedy rozdílu ploch obdélníku IBDH a obdélníku IAEH. Rozdíl ploch těchto obdélníků je však roven ploše obdélníku ABDE.

Teď už máme skutečně prokázané tvrzení „Plocha trojúhelníka △ABC je rovna ploše obdélníku, jehož jedna strana je rovna straně trojúhelníka a délka druhé strany je rovna polovině délky výšky trojúhelníka příslušné k této straně.“ pro *jakýkoli* △ABC a *jakoukoli jeho stranu*, pročež můžeme použít generalizaci a získat tvrzení „Plocha *každého* trojúhelníka je rovna ploše obdélníku, jehož jedna strana je rovna straně trojúhelníka a délka druhé strany je rovna polovině délky výšky trojúhelníka příslušné k této straně.“

Předveďme nyní návod důkazu Eukleidovy věty o odvěsně, která zní: „Plocha čtverce nad odvěsnou *pravoúhlého* trojúhelníku je rovna ploše obdélníku, jehož jednou stranou je úsek přepony přilehlý uvažované odvěsně a druhá strana má stejnou délku jako (celá) přepona.“ (viz pátý diagram).

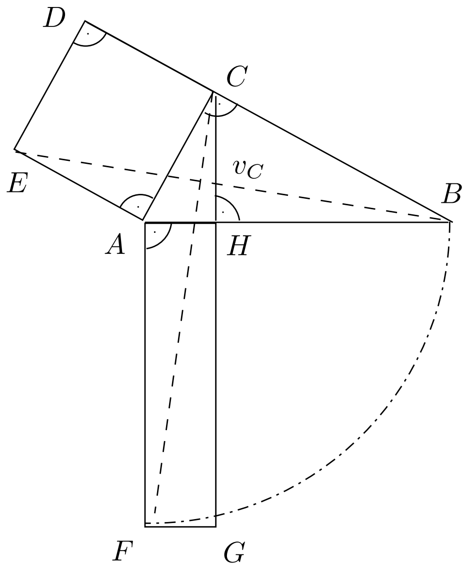

Diagram 5

Uvažujme *libovolný pravoúhlý* trojúhelník △ABC s pravým úhlem při vrcholu C. Sestrojme výšku z vrcholu C a její patu označme H; sestrojme čtverec ACDE a obdélník AFGH, jehož strana AF má stejnou délku jako přepona AB. Protože úhly ∢BAF a ∢CAE jsou pravé, jsou ∢CAF a ∢EAB stejně velké. Jelikož úsečky AF a AB jsou stejně velké a rovněž úsečky AC a AE jsou stejně velké, jsou následně plochy $\triangle$AFC a $\triangle$ABE stejně velké. Aplikujíce předchozí tvrzení o velikosti plochy trojúhelníku nahlédneme jednak, že plocha obdélníku AFGH je rovna dvojnásobku plochy $\triangle$AFC a jednak, že plocha čtverce ACDE je rovna dvojnásobku plochy trojúhelníku $\triangle$ABE. Následně se musí sobě rovnat plocha čtverce a plocha obdélníku.

Na počátku úvahy jsme zvolili libovolný *pravoúhlý trojúhelník,* odvozovací pravidlo generalizace tudíž zaručí, že „Pro každý *pravoúhlý trojúhelník* je plocha čtverce nad odvěsnou rovna ploše obdélníku, jehož jednou stranou je úsek přepony přilehlý uvažované odvěsně a druhá strana má stejnou délku jako přepona."

K předchozím návodům důkazů v geometrii se jeví vhodné připojit tři poznámky:

(1) Na užití generalizace na konci návodu důkazu prvního tvrzení a na užití specifikace ve druhé polovině druhého návodu vidíme krásně, jak tyto dva principy se navzájem doplňují a současně v jistém směru stojí proti sobě — jeden zobecňuje a druhý obecné specifikuje na konkrétní případ. Mohl by však také vzniknout zcela mylný dojem, že jejich užití je nadbytečné, vždyť místo specifikace prvního tvrzení na trojúhelník $\triangle$AFC jsme mohli v návodu na důkaz Eukleidovy věty aplikovat přímo na trojúhelník $\triangle$AFC úvahu předvedenou v prvním návodu. Je však třeba si uvědomit, že kroky generalizace a specifikace nemusí následovat bezprostředně za sebou a v takovémto složitějším důkazu nás pochopitelně ani nenapadne podobnou námitku vznášet. Zejména však i v našem konkrétním příkladu bychom měli nahlédnout, že užití generalizace a specifikace je výhodné. První tvrzení jsme přece aplikovali nejen na trojúhelník $\triangle$AFC, avšak také na trojúhelník $\triangle$ABE. Kdybychom neužili generalizace a specifikace, museli bychom ideje předvedené v prvním návodu užívat dvakrát: jednak na trojúhelník $\triangle$AFC a jednak na trojúhelník $\triangle$ABE (nehledě na to, že zakreslením všech grafických podkladů ke zmíněným úvahám do jednoho obrázku bychom dostali obrázek značně nepřehledný).

Zkuste zjednodušit návod na důkaz prvního tvrzení tím, že nejprve podáte návod na důkaz tohoto tvrzení pro *pravoúhlý* trojúhelník (diagram 3), užijete generalizaci a pak pro trojúhelníky, jež nejsou pravoúhlé (diagramy 1 a 4), vždy aplikujete tvrzení o pravoúhlých trojúhelnících na dva vhodné trojúhelníky[16)].

(2) Důvodem, proč jsme použili dvojici slov „návod důkazu" a nikoli prostě slovo „důkaz", pochopitelně není, že jsme ještě pojem důkazu nedefinovali zcela přesně; v textu mnohokrát předvádíme příklad před přesnou definicí pojmu. Neučinili jsme však něco mnohem podstatnějšího: nedefinovali jsme teorii, ve které hodláme důkaz provádět. Uvědomme si, že v návodu prvního tvrzení jsme použili řadu velice přirozených tvrzení jako např. „Plocha ob-

[16)] např. v druhém případě na $\triangle$IBC a $\triangle$IAC razce složeného z více obrazců se rovná součtu ploch těchto obrazců.", „Dva trojúhelníky, které mají stejné dva úhly a jednu stranu, mají stejnou plochu.", „Každé dva protilehlé úhly jsou si rovny." a „Všechny pravé úhly si jsou rovny.". Před konstrukcí přesného důkazu v geometrii bychom nejprve museli upřesnit axiomy geometrie a ta z uvedených tvrzení, které bychom za axiomy neprohlásili a přesto chtěli podle návodu použít, bychom museli dokázat před jejich užitím v sestrojovaném důkazu.

(3) Návod na důkaz prvního tvrzení začínal slovy „Uvažujme *libovolný* trojúhelník ...", první tvrzení proto vypovídá o *každém* trojúhelníku. Návod na důkaz Eukleidovy věty počínal slovy „Uvažujme libovolný *pravoúhlý* trojúhelník ...", v důsledku toho druhé tvrzení vypovídá pouze o *pravoúhlých* trojúhelnících.

*

Je celá řada důležitých logických principů, jež vyjadřují důležité vztahy mezi logickými operacemi, mají přesně vysvětlitelný význam, a přesto se navenek jeví jako pouhé manipulace se symboly. Ve výrokovém počtu takovými principy byly mezi jinými např. Stoiky formulované zákony transpozice $(\mathsf{p} \to \mathsf{q}) \to (\neg \mathsf{q} \to \neg \mathsf{p})$ a dvojité negace $\mathsf{p} \equiv \neg\neg \mathsf{p}$, de Morganova pravidla, z axiomů pak axiom **VP3** tvaru $(\neg \mathsf{p} \to \neg \mathsf{q}) \to (\mathsf{q} \to \mathsf{p})$. V predikátovém počtu je třeba počítat k axiomům tohoto druhu zejména axiom distribuce a axiom vztahu univerzální a existenční kvantifikace.

První z nich popisuje záměnu univerzální kvantifikace a implikace (tzn. jak přesunout kvantifikaci do implikace) za předpokladu, že antecedent nemá volné výskyty té proměnné, jejíž kvantifikaci přesunujeme[17)]. Než axiom zformulujeme, pokusme se ho motivovat na příkladu naší školy. Předpokládejme, že pro každého jednotlivého studenta je pravda: „Jestliže se nevyučuje, pak se student raduje." (jste-li protipříkladem na pravdivost takového tvrzení, pak zkoumáme zcela jinou školu než tu, kterou navštěvujete vy). Povšimněte si, že formule, jež je pravdivá pro každého studenta, je implikací, v jejímž antecedentu se o studentu nemluví (antecedent nezáleží na studentovi). Z předpokladu, že pro *každého* studenta je pravdivá *implikace*, vyvodíme *implikaci* „Jestliže se nevyučuje, pak se *každý* student raduje." — kvantifikaci jsme přesunuli až ke konsekventu implikace. Doufám, že souhlasíte, že takovým přesunem dostaneme důsledek našeho předpokladu.

Pro snazší zapamatování podmínek axiomů **PP4** a **PP5** dáme podmínkám jednotný tvar „nezmění se systém vázaných proměnných". Uvědomme si proto, že požadavek, že antecedent implikace $\varphi \to \psi$ (tzn. formule φ) nemá volnou

17) Na základě axiomu distribuce již budeme schopni ve třetím paragrafu popsat *všechny* možnosti přesunů kvantifikace (jak univerzální, tak také existenční), a to buď ke konsekventu nebo k antecedentu podle toho, zda volné výskyty kvantifikované proměnné nemá antecedent nebo konsekvent.

proměnnou u, je totožný s požadavkem „formule $(\forall u)(\varphi \to \psi)$ a formule $\varphi \to (\forall u)\psi$ mají stejné systémy vázaných proměnných".

Nejprve nahlédněme, že má-li formule φ volný výskyt proměnné u, je odpovídající výskyt volný i ve formuli $\varphi \to (\forall u)\psi$ (přidaný kvantifikátor není na tento výskyt aplikován). Naproti tomu ve formuli $(\forall u)(\varphi \to \psi)$ jsou *všechny* výskyty proměnné u vázané, systém vázaných výskytů druhé formule je ve zvažovaném případě větší než systém vázaných výskytů prvé formule. Pokud formule φ nemá volný výskyt proměnné u, mohou být volné výskyty zkoumané proměnné pouze ve formuli ψ a tyto výskyty se kvantifikací $(\forall u)$ jak ve formuli $(\forall u)(\varphi \to \psi)$, tak také ve formuli $\varphi \to (\forall u)\psi$ stanou vázanými. Na volnost či vázanost proměnných různých od u nemá přesun kvantifikace $(\forall u)$ vůbec žádný vliv.

Tak a teď formulujme axiom v plné obecnosti: Axiom **distribuce** je formule tvaru

PP5 $\quad (\forall u)(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\forall u)\psi),\quad$ za předpokladu, že *přesunem kvantifikace se nezmění systém vázaných proměnných.*

Axiom **PP5** je tedy implikací, jejíž antecedent je formule $(\forall u)(\varphi \to \psi)$ a jejíž konsekvent je formule $(\varphi \to (\forall u)\psi)$; tento axiom se přijímá jen pro formule φ, ψ splňující jistý požadavek.

I vztah mezi univerzální a existenční kvantifikací je formálně zapsatelný jako manipulace se symboly, zase však má zcela intuitivní význam. Jestliže se dovíte, že není pravda, že žádný student nemá jedničku z matematiky, určitě si řeknete, že vám mohli jednoduše říci, že existuje alespoň jeden student, který tu jedničku má. Tím odsouhlasíte jeden konkrétní případ následujícího principu.

Axiom **vztahu univerzální a existenční kvantifikace** je formule tvaru

$(\exists\forall)\quad (\exists u)\varphi \equiv \neg(\forall u)\neg\varphi\quad$ pro jakoukoli[18] formuli φ.

V předchozím axiomu se opravdu nejedná o pouhé hraní se symboly, ale o význam existenční kvantifikace. Chápání významu „existuje objekt splňující φ" jakožto „není pravda, že žádný objekt nesplňuje φ" je naprosto převažující a jeho formulaci lze připisovat již Aristotelovi (viz „logický čtverec" ve třetím paragrafu). Pokud bychom však dávali existenci význam „lze nalézt, sestrojit, atd. objekt splňující φ" nemohli bychom axiom $(\exists\forall)$ přijmout (viz intuicionistické pojetí logiky v závěrečné kapitole) — nalezení (nebo sestrojení) objektu s určitou vlastností je něco zcela jiného než prokázání nemožnosti neexistence objektu s touto vlastností.

[18] V uváděném principu se dokonce ani nevyžaduje, aby proměnná u měla ve formuli φ volný výskyt.

Zkusme shrnout kolik vyvozovacích pravidel jsme dosud formulovali. Uvedli jsme dvě odvozovací pravidla — modus ponens a generalizaci. Dále jsme vyslovili tři typy axiomů (**PP1–PP3**), která popisují vlastnosti výrokových spojek a uvedli axiomy specifikace a distribuce. Dohromady tedy sedm principů.

Navíc jsme před okamžikem popsali axiomem vztah univerzální a existenční kvantifikace. Pokud však chceme minimalizovat počet logických symbolů, postačí uvažovat jen jednu kvantifikaci a druhou pokládat za zkratku. Přesně tak jsme postupovali ve výrokovém počtu: v prvním paragrafu jsme popsali výrokový počet pouze s implikací a negací a ve druhém paragrafu jsme nabídli obohacení o další spojky a jako jednu z cest vedoucích k takovému obohacení jsme uvedli možnost chápání dalších spojek jakožto zkratek. Také nyní se otevírá možnost vzít za základní pouze univerzální kvantifikaci a existenční kvantifikaci chápat jako zkratku popsanou ekvivalencí (∃∀)[19]. Pokud chápeme existenční kvantifikaci jako zkratku, nepojímáme formuli z axiomu vztahu univerzální a existenční kvantifikace jako axiom, ale jako popis této zkratky.

V první kapitole jsme připomínali biblické vyprávění o Abrahamovi prosícího Hospodina, aby ušetřil Sodomu, pokud se v ní najde několik spravedlivých. Abraham postupně snižoval počet potřebných spravedlivých z 50 na 10. Jste schopen jej následovat a uspokojí vás, když vyvozovacích principů bude jen 10? Pak je možno formulovat ještě tři principy, protože v minimální verzi jsme uvedli přesně sedm principů.

Samozřejmě, že právě číslo deset inspirovalo autora k odkazu na Abrahama. Toto číslo však není nijak podstatné. Formulovat základní vyvozovací principy je pochopitelně možné mnoha způsoby a v různých systémech se počet vyvozovacích principů liší. Podstatné je však sdělení, že k popisu celého vyvozování v predikátovém počtu postačuje vybrat konečně mnoho vyvozovacích principů, že tento počet je poměrně malý a že nadto je možno volit principy, které jsou intuitivně obhajitelné.

Přikročme nyní k formulaci posledních vyvozovacích principů; tyto axiomy se týkají jednoho význačného predikátu — rovnosti. První axiom matematizuje naprostou samozřejmost — snad nikdo nezpochybní, že jakýkoli objekt se rovná sám sobě. Další axiom matematizuje také zřejmý fakt, totiž, že dva sobě rovné objekty vstupují do týchž vztahů; poslední vyjadřuje stejnou ideu pro funkce (hodnota funkce na sobě rovných objektech je táž). Jako jediná námitka proti následujícím axiomům by tedy přicházelo konstatování, že jsme měli ideu vyslovit silněji a požadovat, aby dva sobě rovné objekty vždy současně splňovaly, nebo nesplňovaly libovolnou formuli a nikoli, aby toto platilo jen pro (vybrané) základní

[19] Nebo naopak vzít za základní existenční kvantifikaci a univerzální chápat jako zkratku; pokud bychom však takovéto pojetí chtěli důsledně předvést, museli bychom přeformulovat i axiomy specifikace a distribuce a rovněž odvozovací pravidlo generalizace do tvaru užívajícího pouze existenční kvantifikaci.

formule. V dalším textu však nahlédneme, že námitka není oprávněná, protože zesílení je již důsledkem zvolených axiomů (viz důkaz rovností).

Axiomy rovnosti jsou formule některého z následujících tří tvarů **R1**–**R3**:

R1 $$(\forall u)(u = u),$$

R2 označuje formuli
$(\forall u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots v_k)[(u_1 = v_1 \,\&\ldots\&\, u_k = v_k \,\&\, \mathcal{P}(u_1, \ldots, u_k)) \to \mathcal{P}(v_1, \ldots, v_k)]$,
kde $\mathcal{P}$ zastupuje libovolný k-ární predikát (včetně binárního predikátu rovnosti!),

a **R3** značí formuli
$(\forall u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots v_k)[(u_1 = v_1 \,\&\ldots\&\, u_k = v_k) \to \mathfrak{F}(u_1, \ldots, u_k) = \mathfrak{F}(v_1, \ldots, v_k)]$,
kde $\mathfrak{F}$ označuje libovolnou k-ární funkci a $u, u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k$ zastupují libovolné proměnné (jakéhokoli druhu ze zvoleného jazyka).

*

Zcela analogicky definici důkazu ve výrokovém počtu definujeme (opět rekurzí) v predikátovém počtu **důkaz** v nějaké teorii $\boldsymbol{T}$:

Stavební kameny: formule jazyka teorie $\boldsymbol{T}$.
Základní důkazy: axiomy predikátového počtu a axiomy teorie $\boldsymbol{T}$.
Pravidla pro prodlužování důkazů:

(a) modus ponens a generalizace
(b) možnost připojit za důkaz jiný důkaz (oba důkazy v teorii $\boldsymbol{T}$).

Jinými slovy: posloupnost formulí $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k$ je **důkazem v teorii** $\boldsymbol{T}$, jestliže pro každé i menší nebo rovno k je formule ϑ_i formulí jazyka teorie $\boldsymbol{T}$ a má *některý* z následujících tvarů:

(i) ϑ_i je axiomem predikátového počtu,
(ii) ϑ_i je axiomem teorie $\boldsymbol{T}$,
(iii) ϑ_i vznikne aplikací dedukčního pravidla modus ponens na dvě formule v posloupnosti předcházející (podrobněji: existují j, j' *menší* než i takové, že $\vartheta_{j'}$ je formulí tvaru $\vartheta_j \to \vartheta_i$).
(iv) ϑ_i vznikne aplikací dedukčního pravidla generalizace na formuli v posloupnosti předcházející (podrobněji: existuje j *menší* než i takové, že ϑ_i je formulí tvaru $(\forall u)\vartheta_j$, kde u je jakákoli proměnná).

Posloupnost $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k$, vyhovující výše uvedené podmínce, nazýváme také **důkazem** (té poslední) **formule** ϑ_k v teorii $\boldsymbol{T}$. Formule φ predikátového počtu je **dokazatelná** v teorii $\boldsymbol{T}$ (znak $\boldsymbol{T} \vdash \varphi$), jestliže existuje její důkaz v teorii $\boldsymbol{T}$. Formule se nazývá **vyvratitelná** v teorii $\boldsymbol{T}$, jestliže její negace je v teorii $\boldsymbol{T}$ dokazatelná.

Teorii $\boldsymbol{T}$ nazýváme **spornou** (též *inkonzistentní*), jestliže existuje formule ψ taková, že v teorii $\boldsymbol{T}$ je dokazatelná jak sama formule ψ, tak také její negace $\neg\psi$ (neboli jestliže existuje formule ψ, která je jak dokazatelná, tak také vyvratitelná v teorii $\boldsymbol{T}$). Teorii, která není sporná, nazýváme **bezespornou** (též *konzistentní*).

Úloha 13. Důkaz je posloupností formulí splňující určité podmínky. Je každá podposloupnost důkazu opět důkazem? Je každá formule, která je členem nějakého důkazu v teorii, dokazatelná v této teorii?

Úloha 14. Ukažte, že teorie je sporná, právě když je v ní dokazatelná jakákoli formule jejího jazyka. Návod: užijte zákon Dunse Scota (viz také úlohu 25 §1 kap. I).

Podobně jako ve výrokovém počtu není zvykem ani v počtu predikátovém psát důkaz v teorii přesně ve tvaru vyžadované v předchozí definici, používáme celé řady pomocných vyvozovacích principů, avšak opět jako ve výrokovém počtu musíme být schopni každý správně vytvořený důkaz v té které teorii přetvořit na důkaz tvaru popsaného výše. Popsáním řady postupů, které zpřehlední a usnadní vyvozování, se budeme zabývat po uvedení sémantiky predikátového počtu (pojmů pravdivosti a splňování ve struktuře a modelu teorie).

Kromě uvedení obecných návodů, jak tvořit důkazy, je pochopitelně záhodno předvést řadu konkrétních matematických důkazů, aby čtenář na skutečných důkazech nahlédl užití nabídnutých vyvozovacích principů. V této kapitole budou uváděny spíše důkazy v obecném predikátovém počtu; je však samozřejmě zapotřebí předvést i důkazy v některé matematické teorii. Autor zvolil pro tento účel z několika důvodů aritmetiku a jedním z nejdůležitějších cílů prvního paragrafu následující kapitoly bude ukázat na jednoduchých příkladech dokazování v aritmetice.

*

[u13)] Není; podposloupnost může porušit možnost aplikovat dedukční pravidla (např. v podposloupnosti zůstane zachována formule $(\forall u)\varphi$, avšak samotná formule φ již v podposloupnosti nezůstane). Posloupnost, která vznikne *zkrácením* důkazu je však opět důkazem. Protože jakýkoli důkaz můžeme zkrátit tak, aby kterákoli jeho formule byla formulí poslední, je na druhou otázku odpověď kladná.

[u14)] Chceme dokázat danou formuli φ jazyka teorie $\boldsymbol{T}$ a předpokládáme dokazatelnost jak formule ψ, tak také formule $\neg\psi$ v teorii $\boldsymbol{T}$. Za důkaz formule ψ v teorii $\boldsymbol{T}$ přidejme důkaz formule $\neg\psi$ v téže teorii, dále přidejme důkaz formule $\neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ (v systému, kde přidáváme jako axiomy všechna možná dosazení do tautologií výrokového počtu, se jedná o axiom, v minimalizovaném systému je tato formule pouze dokazatelná, musíme proto přidat celý její důkaz) a důkaz zakončíme dvojím užitím modus ponens, čímž obdržíme formuli φ jako závěrečnou formuli naší posloupnosti. Obrácené tvrzení je triviální.

Formulace v posledním odstavci naznačují, že hodláme na chvíli opustit zkoumání důkazů v predikátovém počtu. Než tak učiníme, zamysleme se ještě nad důsledky axiomu **R2.** Naše intuice totiž od rovnosti požaduje nejen reflexivitu (tj. $(\forall u)(u = u)$) zaručenou axiomem **R1,** avšak také symetrii (tj. $(\forall u, v)(u = v \to v = u)$) a tranzitivitu (tzn. $(\forall u, v, w)[(u = v \,\&\, v = w) \to u = w]$). Zdánlivě jsme druhé dva požadavky vůbec nereflektovali při popisu axiomů rovnosti.

Není však tomu tak. Zdůraznili jsme, že axiom **R2** požadujeme i pro samotný binární predikát rovnosti, tzn. žádáme

$$(i) \qquad (\forall u_1, u_2, v_1, v_2)[(u_1 = v_1 \,\&\, u_2 = v_2 \,\&\, u_1 = u_2) \to v_1 = v_2].$$

Nahraďme nyní ve formuli (i) proměnné u_1, u_2 a v_2 proměnnou u a proměnnou v_1 proměnnou v. Tím obdržíme

$$(u = v \,\&\, u = u \,\&\, u = u) \to v = u.$$

Je zcela zřejmé, že na základě axiomu **R1** a důkazu konjunkce dostaneme $u=v \to (u=v \,\&\, u=u \,\&\, u=u)$, takže tranzitivita implikace a generalizace zajistí $(\forall u, v)(u = v \to v = u)$, tj. požadovanou symetrii.

Velmi podobně po nahrazení proměnných u_1, u_2 proměnnou v a proměnných v_1, v_2 po řadě proměnnými u a w získáme z formule (i) formuli

$$(ii) \qquad (v = u \,\&\, v = w \,\&\, v = v) \to u = w.$$

Z konjunkce $(u = v \,\&\, v = w)$ vyvodíme $(v = u \,\&\, v = w \,\&\, v = v)$ pomocí již dokázané symetrie rovnosti a axiomu **R1** užívajíce odvozovací pravidla důkaz užitím konjunkce a důkaz konjunkce. Z prokázané implikace vyvodíme implikaci $(u = v \,\&\, v = w) \to (v = u \,\&\, v = w \,\&\, v = v)$ a z formule (ii) obdržíme prostou aplikací tranzitivity implikace formuli $(u = v \,\&\, v = w) \to u = w$ a dále generalizace přinese $(\forall u, v, w)[(u = v \,\&\, v = w) \to u = w]$, tedy žádanou tranzitivitu rovnosti.

* * *

V dalším začneme používat jazyk teorie množin, protože je zvykem budovat sémantiku predikátového počtu v rámci (intuitivní) teorie množin. Připomeňme, že jako množinu označujeme systém objektů, kterým pak říkáme prvky. Množiny připouštíme konečné i nekonečné, což je velice podstatné, protože některé bezesporné teorie nemají konečný model, mají však model nekonečný (viz dále); u jiných teorií jsou naopak všechny modely konečné.

Podstatnou součástí teorie množin je zkoumání nekonečna. V teorii množin definujeme různé velikosti nekonečných množin, srovnáváme je a vyšetřujeme jejich vlastnosti. Není obtížné ukázat, že minimální nekonečno je nekonečno reprezentované množinou přirozených čísel. Množiny, jež jsou představitelkami tohoto typu nekonečna, nazýváme spočetné. (Formálněji: množina se nazývá spočetná, jestliže existuje vzájemně jednoznačné zobrazení zobrazující ji na množinu přirozených čísel.)

Axiomatický systém teorie množin je formulován na konci §3 třetí kapitoly a vysvětlení jednotlivých axiomů je možno chápat jako formulaci základních principů teorie množin.

Jak bude vypadat myslitelná škola pro jazyk **Ls,** který jsme popsali výše? V obecném případě budeme hovořit o **struktuře** pro daný jazyk; při následujícím popisu zadání myslitelné školy budeme už také uvádět pojmy běžně užívané při popisu obecně pojaté struktury.

Myslitelná škola je navštěvována nějakými „studenty“, musíme mít tedy jako první zadánu jakousi *neprázdnou* množinu. V obecném případě struktury pro daný jazyk budeme tuto množinu nazývat **univerzem struktury** a její prvky se běžně nazývají **individua**; pro individua budeme používat znaky $\boldsymbol{\mathfrak{a}}, \boldsymbol{\mathfrak{b}}, \ldots$

Část množiny studentů vydělíme jako „muže“, tato část může být prázdná nebo naopak může být rovna celé množině „studentů“ (škola, kterou navštěvují jen chlapci nebo jen děvčata, je pochopitelně myslitelná). Unární predikát $\mathcal{P}$ bude v obecném případě realizován nějakou podmnožinou $\mathcal{P}_{\mathbb{M}}$ univerza struktury.

Zadat „kamarády“ v myslitelné škole znamená určit nějakou množinu uspořádaných dvojic „studentů“, dvojice „kamarádů“ budou představovat přesně ty dvojice „studentů“, jež jsou v této množině; přesně stejně: určit, který ze dvou „studentů“ je „starší“, znamená zadat množinu uspořádaných dvojic „studentů“; „student“ uvedený jako první je chápán jako ten „starší“ z dvojice. V obecném případě: **realizovat** k-ární **predikát** $\mathcal{Q}$ ve struktuře (pro $k \geq 2$) znamená zadat množinu $\mathcal{Q}_{\mathbb{M}}$ uspořádaných k-tic individuí struktury; pro k-tici individuí bude predikát pravdivý ve struktuře, právě když k-tice je v zadané množině.

Popsat chápání konstant $\mathfrak{Jan}3\mathrm{B}$ a $\mathfrak{nejststud}$ je samozřejmě jednoduché — prostě v každém jednotlivém případě zvolíme jednoho „studenta“, tzn. jedno individuum z množiny „studentů“, a označíme ho jako Jana ze 3.B v prvním případě a jako nejstarší studentku naší myslitelné školy v případě druhém. Analogicky **realizovat konstantu** $\mathfrak{c}$ v jakékoli struktuře znamená přiřadit této konstantě jedno individuum $\mathfrak{c}_{\mathbb{M}}$ struktury.

Funkci $\mathfrak{F}$ musí odpovídat funkce definovaná na množině „studentů“ a zobrazující tuto množinu do sebe samé — v konkrétním příkladu naší školy přiřazuje funkce každému individuu (tj. „studentu“ myslitelné školy) individuum představující „nejstaršího studenta příslušné třídy“ a podobně postupujeme i v případě funkce $\mathfrak{G}$. Je zapotřebí dát pozor na to, že slovo „funkce“ bylo v předchozí větě použito ve dvou významech: mluvili jsme jednak o funkci $\mathfrak{F}$, což je objekt logiky — prvek jazyka **Ls,** a jednak o zobrazení, které individuu z univerza struktury přiřazuje jeho obraz, tedy zase objekt z univerza struktury. Tato druhá funkce je objektem (intuitivní) teorie množin, a je proto možno pro odlišení o ní mluvit jako o množinové funkci. V obecném případě **realizováním** n-ární **funkce** $\mathfrak{H}$ ve struktuře rozumíme zadání (množinové) funkce $\mathfrak{H}_{\mathbb{M}}$ zobrazující množinu uspořádaných n-tic individuí do množiny individuí.

Realizovat druh proměnných u „upovídaných studentů“ znamená zadat libovolnou *neprázdnou* podmnožinu množiny „studentů“, kterou chápeme jako množinu „upovídaných studentů“. Realizací druhu proměnných v obecné struktuře rozumíme zadání *neprázdné* podmnožiny univerza struktury. Univerzální druh proměnných je vždy realizován celým univerzem struktury.

Shrňme, že zadat **strukturu** $\mathbb{M}$ pro jazyk **L** znamená zadat *neprázdnou* množinu M jakožto univerzum struktury a pro každý znak predikátu jazyka **L** četnosti k určit množinu (uspořádaných) k-tic individuí, každému znaku konstanty jazyka **L** přiřadit individuum, každému znaku funkce četnosti n jazyka **L** přiřadit množinovou funkci definovanou na všech (uspořádaných) n-ticích individuí, jejíž obor hodnot je částí univerza struktury a každému druhu proměnných přiřadit neprázdnou část univerza struktury (univerzálnímu druhu automaticky přiřazujeme celé univerzum struktury).

Za okamžik popíšeme pravdivost kterékoli formule jakéhokoli jazyka **L** ve struktuře pro jazyk **L**. Nicméně nejprve je potřeba definovat realizaci termu uvažovaného jazyka ve struktuře pro tento jazyk a zejména pojem ohodnocení proměnných.

Proměnná představuje *jakési* individuum z univerza. Není tedy dost dobře možné říci, zda proměnná má nějakou vlastnost, či zda vstupuje do nějakého vztahu, byť základního (přesněji: zda je pro ni predikát ve smyslu struktury pravdivý). Nejdříve totiž musíme popsat, jak v tom kterém okamžiku chápeme význam proměnné; takovémuto popsání významu proměnných říkáme ohodnocení. Například není možno konstatovat, že student je starší než Jan ze 3.B, potřebujeme nejprve vědět, kterého studenta máme na mysli — pro některé studenty může být odpověď kladná, pro jiné záporná.

Ohodnocením proměnných ve struktuře $\mathbb{M}$ rozumíme zobrazení přiřazující proměnným individua struktury M. Přitom jedné každé proměnné můžeme přiřazovat pouze individuum z oboru, který „probíhá“, tzn. proměnné jakéhokoli druhu je přiřazeno individuum z množiny realizující tento druh. (Mělo by být zcela jasné, ale pro jistotu: máme-li jen univerzální druh proměnných, je ohodnocením každé zobrazení přiřazující (univerzálním) proměnným *jakákoli* individua struktury.) Jakmile „popíšeme význam“ proměnných, umíme již na základě realizací konstant a funkcí jednoznačně „popsat význam“ všech termů — matematičtěji řečeno určit realizaci toho kterého termu zkoumaného jazyka ve vyšetřované struktuře.

Je třeba si uvědomit rozdíl mezi realizací konstanty a ohodnocením proměnné. Realizace konstanty je pevně zadána při definici struktury, pokud budeme jinak realizovat konstantu, změníme strukturu. Naproti tomu při pevně zadané struktuře je možno (a za okamžik uvidíme, že v obecném případě dokonce nutno) vyšetřovat mnoho různých ohodnocení proměnných.

Před definicí pravdivosti formule ve struktuře přistupme v tomto a následujícím odstavci k definici realizace termu. Pro čtenáře, který nepřipouští jazyk s funkcemi, však postačí jen tento odstavec, následující popisuje realizace těch termů, v jejichž konstrukci je použita logická funkce. Pokud nemáme funkce, je každý term buďto proměnnou, nebo konstantou. Realizace takovýchto termů je jednoduše zadána ohodnocením a strukturou — ohodnocením je proměnné přiřazeno určité individuum a při zadání struktury je rovněž konstantě přiřazeno individuum, totiž realizace této konstanty.

Zbývá definovat realizace termů, při jejichž konstrukci byla použita funkce. Realizace takového termu se definuje rekurzí podle složitosti termu; pro základní termy je jejich realizace popsána v předchozím odstavci. Předpokládejme, že realizacemi termů $t_1, \ldots, t_n$ jsou (při zkoumaném ohodnocení) ve struktuře $\mathbb{M}$ po řadě individua $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ a množinová funkce $\mathfrak{F}_{\mathbb{M}}$ budiž realizací n-ární funkce $\mathfrak{F}$ jazyka $\mathbf{L}$. Pak realizací termu $\mathfrak{F}(t_1, \ldots, t_n)$ je — zcela přirozeně — $\mathfrak{F}_{\mathbb{M}}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$, tj. to individuum, které je hodnotou realizace funkce $\mathfrak{F}$ na n-tici realizací termů $t_1, \ldots, t_n$ (neboli na n-tici individuí $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$).

Realizace termu závisí na třech parametrech: struktuře, ohodnocení proměnných a na termu, o který jde, neboť kterékoli proměnné mohou být různými ohodnoceními přiřazena různá individua; v různých strukturách také mohou být jedné konstantě přiřazena různá individua (a nadto pojem ohodnocení závisí na zvolené struktuře). Podstatnější však je, že realizace termu je *jednoznačně určena uvedenými parametry.* Zcela analogicky v následující definici nahlédneme, že pravdivost formule závisí na třech parametrech: struktuře, ohodnocení a formuli samé. *Uzavřená* formule je dokonce závislá jenom na dvou parametrech, protože nezávisí na ohodnocení[20].

Při znalosti realizací termů ve struktuře jsme již schopni popsat pravdivost libovolné formule ve struktuře. Motivujme na příkladu myslitelné školy $\mathbb{S}$ pojem pravdivosti ve struktuře, při ověřování pravdivosti jednotlivých formulí se nechte vést intuicí, současně však již také konzultujte definici, jež následuje okamžitě po úloze 19; hlavním účelem prvních čtyř příkladů a úloh 15–19 je totiž ukázat při-

[20] Uvedené tvrzení je možno zesílit: realizace termu nezávisí na ohodnocení těch proměnných, které se v termu nevyskytují a pravdivost formule nezávisí na ohodnocení těch proměnných, jež ve formuli nemají *volný* výskyt. To je velice intuitivní: jestliže se ve formuli nevyskytuje proměnná pro studenta 3.A („nevypovídá-li tvrzení o studentovi z 3.A"), naprosto nás při zkoumání formule nezajímá, jakým individuem bychom ohodnotili proměnnou pro studenta z 3.A. Při zkoumání ohodnocení termu a pravdivosti formule se tedy nebudeme zajímat, jak jsou ohodnoceny nadbytečné proměnné, a dokonce ani zda jsou vůbec ohodnoceny.

rozenost citované definice. Po předložení definice budeme počínaje příkladem 6 pokračovat ve zkoumání pravdivosti ve struktuře $\mathbb{S}$, a to těch formulí, které používají spojky zavedené ve druhém paragrafu první kapitoly.

Univerzum struktury $\mathbb{S}$ — myslitelné školy — nechť se skládá z deseti individuí $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{10}$; predikát $\mathcal{M}u\check{z}$ budiž realizován množinou $\mathcal{M}u\check{z}_{\mathbb{S}}$ individuí $\{\mathfrak{a}_5, \ldots, \mathfrak{a}_{10}\}$ („studenty-muži“ jsou individua $\mathfrak{a}_i$ pro i větší než 4 a menší nebo rovna 10); predikát $\mathcal{K}am$ budiž realizován množinou $\mathcal{K}am_{\mathbb{S}}$ všech dvojic individuí $\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j$, kde i a j jsou nenulová přirozená čísla menší než 6 a od sebe různá (všechny „studentky“ spolu navzájem „kamarádí“ a všechny také „kamarádí“ se „studentem“ $\mathfrak{a}_5$; „studenti-muži“ spolu navzájem „nekamarádí“); predikát $\succ$ nechť je realizován množinou $\succ_{\mathbb{S}}$ všech dvojic individuí $\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j$ kde i je větší než j a i, j jsou nenulová přirozená čísla menší nebo rovna 10 („studenti“ jsou očíslováni podle „věku“ počínaje „nejmladší studentkou“); konstanty $\mathfrak{Jan}3\mathrm{B}$ a $\mathfrak{nejststud}$ buďtež po řadě realizovány individui $\mathfrak{a}_5$ a $\mathfrak{a}_4$; realizace funkce $\mathfrak{F}$ nechť je množinovou funkcí přiřazující každému individuu individuum $\mathfrak{a}_{10}$ a funkce $\mathfrak{G}$ budiž realizována množinovou funkcí přiřazující každému individuu $\mathfrak{a}_i$ individuum $\mathfrak{a}_{i+1}$ (pro $i = 1, \ldots, 9$) a nadto individuu $\mathfrak{a}_{10}$ sebe sama. Druh proměnných u „upovídaných studentů“ budiž realizován tříprvkovou množinou $\{\mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_5\}$ (neboli jako „upovídané“ označíme „studenty“ $\mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_5$). Popsaná struktura $\mathbb{S}$ je strukturou pro jazyk **Ls.**

Příklad 1. Formule $\mathcal{M}u\check{z}(\mathfrak{nejststud})$, tzn. „Nejstarší studentka je muž.“, nemá volné proměnné, její pravdivost ve struktuře $\mathbb{S}$ tedy nezávisí na zadání ohodnocení; konstanta $\mathfrak{nejststud}$ je realizována individuem $\mathfrak{a}_4$, toto individuum není prvkem množiny $\mathcal{M}u\check{z}_{\mathbb{S}}$, takže formule $\mathcal{M}u\check{z}(\mathfrak{nejststud})$ není ve struktuře $\mathbb{S}$ pravdivá při žádném ohodnocení a formule $\neg\mathcal{M}u\check{z}(\mathfrak{nejststud})$, tj. „Nejstarší studentka je žena.“, je v téže struktuře pravdivá (viz body (1) a (3) definice pravdivosti formule ve struktuře podané po úloze 19; uvedený výsledek zapíšeme pomocí zápisu $\mathbb{S} \models \neg\mathcal{M}u\check{z}(\mathfrak{nejststud})$).

Formule $s \succ \mathfrak{Jan}3\mathrm{B}$ vyjadřuje, že „student“ s je „starší“ než $\mathfrak{Jan}3\mathrm{B}$. Protože naše formule obsahuje volný výskyt proměnné s, bude její pravdivost záviset na ohodnocení proměnné s, tj. na tom, jaké individuum přiřadíme této proměnné. Konstanta $\mathfrak{Jan}3\mathrm{B}$ je realizována individuem $\mathfrak{a}_5$, takže (uspořádaná) dvojice individuí $\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_5$ je prvkem množiny dvojic $\succ_{\mathbb{S}}$, právě když i je větší než 5 a menší nebo rovno 10. Takže formule $s \succ \mathfrak{Jan}3\mathrm{B}$ je pravdivá ve struktuře $\mathbb{S}$ přesně při ohodnoceních přiřazujících proměnné s individua $\mathfrak{a}_i$ kde $i = 6, \ldots, 10$ (viz bod (1) citované definice). Při zápisu tohoto výsledku uvedeme v hranatých závorkách právě ta individua, pro něž je formule $s \succ \mathfrak{Jan}3\mathrm{B}$ pravdivá ve struktuře $\mathbb{S}$ neboli konstatujeme, že máme $\mathbb{S} \models s \succ \mathfrak{Jan}3\mathrm{B}[\mathfrak{a}_i]$ přesně pro $i = 6, \ldots, 10$.

Vyšetřeme ještě pravdivost formule $\mathcal{K}am(s_1, s_2)$ se dvěma volnými proměnnými. Při libovolném ohodnocení proměnných ohodnocujeme jednu každou proměnnou nezávisle na druhé, máme tedy pro každou uspořádanou dvojici individuí zjistit, zda je pro ni formule $\mathcal{K}am(s_1, s_2)$ pravdivá. Podle definice množiny $\mathcal{K}am_{\mathbb{S}}$ a v důsledku bodu (1) je zkoumaná formule pravdivá pro všechny dvojice individuí $\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j$, kde i a j jsou od sebe různá nenulová přirozená čísla menší než 6, což vyznačíme pomocí $\mathbb{S} \models \mathcal{K}am(s_1, s_2)[\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j]$ pro $i, j = 1, \ldots, 5$ od sebe různá.

Úloha 15. Při kterých ohodnoceních je ve struktuře $\mathbb{S}$ pravdivá formule $\mathfrak{nejststud} \succ \mathfrak{Jan}3\mathrm{B}$, formule $\mathcal{K}am(s, \mathfrak{nejststud})$, formule $s \neq \mathfrak{nejststud}$ a formule $\mathcal{K}am(s, \mathfrak{Jan}3\mathrm{B}) \rightarrow \mathcal{K}am(s, \mathfrak{nejststud})$?

Příklad 2. Vyšetřujme nyní formule s kvantifikátory. Formule

$$(iii) \qquad (\forall s)(s \neq \mathfrak{nejststud} \rightarrow \mathfrak{nejststud} \succ s)$$

vyjadřuje výrok „Nejstarší studentka je nejstarším studentem školy.“. Formule nemá volné proměnné, její pravdivost proto nezávisí na volbě ohodnocení. Přesto však je potřebné zkoumat nejprve pravdivost formule $s \neq \mathfrak{nejststud} \rightarrow \mathfrak{nejststud} \succ s$, která má jednu volnou proměnnou s, a to při všech možných ohodnoceních. Konsekvent posledně uvedené formule je pravdivý právě při těch ohodnoceních, které přiřazují proměnné s individua $\mathfrak{a}_i$, kde i je přirozené číslo menší než 4 (podle definice množiny $\succ_{\mathbb{S}}$, v důsledku realizace konstanty $\mathfrak{nejststud}$ individuem $\mathfrak{a}_4$ a v důsledku bodu (1); zápis: $\mathbb{S} \models \mathfrak{nejststud}) \succ s[\mathfrak{a}_i]$ pro $i = 1, 2, 3$). Tedy např. při jakémkoli ohodnocení přiřazujícím proměnné s individuum $\mathfrak{a}_3$ je formule $\mathfrak{nejststud} \succ s$ pravdivá a při libovolném ohodnocení přiřazujícím proměnné s individuum $\mathfrak{a}_5$ (tj. „Jana ze 3.B“) je nepravdivá. Nadto při všech ohodnoceních přiřazujících proměnné s individuum $\mathfrak{a}_i$ pro $i = 1, 2, 3, 5, \ldots, 10$ je pravdivý antecedent zkoumané implikace. Tudíž při libovolném ohodnoceních přiřazujícím pro-

[u15] Konstanty $\mathfrak{nejststud}$ a $\mathfrak{Jan}3\mathrm{B}$ jsou po řadě realizovány individui $\mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_5$; prvkem množiny dvojic $\succ_{\mathbb{S}}$ je uspořádaná dvojice $\mathfrak{a}_5, \mathfrak{a}_4$ a nikoli uspořádaná dvojice $\mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_5$, takže formule $\mathfrak{nejststud} \succ \mathfrak{Jan}3\mathrm{B}$ není ve struktuře $\mathbb{S}$ pravdivá (zápis $\mathbb{S} \models \neg\mathfrak{nejststud} \succ \mathfrak{Jan}3\mathrm{B}$). Pravdivost formule vůbec nezávisí na ohodnocení, neboť formule nemá volnou proměnnou. Formule $\mathcal{K}am(s, \mathfrak{nejststud})$ je ve struktuře $\mathbb{S}$ pravdivá právě při ohodnoceních přiřazujících proměnné s individua $\mathfrak{a}_i$, kde i je nenulové přirozené číslo menší než 6 a různé od 4 (podle definice množiny $\mathcal{K}am_{\mathbb{S}}$ a v důsledku bodu (1); zápis: $\mathbb{S} \models \mathcal{K}am(s, \mathfrak{nejststud})[\mathfrak{a}_i]$ pro $i = 1, 2, 3, 5$). Tedy např. při jakémkoli ohodnocení přiřazujícím proměnné s individuum $\mathfrak{a}_5$ (tj. „Jana ze 3.B“) je formule $\mathcal{K}am(s, \mathfrak{nejststud})$ pravdivá ve struktuře $\mathbb{S}$ a při libovolném ohodnocení přiřazujícím proměnné s individuum $\mathfrak{a}_6$ je nepravdivá.
Formule $s \neq \mathfrak{nejststud}$ je pravdivá pro všechna ohodnocení, jež nabývají pro proměnnou s hodnoty $\mathfrak{a}_i$, kde i je nenulové přirozené číslo menší nebo rovno 10 a různé od 4 (v symbolech $\mathbb{S} \models s \neq \mathfrak{nejststud}[\mathfrak{a}_i]$ pro $i = 1, 2, 3, 5, \ldots, 10$).
Protože dvojice individuí $\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_5$ je prvkem množiny dvojic $\mathcal{K}am_{\mathbb{S}}$ přesně pro nenulová přirozená čísla i menší než 5, je ve struktuře $\mathbb{S}$ pravdivý antecedent poslední zkoumané formule pro ta ohodnocení, jež nabývají pro proměnnou s hodnot $\mathfrak{a}_i$, kde $i = 1, \ldots, 4$ (v symbolech $\mathbb{S} \models \mathcal{K}am(s, \mathfrak{Jan}3\mathrm{B})[\mathfrak{a}_i]$ pro $i = 1, \ldots, 4$). Před okamžikem jsme prokázali, že konsekvent je ve struktuře $\mathbb{S}$ pravdivý při ohodnoceních nabývajících pro proměnnou s hodnoty $\mathfrak{a}_i$, kde $i = 1, 2, 3, 5$. Takže vyšetřovaná implikace je pravdivá pro všechna ohodnocení, jež nenabývají pro proměnnou s hodnotu $\mathfrak{a}_4$ (neboli v symbolech $\mathbb{S} \models \mathcal{K}am(s, \mathfrak{Jan}3\mathrm{B}) \rightarrow \mathcal{K}am(s, \mathfrak{nejststud})[\mathfrak{a}_i]$ pro $i = 1, 2, 3, 5, \ldots, 10$).

měnné s individuum $\mathfrak{a}_i$ pro $i = 5, \dots, 10$ je formule $s \neq \mathfrak{nejststud} \rightarrow \mathfrak{nejststud} \succ s$ nepravdivá. Takže formule (*iii*) je nepravdivá ve struktuře $\mathbb{S}$ (viz bod (5) následující definice; zapišme, že negace formule (*iii*) je pravdivá: $\mathbb{S} \models \neg(\forall s)(s \neq \mathfrak{nejststud} \rightarrow \mathfrak{nejststud} \succ s))$.

Zkoumejme dále formuli se dvěma kvantifikátory

$$(iv) \qquad (\forall s_1, s_2)\big(\neg\mathcal{M}u\check{z}(s_1) \rightarrow [\neg\mathcal{M}u\check{z}(s_2) \rightarrow (s_1 \neq s_2 \rightarrow \mathcal{K}am(s_1, s_2))]\big),$$

která vyjadřuje (podle zákona slučování premis viz příklad 4 druhého paragrafu kap. I) tvrzení „Každé dvě (různé) studentky spolu kamarádí.“. Formule je uzavřená, svá zkoumání však začněme vyšetřováním formule $\neg\mathcal{M}u\check{z}(s_1) \rightarrow [\neg\mathcal{M}u\check{z}(s_2) \rightarrow (s_1 \neq s_2 \rightarrow \mathcal{K}am(s_1, s_2))]$, jež má dvě volné proměnné s_1, s_2. Při každém ohodnocení přiřazujícím proměnné s_1 kterékoli individuum z množiny individuí $\mathfrak{a}_5, \dots, \mathfrak{a}_{10}$, je nepravdivý první antecedent (viz body (1) a (3) neustále citované definice), zcela analogicky při libovolném ohodnocení přiřazujícím proměnné s_2 kterékoli individuum z uvedené množiny je nepravdivý druhý antecedent (pročež je celá implikace pravdivá podle bodu (4)). Pokud ohodnocení přiřazuje proměnným s_1, s_2 táž individua, je nepravdivý třetí antecedent (viz bod (2) citované definice), a tudíž je celá formule pravdivá při takovém ohodnocení. Při zbývajících ohodnoceních (tj. ohodnoceních přiřazujících proměnným s_1, s_2 různá individua $\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j$, kde i a j jsou nenulová přirozená čísla menší než 5) je pravdivý konsekvent (podle úvahy na konci předchozího příkladu), pročež při všech možných ohodnoceních je formule

$$\neg\mathcal{M}u\check{z}(s_1) \rightarrow [\neg\mathcal{M}u\check{z}(s_2) \rightarrow (s_1 \neq s_2 \rightarrow \mathcal{K}am(s_1, s_2))]$$

pravdivá (zápis: $\mathbb{S} \models \neg\mathcal{M}u\check{z}(s_1) \rightarrow [\neg\mathcal{M}u\check{z}(s_2) \rightarrow (s_1 \neq s_2 \rightarrow \mathcal{K}am(s_1, s_2))][\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j]$ pro libovolnou dvojici i, j nenulových přirozených čísel menších nebo rovných 10). V důsledku toho při všech ohodnoceních je pravdivá rovněž formule (*iv*) (viz bod (5); automaticky dokonce víme, že na ohodnocení nezáleží, formule je uzavřená; prokázané vyjadřuje zápis

$$\mathbb{S} \models (\forall s_1, s_2)\big(\neg\mathcal{M}u\check{z}(s_1) \rightarrow [\neg\mathcal{M}u\check{z}(s_2) \rightarrow (s_1 \neq s_2 \rightarrow \mathcal{K}am(s_1, s_2))]\big)).$$

Úloha 16. Vyjádřete slovy formuli

$$(v) \qquad (\forall s_1, s_2)\big(\mathcal{M}u\check{z}(s_1) \rightarrow [\mathcal{M}u\check{z}(s_2) \rightarrow (s_1 \neq s_2 \rightarrow \mathcal{K}am(s_1, s_2))]\big)$$

a naopak formulí vyjádřete (užívajíce z výrokových spojek pouze implikaci a negaci) tvrzení „Každá studentka je mladší než libovolný student-muž.“. Rozhodněte, zda jsou tyto formule pravdivé ve struktuře $\mathbb{S}$ při každém ohodnocení.

[u16)] Formule vyjadřuje (opět podle zákona slučování premis) výrok „Každí dva (různí) studenti-muži spolu kamarádí.“. Vyšetřování je výhodné opět začít zkoumáním formule

$$(vi) \qquad \mathcal{M}u\check{z}(s_1) \rightarrow [\mathcal{M}u\check{z}(s_2) \rightarrow (s_1 \neq s_2 \rightarrow \mathcal{K}am(s_1, s_2))]$$

Úloha 17. Zapište formulí tvrzení „Nejstarší studentka se nekamarádí s žádným studentem.“ a „Nejstarší studentka se kamarádí s každým studentem.“. Jsou tato tvrzení pravdivá ve struktuře $\mathbb{S}$ (při každém ohodnocení)? Je ve struktuře $\mathbb{S}$ pravdivá symetrie predikátu $\mathcal{K}am$, tzn. je formule $\mathcal{K}am(s_1, s_2) \to \mathcal{K}am(s_2, s_1)$ pravdivá při každém ohodnocení? Je pravdivá symetrie predikátu $\succ$?

V následujícím příkladu budeme uvažovat dvě formule, ve kterých se vyskytuje funkce a ve třetím příkladu připustíme dokonce druh proměnných, jenž není univerzální.

Příklad 3. Formule „V každé třídě je nejstarším studentem žena.“, v symbolech $(\forall s)\neg\mathcal{M}u\check{z}(\mathfrak{F}(s))$ nemá volné proměnné, nezávisí proto na volbě ohodnocení, přesto však je vhodné zkoumat nejprve pravdivost formule $\neg\mathcal{M}u\check{z}(\mathfrak{F}(s))$, která má volnou proměnnou s, a to při všech možných ohodnoceních. Ať ohodnocení přiřazuje proměnné s jakékoli individuum, je term $\mathfrak{F}(s)$ vždy realizován individuem $\mathfrak{a}_{10}$, protože funkce $\mathfrak{F}_{\mathbb{S}}$ nabývá jediné hodnoty, pročež při každém ohodnocení je formule $\mathcal{M}u\check{z}(\mathfrak{F}(s))$ pravdivá (bod (1)), formule $\neg\mathcal{M}u\check{z}(\mathfrak{F}(s))$ je nepravdivá (viz bod (3)), takže formule $(\forall s)\neg\mathcal{M}u\check{z}(\mathfrak{F}(s))$ je nepravdivá v myslitelné škole $\mathbb{S}$ při libovolném ohodnocení (viz bod (5); zápis: $\mathbb{S} \models \neg(\forall s)\neg\mathcal{M}u\check{z}(\mathfrak{F}(s))$).

Formule $(\forall s_1, s_2)(\mathfrak{F}(s_1) = \mathfrak{F}(s_2))$ opět nemá volné proměnné, nezávisí proto na volbě ohodnocení, přesto však zkoumejme nejdříve při všech možných ohodnoceních pravdivost formule $\mathfrak{F}(s_1) = \mathfrak{F}(s_2)$, která má dvě volné proměnné s_1, s_2. Ať ohodnocení přiřazuje proměnným s_1, s_2 jakákoli individua, jsou termy $\mathfrak{F}(s_1)$, $\mathfrak{F}(s_2)$ vždy realizovány individuem $\mathfrak{a}_{10}$, pročež při každém ohodnocení je formule

---

se dvěma volnými proměnnými s_1 a s_2. Při jakémkoli ohodnocení, jež přiřazuje proměnným s_1 a s_2 po řadě individua (například) $\mathfrak{a}_9$ a $\mathfrak{a}_{10}$, je formule (vi) nepravdivá podle bodů (1)–(4), protože všechny tři antecedenty jsou pravdivé a konsekvent je nepravdivý. Takže při jakémkoli ohodnocení přiřazujícím proměnné s_1 individuum $\mathfrak{a}_9$ je formule

$$(\forall s_2)\big(\mathcal{M}u\check{z}(s_1) \to [\mathcal{M}u\check{z}(s_2) \to (s_1 \neq s_2 \to \mathcal{K}am(s_1, s_2))]\big)$$

nepravdivá (podle bodu (5)) a používajíce znovu týž bod nahlédneme nepravdivost formule (v) při každém ohodnocení.

Druhé tvrzení můžeme zapsat formulí $(\forall s_1, s_2)[\neg\mathcal{M}u\check{z}(s_1) \to (\mathcal{M}u\check{z}(s_2) \to s_2 \succ s_1)]$. Antecedenty jsou pravdivé pouze při těch ohodnoceních, jež nabývají pro s_1 hodnotu $\mathfrak{a}_i$, kde $i = 1, \ldots, 4$ a pro s_2 hodnotu $\mathfrak{a}_j$, kde $j = 5, \ldots, 10$. Při těchto ohodnoceních je formule $s_2 \succ s_1$ pravdivá, takže celé druhé tvrzení je pravdivé ve struktuře $\mathbb{S}$ (při libovolném ohodnocení).

u17) Podle úlohy 15 je formule $\mathcal{K}am(\mathfrak{nejststud}, s)$ pravdivá při každém ohodnocení, jež přiřazuje proměnné s individuum $\mathfrak{a}_i$ pro $i = 1, 2, 3, 5$ a je nepravdivá při každém ohodnocení přiřazujícím proměnné s individuum $\mathfrak{a}_i$ pro $i = 4, 6, \ldots, 10$. Následně je ve struktuře $\mathbb{S}$ při každém ohodnocení nepravdivá jak formule $(\forall s)\neg\mathcal{K}am(\mathfrak{nejststud}, s)$, tak také formule $(\forall s)\mathcal{K}am(\mathfrak{nejststud}, s)$.

Predikát $\mathcal{K}am$ je symetrický, protože pro každé kladné i, j menší nebo rovno 10 je dvojice individuí $\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j$ prvkem množiny $\mathcal{K}am_{\mathbb{S}}$, právě když je prvkem této množiny dvojice individuí $\mathfrak{a}_j, \mathfrak{a}_i$, tj. táž dvojice, avšak v obráceném pořadí. Predikát $\succ$ ve struktuře $\mathbb{S}$ symetrický není.

$\mathfrak{F}(s_1) = \mathfrak{F}(s_2)$ pravdivá (bod (2)), takže formule $(\forall s_1, s_2)(\mathfrak{F}(s_1) = \mathfrak{F}(s_2))$ je pravdivá v myslitelné škole $\mathbb{S}$ při libovolném ohodnocení proměnných (viz bod (5)).

(Vzhledem k úmyslu, aby hodnota $\mathfrak{F}(s_i)$ popisovala nejstaršího žáka třídy, kterou navštěvuje student s_i, musí být naše škola jednotřídkou — proč se tato jediná třída navštěvovaná Janem jmenuje 3.B, se můžete zajímat při první vhodné příležitosti.)

Úloha 18. Jaký je význam formule $(\forall s)\neg\mathcal{K}am(s, \mathfrak{F}(s))$? Je uvedená formule pravdivá ve struktuře $\mathbb{S}$ při každém ohodnocení?

Příklad 4. Zkoumejme, zda ve struktuře $\mathbb{S}$ je pravdivá formule „Každý upovídaný student je ženou.“, v symbolech $(\forall u)\neg\mathcal{M}u\check{z}(u)$.

Již víme (podle definice množiny $\mathcal{M}u\check{z}_{\mathbb{S}}$ realizující predikát $\mathcal{M}u\check{z}$ a v důsledku bodů (1) a (3)), že při ohodnoceních, která přiřazují proměnné u některé z individuí $\mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4$, je formule $\neg\mathcal{M}u\check{z}(u)$ pravdivá a pro každé ohodnocení přiřazující proměnné u individuum $\mathfrak{a}_5$ je zkoumaná formule nepravdivá. „Student-muž Jan ze 3.B“ je pokládán za upovídaného (matematičtěji: $\mathfrak{a}_6$ je prvkem jak množiny $u_{\mathbb{S}}$, tak také množiny $\mathcal{M}u\check{z}_{\mathbb{S}}$), a proto podle bodu (5) není formule $(\forall u)\neg\mathcal{M}u\check{z}(u)$ pravdivá ve struktuře $\mathbb{S}$.

Úloha 19. Zapište formulemi tvrzení „Každí dva různí upovídaní studenti spolu kamarádí.“ a „Každý upovídaný student kamarádí s nejstarším studentem ve své třídě.“. Jsou tato tvrzení pravdivá ve struktuře $\mathbb{S}$ při každém ohodnocení?

Nyní budeme matematicky přesně definovat, kdy je **formule φ pravdivá ve struktuře $\mathbb{M}$ při** daném **ohodnocení.** Pravdivost[21)] formule definujeme rekurzí podle složitosti formule (v bodech (1) a (2) popisujeme pravdivost základních formulí, v dalších třech bodech se zabýváme pravdivostí formulí vzniklých logickými operacemi). V definici předpokládáme, že $\mathbb{M}$ je struktura pro

[u18)] Zapsaná formule vyjadřuje výrok „Žádný student se nekamarádí s nejstarším studentem ve své třídě.“ a je ve struktuře $\mathbb{S}$ pravdivá při každém ohodnocení.

[u19)] Jako první vyšetřeme pravdivost formule $(\forall u_1, u_2)(u_1 \neq u_2 \rightarrow \mathcal{K}am(u_1, u_2))$. Protože dvojice kterýchkoli dvou různých individuí z tříprvkové množiny $\{\mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_5\}$ je v množině $\mathcal{K}am_{\mathbb{S}}$, je formule $\mathcal{K}am(u_1, u_2)$ pravdivá při každém ohodnocení, (neboť jakékoli ohodnocení přiřazuje proměnným u_1, u_2 výhradně prvky množiny $\{\mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4, \mathfrak{a}_5\}$). Takže formule $(\forall u_1, u_2)(u_1 \neq u_2 \rightarrow \mathcal{K}am(u_1, u_2)$ je pravdivá ve struktuře $\mathbb{S}$ (viz bod (5)) při každém ohodnocení.
Druhé tvrzení můžeme vyjádřit pomocí formule $(\forall u)\mathcal{K}am(u, \mathfrak{F}(u))$. Jakékoli ohodnocení přiřazuje proměnné u některé z individuí $\mathfrak{a}_i$ pro $i = 3, 4, 5$ a term $\mathfrak{F}(u)$ je ve struktuře $\mathbb{S}$ vždy realizován individuem $\mathfrak{a}_{10}$. Zkoumané tvrzení je ve struktuře $\mathbb{S}$ nepravdivé při každém ohodnocení.

[21)] Pojetí pravdivosti formule ve struktuře navrhl Alfred Tarski v článku [T2]. Místo φ „je pravdivá ve struktuře při ohodnocení“ se používá také „je splněna ve struktuře při ohodnocení“, nebo „ohodnocení splňuje ve struktuře formuli“.

nějaký jazyk $\mathbf{L}$, formule $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ je formulí tohoto jazyka $\mathbf{L}$ (a ve formuli φ jsou všechny volné proměnné mezi proměnnými $x_1, \ldots, x_n$) a že zkoumané ohodnocení přiřazuje proměnným $x_1, \ldots, x_n$ po řadě individua $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ struktury $\mathbb{M}$. Pravdivost formule φ ve struktuře $\mathbb{M}$ při našem ohodnocení budeme značit $\mathbb{M} \models \varphi[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]$[22].

Pravdivost *základní* formule φ ve struktuře $\mathbb{M}$ při daném ohodnocení popisují následující dva body.

(1) Nechť $\mathcal{P}$ označuje k-ární predikát (různý od rovnosti), který je realizován ve struktuře $\mathbb{M}$ množinou $\mathcal{P}_{\mathbb{M}}$ uspořádaných k-tic individuí. Nechť $t_1, \ldots, t_k$ jsou termy jazyka $\mathbf{L}$, které jsou ve struktuře $\mathbb{M}$ realizovány po řadě individui $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k$. Základní formuli $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ tvaru[23] $\mathcal{P}(t_1, \ldots, t_k)$ jazyka $\mathbf{L}$ prohlásíme za pravdivou ve struktuře $\mathbb{M}$ při našem ohodnocení (znak $\mathbb{M} \models \mathcal{P}(t_1, \ldots, t_k)[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]$), právě když k-tice individuí $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k$ je prvkem množiny $\mathcal{P}_{\mathbb{M}}$.

(2) Jediným tvarem základních formulí nepopsaných předchozím bodem jsou formule tvaru $t_1 = t_2$, kde t_1, t_2 jsou termy jazyka $\mathbf{L}$. Nechť t_1, t_2 jsou ve struktuře $\mathbb{M}$ realizovány po řadě individui $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$. Nyní zopakujeme předchozí bod s tou výjimkou, že realizace rovnosti je v každé struktuře skutečná rovnost: základní formuli φ tvaru $t_1 = t_2$ jazyka $\mathbf{L}$ prohlásíme za pravdivou ve struktuře $\mathbb{M}$ při zkoumaném ohodnocení (znak $\mathbb{M} \models t_1 = t_2[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]$), právě když individua $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ realizující termy t_1 a t_2 jsou si rovna (tj. právě když $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2$).

V předchozích dvou bodech jsme se zabývali pravdivostí základních formulí jazyka $\mathbf{L}$, v bodech následujících budeme popisovat pravdivost složitějších formulí. Z rozboru minimalizace tvorby formulí, kterou jsme se důkladně zabývali zejména v první kapitole, víme, že se při rekurzi můžeme omezit na vznik formule třemi způsoby: negací, implikací a univerzální kvantifikací. Proto následují tři body popisující po řadě pravdivost formulí vzniklých těmito způsoby. Následně je možno formulovat, kdy je ve struktuře pravdivá při daném ohodnocení konjunkce, disjunkce, ekvivalence a existenční kvantifikace; tato tvrzení jsou po řadě obsahem čtvrtého příkladu, cvičení II-2.14 a II-2.15 a úlohy 20. Ideou je, že formule vzniklá pomocí nějaké logické operace ze zadaných formulí je pravdivá ve struktuře, „jestliže ve skutečnosti je pravdivé tvrzení vzniklé toutéž operací z výpovědí o pravdivosti těchto zadaných formulí“. Pro pochopení, co je míněno v uvozovkách, jsou v následující definici vyznačena určitá slova kurzívou — povšimněte

[22] Naše značení naznačuje, že pro pravdivost formule ve struktuře je podstatné pouze jakých hodnot nabývá ohodnocení na volných proměnných formule; tento fakt si můžete ověřit evidentní rekurzí podle složitosti formule.

[23] V jednom termu se může vyskytovat mnoho proměnných (pokud se v něm vyskytují vícečetné funkce), nebo naopak žádná (pokud se jedná o konstantu). Obecně tedy nemusí být žádný vztah mezi velikostí čísel n a k.

si, že odpovídají logické operaci, o níž pojednáváme.

(3) Nechť pro formuli $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ jazyka $\mathbf{L}$ je již její pravdivost ve struktuře $\mathbb{M}$ při zkoumaném ohodnocení popsána. Pak formuli $\neg\varphi$ prohlásíme za pravdivou, právě když formule φ *není* pravdivá ve struktuře $\mathbb{M}$ při našem ohodnocení (neboli v symbolech $\mathbb{M} \models \neg\varphi[\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n]$, právě když *není* $\mathbb{M} \models \varphi[\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n]$).

(4) Nechť pro formule $\varphi(x_1, \ldots, x_n), \psi(x_1, \ldots, x_n)$ jazyka $\mathbf{L}$ již je definována jejich pravdivost ve struktuře $\mathbb{M}$ při uvažovaném ohodnocení. Pak formuli $(\varphi \to \psi)(x_1, \ldots, x_n)$ prohlásíme za pravdivou, právě když pravdivost formule φ *implikuje* pravdivost formule ψ ve struktuře $\mathbb{M}$ při tomto ohodnocení (neboli v symbolech $\mathbb{M} \models (\varphi \to \psi)[\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n]$, právě když $\mathbb{M} \models \varphi[\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n]$ *implikuje* $\mathbb{M} \models \psi[\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n]$).

Teď je na řadě zkoumání pravdivosti formule vzniklé univerzální kvantifikací. V obecném případě nemusí být kvantifikovaná (řekněme i-tá) proměnná univerzálního druhu, máme tedy zkoumat pravdivost formule tvaru $(\forall u_i)\varphi$. Takže obecně musíme připustit, že se ve formuli φ vyskytují i proměnné druhů, které nejsou univerzální. Zdánlivě jsme učinili chybu, že jsme dosud nevyšetřovali definici pravdivosti dost obecně, protože až dosud jsme ve formuli φ připouštěli jen proměnné x_i, tj. univerzálního druhu. Nedopustili jsme se však žádného pochybení, protože definice pro *univerzální* druh je aplikovatelná na jakékoli proměnné. Jediný rozdíl je, že pro proměnné jiného než univerzálního druhu máme navíc omezení na pojem ohodnocení — hodnota ohodnocení na proměnných neuniverzálního druhu u musí být prvkem množiny $u_{\mathbb{M}}$ realizující uvažovaný druh u ($u_{\mathbb{M}}$ je podmnožinou univerza struktury M). Pro pohodlí čtenáře podáme na konci definice pravdivosti formule vzniklé kvantifikací její zjednodušení pro případ kvantifikace proměnné univerzálního druhu proměnných (plynoucí z toho, že realizací univerzálního druhu je celé univerzum struktury).

(5) Nechť pro formuli $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ jazyka $\mathbf{L}$ je již popsána její pravdivost ve struktuře $\mathbb{M}$ při *každém* ohodnocení a nechť formule $\varphi(x_i/u)$ vznikne z formule φ nahrazením (univerzální) proměnné x_i proměnnou u (ne nutně univerzálního druhu). Nyní k rozhodnutí o pravdivosti formule[24] $(\forall u)\varphi(x_i/u)$ nepostačuje zkoumat pravdivost formule φ při zkoumaném ohodnocení, budeme potřebovat znát pravdivost této formule při všech ohodnoceních, která se od námi uvažovaného liší nejvýše v bodě u: formuli $(\forall u)\varphi(x_i/u)$ prohlásíme za pravdivou při daném ohodnocení, právě když je formule φ pravdivá ve struktuře $\mathbb{M}$ při *každém* ohodnocení, které se liší od uvažovaného nanejvýše v bodě u

[24] Ve formuli $(\forall u)\varphi(x_i/u)$ *není* proměnná u volná, proto můžeme tuto formuli chápat jako formuli, v níž jsou volné proměnné nanejvýš proměnné $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$.

(neboli v symbolech: $\mathbb{M} \models \big((\forall u)\varphi(x_i/u)\big)[\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{i-1}, \mathfrak{a}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{a}_n]$, právě když *pro každé individuum* $\mathfrak{a}$*, které je*[25] *prvkem realizace* $u_{\mathbb{M}}$ *druhu* u, je $\mathbb{M} \models \varphi[\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{i-1}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{a}_n]$).
Speciálně formuli $(\forall x_i)\varphi$ vzniklou kvantifikací univerzální proměnné prohlásíme za pravdivou, právě když *pro každé individuum* $\mathfrak{a}$ jest $\mathbb{M} \models \varphi[\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{i-1}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{a}_n]$.

Není-li formule pravdivá při nějakém ohodnocení, říkáme (pochopitelně), že je při tomto ohodnocení **nepravdivá.** Jestliže φ je pravdivá v $\mathbb{M}$ při *každém* ohodnocení, pak říkáme, že φ **je splněna** (znak $\mathbb{M} \models \varphi$)[26].

Ještě jednou zdůrazněme, že z pravdivosti formule φ při pevně zadaném ohodnocení, *neplyne* pravdivost formule $(\forall u)\varphi$ při tomto ohodnocení, k zaručení pravdivosti formule $(\forall u)\varphi$ ve struktuře $\mathbb{M}$ potřebujeme pravdivost formule φ při *všech* ohodnoceních, jež se liší od zadaného nanejvýš v bodě u.

Uvědomme si, že podle definice nemůže být v jedné struktuře při daném ohodnocení pravdivá jak formule φ, tak také formule $\neg\varphi$.

Příklad 5. Ukážeme, že formule $\varphi \ \& \ \psi$ je při daném ohodnocení pravdivá ve struktuře, právě když při tomto ohodnocení je ve struktuře pravdivá formule φ *a současně* také formule ψ.

Konjunkci $\varphi \ \& \ \psi$ můžeme pomocí negace a implikace vyjádřit pomocí $\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$ (viz §2 první kapitoly). Takže formule $\varphi \ \& \ \psi$ je pravdivá ve struktuře při daném ohodnocení, právě když není pravda, že pravdivost φ implikuje nepravdivost ψ, což nastane přesně tehdy, když současně je ve struktuře pravdivá jak formule φ, tak také formule ψ.

Úloha 20. Prokažte, že formule $(\exists u)\varphi$ je při daném ohodnocení pravdivá ve struktuře, právě když *existuje* ohodnocení, které se od zadaného liší nanejvýše v bodě u a při kterém je formule φ pravdivá ve struktuře. Potřeboval jste předpoklad, že proměnná u je volná ve formuli φ? Návod: Formuli $(\exists u)\varphi$ chápejte jako formuli $\neg(\forall u)\neg\varphi$; bod (5) předchozí definice aplikujte na formuli $\neg\varphi$.

Příklad 6. Formuli jazyka **Ls**

$$(vii) \qquad (\exists x_1)[\mathcal{M}u\check{z}(x_1) \ \& \ (\forall x_2)(\neg\mathcal{M}u\check{z}(x_2) \rightarrow \mathcal{K}am(x_1, x_2))].$$

[25] Připomeňme ještě jednou, že ohodnocení musí na proměnné druhu u nabývat hodnotu v množině $u_{\mathbb{M}}$.

[26] Místo „formule je splněna ve struktuře“ používají někteří autoři „*formule platí ve struktuře*“ nebo „*formule je pravdivá ve struktuře*“. Terminologie až neobvykle kolísá, místo naší dvojice pravdivá-splněna se v různých českých textech používají pojmy pravdivá, platná, splněná v nejrůznějších kombinacích.

[u20] Formule $(\exists u)\varphi$ je při daném ohodnocení pravdivá ve struktuře, právě když neplatí, že při každém ohodnocení, které se od zadaného liší nanejvýše v bodě u, není pravdivá formule φ. To je však totéž jako existence ohodnocení lišícího se od zadaného nanejvýš v bodě u, při kterém je formule φ pravdivá ve zkoumané struktuře. Volnost výskytu proměnné u není třeba.

lze v naší škole číst „Existuje student-muž, který se kamarádí se všemi studentkami.“. Ohodnotíme-li proměnnou x_1 individuem $\mathfrak{a}_5$ a proměnnou x_2 jakýmkoli individuem $\mathfrak{a}_j$ pro j menší než 5, je formule $\mathcal{K}am(x_1, x_2)$ pravdivá, neboť pro kterékoli individuum $\mathfrak{a}_j$ z množiny individuí $\{\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_4\}$ je dvojice $\mathfrak{a}_5, \mathfrak{a}_j$ v množině $\mathcal{K}am_{\mathbb{S}}$. Formule $\neg\mathcal{M}u\check{z}(x_2)$ je pravdivá přesně při těch ohodnoceních, která nabývají pro proměnnou x_2 některou z hodnot $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_4$. Formule $\neg\mathcal{M}u\check{z}(x_2) \rightarrow \mathcal{K}am(x_1, x_2)$ je tudíž pravdivá při každém ohodnocení přiřazujícím proměnné x_1 individuum $\mathfrak{a}_5$ (viz bod (4)): jestliže ohodnocení přiřazuje proměnné x_2 některé z individuí $\mathfrak{a}_5, \dots, \mathfrak{a}_{10}$, není pravdivý antecedent a přiřazuje-li ohodnocení proměnné x_1 některé z individuí $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_4$, je pravdivý konsekvent. V důsledku předchozího rozboru je formule $(\forall x_2)(\neg\mathcal{M}u\check{z}(x_2) \rightarrow \mathcal{K}am(x_1, x_2))$ pravdivá při jakémkoli ohodnocení přiřazujícím proměnné x_1 individuum $\mathfrak{a}_5$ (viz bod (5)). Nadto při ohodnocení přiřazujícím proměnné x_1 individuum $\mathfrak{a}_5$ je pravdivá i formule $\mathcal{M}u\check{z}(x_1)$ (viz bod (1)), pročež je pravdivá při takovémto ohodnocení i formule $\mathcal{M}u\check{z}(x_1)$ & $(\forall x_2)(\neg\mathcal{M}u\check{z}(x_2) \rightarrow \mathcal{K}am(x_1, x_2))$ (viz příklad 5), takže formule (*vii*) je splněna ve struktuře $\mathbb{S}$ (viz úlohu 20). Ve struktuře $\mathbb{S}$ jsme ukázali dokonce pravdivost formule

$$\mathcal{M}u\check{z}(\mathfrak{Jan}3\mathrm{B}) \mathbin{\&} (\forall x_2)(\neg\mathcal{M}u\check{z}(x_2) \rightarrow \mathcal{K}am(\mathfrak{Jan}3\mathrm{B}, x_2)),$$

jejímž důsledkem je formule (*vii*).

Úloha 21. Zapište formulemi jazyka **Ls** tvrzení „Existuje studentka, která se kamarádí se všemi studenty-muži.“ a „Existuje upovídaná studentka, která se kamarádí se všemi upovídanými studenty-muži.“. Rozhodněte zda tyto formule jsou splněny ve struktuře $\mathbb{S}$.

Druhé tvrzení můžeme vyjádřit např. pomocí formule

$$(vii') \qquad (\exists u_1)[\neg\mathcal{M}u\check{z}(u_1) \mathbin{\&} (\forall u_2)(\mathcal{M}u\check{z}(u_2) \rightarrow \mathcal{K}am(u_1, u_2))].$$

Každé ohodnocení, pro které je pravdivé $\mathcal{M}u\check{z}(u_2)$, musí přiřazovat proměnné u_2 individuum $\mathfrak{a}_5$ (neboť individuum $\mathfrak{a}_5$ je jediný prvek společný jak realizaci druhu proměnných u, tak také množině $\mathcal{M}u\check{z}_{\mathbb{S}}$). Potřebujeme tudíž nalézt „upovídanou studentku“, která se kamarádí se „studentem“ $\mathfrak{a}_5$. Jako příklad hledaného objektu může sloužit individuum $\mathfrak{a}_4$.

Úloha 22. Vyjádřete formulemi jazyka **Ls** tvrzení „Existují dva studenti-muži, kteří spolu kamarádí.“, „Existují dvě upovídané studentky, které spolu

---

u21) První tvrzení můžeme zapsat např. formulí

$$(viii) \qquad (\exists x_1)[\neg\mathcal{M}u\check{z}(x_1) \mathbin{\&} (\forall x_2)(\mathcal{M}u\check{z}(x_2) \rightarrow \mathcal{K}am(x_1, x_2))].$$

Formule $\mathcal{M}u\check{z}(x_2)$ je pravdivá přesně při těch ohodnoceních, jež proměnné x_2 přiřazují některé z individuí $\mathfrak{a}_5, \dots, \mathfrak{a}_{10}$. Protože neexistuje individuum $\mathfrak{a}_i$ takové, že každá dvojice $\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j$ pro $j = 5, \dots, 10$ je prvkem množiny $\mathcal{K}am_{\mathbb{S}}$, musí být při každém ohodnocení formule $(\forall x_2)(\mathcal{M}u\check{z}(x_2) \rightarrow \mathcal{K}am(x_1, x_2))$ nepravdivá, pročež formule (*viii*) není splněna ve struktuře $\mathbb{S}$.

kamarádí.“, „Existuje student-muž, který kamarádí alespoň se dvěma studentkami.“, „Existuje studentka, která kamarádí alespoň se dvěma studenty-muži.“ a zkoumejte, které z těchto formulí jsou splněny ve struktuře $\mathbb{S}$.

Pro následující tři úlohy uvažujme jednu z nejjednodušších možných struktur (a nazvěme ji $\mathbb{P}$): její univerzum budiž dvoubodová množina $\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\}$, budiž to struktura pro jazyk s jediným unárním predikátem $\mathcal{P}$ a znak $\mathcal{P}$ budiž realizován jednoprvkovou množinou $\{\mathfrak{a}\}$. (Podle dohod o jazyku je možno při vytváření formulí zkoumaného jazyka používat také rovnost.) Na výsledky úlohy 25 jsme již odkazovali v předchozím textu, výsledky úloh 23 a 24 uplatníme ve třetím paragrafu.

Úloha 23. Ukažte, že při žádném ohodnocení přiřazujícím proměnné x individuum $\mathfrak{a}$ není ve struktuře $\mathbb{P}$ pravdivá formule

$$\mathcal{P}(x) \rightarrow (\forall x)\mathcal{P}(x) \tag{ix}$$

a při žádném ohodnocení přiřazujícím proměnné x individuum $\mathfrak{b}$ není ve struktuře $\mathbb{P}$ pravdivá formule $\neg\mathcal{P}(x) \rightarrow (\forall x)\neg\mathcal{P}(x)$.

Úloha 24. Rozhodněte, zda je ve struktuře $\mathbb{P}$ splněna některá z formulí $(\forall x)(\mathcal{P}(x) \vee \neg\mathcal{P}(x))$, $(\forall x)\mathcal{P}(x) \vee (\forall x)\neg\mathcal{P}(x)$ a $(\forall x)\mathcal{P}(x)$ & $(\forall x)\neg\mathcal{P}(x)$. Pokud některá z formulí není splněna v naší struktuře, pokuste se sestrojit jinou strukturu se stejným univerzem, v níž je splněna.

[u22)] Formule $(\exists x_1, x_2)(\mathcal{M}u\check{z}(x_1)\ \&\ \mathcal{M}u\check{z}(x_2)\ \&\ x_1 \neq x_2\ \&\ \mathcal{K}am(x_1, x_2))$ není ve zkoumané struktuře splněna, avšak formule

$$(\exists u_1, u_2)(\neg\mathcal{M}u\check{z}(u_1)\ \&\ \neg\mathcal{M}u\check{z}(u_2)\ \&\ u_1 \neq u_2\ \&\ \mathcal{K}am(u_1, u_2))$$

splněna je (jako příklad mohou posloužit „upovídané studentky“ $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_4$). Formule

$$(\exists x_1, x_2, x_3)(\mathcal{M}u\check{z}(x_1)\ \&\ \neg\mathcal{M}u\check{z}(x_2)\ \&\ \neg\mathcal{M}u\check{z}(x_3)\ \&\ x_2 \neq x_3\ \&\ \mathcal{K}am(x_1, x_2)\ \&\ \mathcal{K}am(x_1, x_3))$$

je splněna ve struktuře $\mathbb{S}$, naproti tomu v téže struktuře není splněna formule

$$(\exists x_1, x_2, x_3)(\neg\mathcal{M}u\check{z}(x_1)\ \&\ \mathcal{M}u\check{z}(x_2)\ \&\ \mathcal{M}u\check{z}(x_3)\ \&\ x_2 \neq x_3\ \&\ \mathcal{K}am(x_1, x_2)\ \&\ \mathcal{K}am(x_1, x_3)).$$

[u23)] Při žádném ohodnocení přiřazujícím proměnné x individuum $\mathfrak{b}$ není ve struktuře $\mathbb{P}$ pravdivá formule $\mathcal{P}(x)$, takže ve struktuře není splněna formule $(\forall x)\mathcal{P}(x)$. Uvědomme si, že posledně uvedená formule je uzavřená, pročež její pravdivost nezávisí na volbě ohodnocení. Formule (ix) je nepravdivá při jakémkoli ohodnocení, jež přiřazuje proměnné x individuum $\mathfrak{a}$, protože při takovémto ohodnocení je formule $\mathcal{P}(x)$ pravdivá a formule $(\forall x)\mathcal{P}(x)$ nepravdivá.

[u24)] Formule $\mathcal{P}(x) \vee \neg\mathcal{P}(x)$ je pravdivá při každém ohodnocení (a dokonce v každé struktuře pro jazyk obsahující unární predikát $\mathcal{P}$), takže první formule je splněna.
Formule $\mathcal{P}(x)$ není pravdivá při žádném ohodnocení ve struktuře $\mathbb{P}$, při kterém proměnné x je přiřazeno individuum $\mathfrak{b}$, pročež formule $(\forall x)\mathcal{P}(x)$ není splněna ve struktuře $\mathbb{P}$; zcela analogicky formule $\neg\mathcal{P}(x)$ není pravdivá při žádném ohodnocení, při němž proměnné x je přiřazeno individuum $\mathfrak{a}$, takže ani formule $(\forall x)\neg\mathcal{P}(x)$ není splněna. Shrneme-li předešlé, vidíme, že druhá formule není splněna ve struktuře $\mathbb{P}$. Pokud bychom však realizovali $\mathcal{P}$ množinou $\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\}$, byla by splněna formule $(\forall x)\mathcal{P}(x)$ a následně také druhá formule naší

Úloha 25. Jsou formule $(\forall x)(\exists y)(x = y)$ a $(\exists y)(\forall x)(x = y)$ splněny ve struktuře $\mathbb{P}$? Pokud některá z nich splněna není, pokuste se sestrojit strukturu, v níž je splněna.

* * *

Jsou-li $x_1, \ldots, x_n$ právě všechny proměnné, které mají volné výskyty ve formuli φ, pak formuli $(\forall x_1, \ldots, x_n)\varphi$ nazýváme **(univerzálním) uzávěrem** formule φ.

Nechť právě dvě proměnné x, y mají volné výskyty ve formuli φ. Pak formule φ má přesně dva uzávěry, totiž formule $(\forall x)(\forall y)\varphi$ a $(\forall y)(\forall x)\varphi$. Zabývejme se srovnáním vlastností formule φ a těchto uzávěrů. Předpokládejme, že $\mathbb{M}$ je struktura pro jazyk, ve kterém je formulovatelná formule φ.

První — jednoduchá — otázka zní: Je ve struktuře $\mathbb{M}$ splněna formule φ, právě když je v ní splněn její uzávěr? — Už znáte odpověď? — Formule φ je splněna ve struktuře $\mathbb{M}$, právě když při každém ohodnocení je pravdivá, a to podle definice pravdivosti formule vzniklé univerzální kvantifikací nastane přesně tehdy, když je splněn uzávěr formule φ; odpověď tedy zní „ano“. Druhá otázka: je splněn jeden uzávěr právě když je splněn druhý? Odpověď „ano“ je důsledkem předchozí úvahy. Otázky s trochu složitějšími odpověďmi formulujme jako úlohy, počet proměnných s volnými výskyty ve formuli φ již nepředpisujme.

Úloha 26. Nechť formule φ je formulí jazyka teorie $\boldsymbol{T}$. Ukažte, že formule φ je dokazatelná v teorii $\boldsymbol{T}$, právě když je v $\boldsymbol{T}$ dokazatelná formule $(\forall x)\varphi$; v symbolech $\boldsymbol{T} \vdash \varphi$, právě když $\boldsymbol{T} \vdash (\forall x)\varphi$. Vyvoďte, že formule je dokazatelná v teorii $\boldsymbol{T}$, právě když je dokazatelný její uzávěr (tento jednoduchý výsledek bývá označován jako věta o uzávěru).

úlohy.

Ke splnění třetí formule by musel být znak $\mathcal{P}$ realizován celým univerzem (aby byla splněna formule $(\forall x)\mathcal{P}(x)$) a současně prázdnou množinou (aby byla splněna formule $(\forall x)\neg\mathcal{P}(x)$). To však nemůže nastat pro žádnou strukturu, neboť univerzum jakékoli struktury musí být neprázdné podle definice.

u25) Formule $x = y$ je pravdivá při každém ohodnocení, které přiřazuje proměnným x, y totéž individuum, tudíž první formule je splněna v každé struktuře. Při žádném ohodnocení ve struktuře $\mathbb{P}$, pro které jsou hodnoty přiřazené proměnným x, y různé, není pravdivá formule $x = y$. Následně není formule $(\forall x)(x = y)$ pravdivá v $\mathbb{P}$ při žádném ohodnocení, tedy není ve struktuře $\mathbb{P}$ splněna ani formule $(\exists y)(\forall x)(x = y)$. Zkoumaná formule je však splněna v každé struktuře, jejíž univerzum se skládá z jediného prvku.

u26) Zleva doprava: K důkazu formule φ v teorii $\boldsymbol{T}$ stačí přidat jako další člen formuli $(\forall x)\varphi$. Získáme tak důkaz v teorii $\boldsymbol{T}$, protože prodloužení odůvodníme generalizací. Zprava doleva: K důkazu formule $(\forall x)\varphi$ v teorii $\boldsymbol{T}$ stačí přidat jako další dva členy formuli $(\forall x)\varphi \to \varphi$ (specifikace; do φ substituujeme x za x) a φ (modus ponens). Uvedené vyvozovací principy odůvodňují, že získáme důkaz formule φ v teorii $\boldsymbol{T}$. Tvrzení o uzávěru prokážeme z předchozího výsledku indukcí podle počtu proměnných, které mají ve formuli φ volný výskyt.

Úloha 27. Určete, zda je ve struktuře $\mathbb{P}$ splněna formule $\mathcal{P}(x) \equiv (\forall x)\mathcal{P}(x)$.

Úloha 28. Ukažte, že v teoriích $\boldsymbol{T}, \varphi$ a $\boldsymbol{T}, (\forall x)\varphi$ dokážeme tytéž formule.

Nahlédli jsme, že v řadě případů se formule a její uzávěr chovají podobně, v jiných případech nikoli. Další příklady rozdílného chování přinesou některá dodatečná odvozovací pravidla. V důsledku úlohy 28 je možné si vždy představit, že všechny axiomy jsou uzavřené formule, pro aplikace dodatečných odvozovacích pravidel (viz dále) je to dokonce vhodné.

* * *

Zamyslíte-li se nyní, zda každá struktura pro jazyk **Ls** je „myslitelná škola", pravděpodobně si namotivujete další pojem sémantiky predikátového počtu – model teorie. Nic nám dosud nebránilo ve struktuře pro jazyk **Ls** realizovat predikát $\mathcal{K}am$ relací, která obsahuje také dvojici individuí, ve které je první prvek roven druhému. To však neodpovídá našemu pojetí pojmu „být kamarády", nepřijímáme totiž, že se někdo „kamarádí" sám se sebou. Takže pojem struktura pro jazyk školy **Ls** nevystihuje naši představu o pojmu „myslitelná škola".

Naše představy o poměrech ve škole můžeme vyjádřit pomocí formulí a ty považovat za axiomy „teorie školy". Myslitelné školy by pak odpovídaly strukturám pro jazyk školy, ve kterých jsou pravdivé všechny axiomy „teorie školy". Při našem úmyslu, aby funkce $\mathfrak{F}$ přiřazovala každému studentovi nejstaršího studenta jeho třídy, bude vhodné přijmout např. formuli $(\forall x)(\mathfrak{F}(\mathfrak{F}(x)) = \mathfrak{F}(x))$ za axiom „teorie školy", protože nejstarším studentem ve třídě, kterou navštěvuje student určený termem $\mathfrak{F}(x)$, je on sám.

Modelem teorie[27] $\boldsymbol{T}$ nazýváme každou strukturu pro jazyk teorie $\boldsymbol{T}$, ve které jsou splněny všechny axiomy teorie $\boldsymbol{T}$. Intuitivně je možno vyjádřit pojem modelu teorie, že je to jakýkoli „myslitelný svět", ve kterém jsou splněny všechny axiomy teorie $\boldsymbol{T}$. Ve výrokovém počtu jsme ukázali, že každá dokazatelná formule je „vždy pravdivá" (je tautologií). V analogii k tomuto výsledku jsme schopni v predikátovém počtu ukázat, že formule dokazatelná v teorii $\boldsymbol{T}$ (při použití našich deseti vyvozovacích principů) je „vždy pravdivá" vzhledem k $\boldsymbol{T}$, tzn. je pravdivá

$^{u27)}$ Podle úlohy 23 víme, že ve struktuře $\mathbb{P}$ při ohodnocení přiřazujícím proměnné x individuum $\boldsymbol{a}$ není pravdivá dokonce už formule $\mathcal{P}(x) \to (\forall x)\mathcal{P}(x)$. Takže při uvedeném ohodnocení nemůže být tím spíše pravdivá formule $\mathcal{P}(x) \equiv (\forall x)\mathcal{P}(x)$. (Naproti tomu formule $(\forall x)\mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x)$ je splněna v každé struktuře.)

$^{u28)}$ V teorii $\boldsymbol{T}, \varphi$ dokážeme formuli $(\forall x)\varphi$ generalizací a v teorii $\boldsymbol{T}, (\forall x)\varphi$ dokážeme formuli φ specifikací (do formule φ substituujeme x za x). Pro důkaz jakékoli formule pak použijeme vhodně princip „vše dokázané lze použít k dokazování".

[27] Smysl definice je vytvořit výrazový prostředek umožňující vyšetřovat *pro danou teorii* její modely. Poznamenejme, že každá struktura je samozřejmě modelem *jakési* teorie, např. teorie, jejíž axiomatický systém se skládá ze všech uzavřených formulí splněných ve struktuře a současně také teorie, jejíž axiomatický systém neobsahuje žádný axiom.

v každém modelu této teorie, a to při každém ohodnocení. Tento výsledek bývá označován jako **korektnost** predikátového počtu.

Stejně jako ve výrokovém počtu však vyvstává otázka, zda našich deset pravidel vyvozování již vystihuje lidské vyvozování *úplně*.

Škála modelů v predikátovém počtu je nesrovnatelně bohatší než v případě výrokového počtu. Přesto vztah sémantiky a syntaxe predikátového počtu je stejně hluboký jako ve výrokovém počtu[28] — v jakékoli teorii $\boldsymbol{T}$ jsou dokazatelné přesně ty formule, jež jsou splněné ve všech modelech teorie $\boldsymbol{T}$.

Ve výrokovém počtu jsme z analogického tvrzení vyvodili dva důsledky. Nyní jsme schopni odůvodnit jen analogii prvního z nich. Pro zdůraznění analogie s výsledkem z §1 kap. I zopakujeme v následujících třech odstavcích téměř doslova některé věty z citovaného paragrafu.

Našich deset principů vyvozování pro predikátový počet v jakékoli teorii $\boldsymbol{T}$ „plně postačí" k dokázání všech žádaných formulí predikátového počtu (tj. všech formulí pravdivých ve všech modelech teorie $\boldsymbol{T}$ při všech ohodnoceních), neboli jakýkoli jiný vyvozovací princip, který je formalizací intuitivně správného vyvozovacího kroku (speciálně tedy i každý dodatečný axiom logiky popisující intuitivně pravdivé tvrzení), je dovoditelný ze zvolených základních vyvozovacích principů.

Vyjádřeme předchozí tvrzení pro predikátový počet ještě jinými slovy. Přidáme-li k námi zvoleným axiomům predikátového počtu a k jediným dvěma odvozovacím pravidlům predikátového počtu jakýkoli další vyvozovací princip, jsou jen dvě možnosti:

(a) Buďto i „důkazy", ve kterých je tento vyvozovací princip povolen, umožní dokázat v libovolné teorii $\boldsymbol{T}$ jen (vždy) pravdivé formule jazyka teorie $\boldsymbol{T}$. Pak však je dodatečný vyvozovací princip zbytečný, neboť tytéž formule je možno dokázat i bez něho.

(b) Nebo se pomocí nějakého „důkazu" povolujícího i dodatečný vyvozovací princip podaří dokázat nějakou formuli teorie $\boldsymbol{T}$, která není (vždy) pravdivá, tzn. pro kterou existuje model teorie $\boldsymbol{T}$, ve kterém není splněna. Pak však je tento vyvozovací princip nepřijatelný. Naší intuici o pojmu dokazatelnosti by přece odporovalo, kdybychom dokázali v teorii $\boldsymbol{T}$ nějakou formuli, která není splněna v některém modelu teorie $\boldsymbol{T}$. Považujeme totiž za absurdní, že by bylo možno dokázat v teorii $\boldsymbol{T}$ nějakou formuli predikátového počtu, která by byla nepravdivá byť jen při jediném ohodnocení v jediném modelu teorie $\boldsymbol{T}$ (neboli vyžadujeme korektnost predikátového počtu).

Tímto pochopitelně opět nezpochybňujeme užitečnost různých jiných vyvozovacích principů. Dodatečné principy mohou totiž velice urychlovat a zpřehledňovat důkazy, a proto za okamžik jich několik nejdůležitějších uvedeme. Tvrdíme

[28] Tvrzení je známé jako **věta o úplnosti** a prokázal ho K. Gödel v článku [G1].

však, že takovéto postupy jsou již nahraditelné pomocí vybraných základních vyvozovacích principů.

Druhým důsledkem věty o úplnosti ve výrokovém počtu byla existence algoritmu, který byl schopen rozhodnout, zda formule výrokového počtu je dokazatelná či nikoli a dokonce bylo možno napsat algoritmus, který k dokazatelným formulím výrokového počtu příslušný důkaz sestrojí. Pro odůvodnění tohoto důsledku bylo rozhodující, že pro zadanou formuli postačilo zkoumat konečně mnoho případů (všech možných ohodnocení výrokových proměnných vyskytujících se v dané formuli výrokového počtu je jen konečně mnoho). Některé teorie v predikátovém počtu však mají velice mnoho modelů[29]. Není tedy možno postupně projít všechny modely takovéto teorie a vyzkoušet, zda je v nich všech splněna jedna určitá formule. Problém, zda existuje algoritmus rozhodující dokazatelnost formule v dané teorii, tudíž zatím necháváme otevřený a podrobně se jím budeme zabývat ve druhém paragrafu třetí kapitoly.

Větu o úplnosti je možno vyslovit v poněkud silnějším tvaru, který pro nás bude důležitý v druhém příkladu §3 kap. III. Pro tuto silnější formulaci je podstatné, že teorie množin umožňuje srovnávání „velikostí" různých typů nekonečna[30]. Minimálním typem nekonečna je nekonečno přirozených čísel[31] a množinám, které mají tento minimální typ nekonečné velikosti říkáme spočetné (jinými slovy: množina je spočetná, je-li možno její prvky indexovat přirozenými čísly).

Zesílení věty o úplnosti (tzv. Löwenheim-Skolemova věta): V jakékoli teorii $\boldsymbol{T}$ jsou dokazatelné přesně ty formule, jež jsou splněné ve všech konečných a *spočetných* modelech teorie $\boldsymbol{T}$ (neboli k rozhodnutí o dokazatelnosti formule v dané teorii postačí „malé" modely, avšak i těch může být hodně).

* * *

Podobně jako ve výrokovém počtu je výhodné formulovat a užívat při důkazech dodatečné vyvozovací principy. Takovéto dodatečné principy opět mají na jedné straně usnadnit důkazy v predikátovém počtu a na straně druhé nemají umožnit dokázání žádného tvrzení, které by nebylo dokazatelné pouze z našich deseti základních vyvozovacích principů predikátového počtu. Některé dodatečné vyvozovací principy predikátového počtu odpovídají dodatečným principům výrokového počtu, jiné jsou specifické pro predikátový počet. Je přirozené nejprve

[29] Pro Peanovu aritmetiku viz tvrzení ku konci třetího paragrafu kap. III.

[30] Množina x má méně nebo stejně prvků jako množina y, existuje-li vzájemně jednoznačné zobrazení množiny x do množiny y — množina studentů má méně nebo stejně prvků jako množina židlí v posluchárně, jestliže si každý student může sednout (tj. každému studentovi je přiřazena právě jedna židle) a žádný student nestojí; nevadí, pokud nějaké židle zbudou.

[31] Každá část množiny přirozených čísel je buďto konečná nebo má již stejně prvků jako celá množina přirozených čísel. Tvrzení vypadá poněkud paradoxně, uvědomme si však, že např. část množiny přirozených čísel tvořená čísly sudými má stejný počet prvků jako celá množina přirozených čísel, stačí přirozenému číslu přiřadit jeho dvojnásobek a dostaneme vzájemně jednoznačné zobrazení množiny všech přirozených čísel na množinu čísel sudých.

shrnout ty dodatečné principy, které korespondují s principy z výrokového počtu; pro první čtyři principy se však budeme muset smířit s tím, že v případě predikátového počtu je třeba přijmout určité omezení — tyto principy bude možno aplikovat pouze na *uzavřené* formule (ve výrokovém počtu jsme dodatečné principy směli aplikovat na jakékoli formule výrokového počtu). Nicméně toto omezení je významné z teoretického hlediska (podstatnost tohoto předpokladu bude diskutována ve třetím paragrafu, a to na základě výsledků úloh 23 a 24 tohoto paragrafu), avšak z pohledu faktického užití je nepodstatné — je totiž přirozené si představovat, že všechny axiomy teorií jsou uzavřené formule (viz úloha 28).

Jestliže φ, ψ jsou *uzavřené* formule predikátového počtu a ϑ je libovolná formule téhož počtu, pak pro ně smíme používat následující čtyři odvozovací pravidla:

Důkaz dedukcí. Jestliže v teorii $\boldsymbol{T}, \varphi$ dokážeme formuli ϑ, pak v samotné teorii $\boldsymbol{T}$ dokážeme implikaci $\varphi \to \vartheta$; v symbolech: je-li $\boldsymbol{T}, \varphi \vdash \vartheta$, je $\boldsymbol{T} \vdash \varphi \to \vartheta$.

Důkaz sporem. Je-li teorie $\boldsymbol{T}, \neg\varphi$ sporná, je formule φ dokazatelná v teorii $\boldsymbol{T}$; v symbolech: jestliže $\boldsymbol{T}, \neg\varphi$ je sporná, jest $\boldsymbol{T} \vdash \varphi$.

Důkaz rozborem případů. Jestliže jak v teorii $\boldsymbol{T}, \varphi$, tak také v teorii $\boldsymbol{T}, \psi$ je dokazatelná formule ϑ, je v teorii $\boldsymbol{T}, \varphi \vee \psi$ dokazatelná formule ϑ; v symbolech: je-li $\boldsymbol{T}, \varphi \vdash \vartheta$ a současně $\boldsymbol{T}, \psi \vdash \vartheta$, je $\boldsymbol{T}, \varphi \vee \psi \vdash \vartheta$.

Důkaz neutrální formulí. Jestliže formuli ϑ dokážeme jak v teorii $\boldsymbol{T}, \varphi$, tak také v teorii $\boldsymbol{T}, \neg\varphi$, je formule ϑ dokazatelná již v teorii $\boldsymbol{T}$ samotné; v symbolech: jestliže $\boldsymbol{T}, \varphi \vdash \vartheta$ a současně $\boldsymbol{T}, \neg\varphi \vdash \vartheta$, je $\boldsymbol{T} \vdash \vartheta$.

Odvozovací pravidla z druhé tabulky §2 můžeme používat bez jakýchkoli omezení i v predikátovém počtu.

Dalším velice přirozeným odvozovacím pravidlem je princip umožňující nahrazovat formule stejného významu. Pravidlo je analogií důkazu ekvivalentním nahrazením ve výrokovém počtu a umožňuje nahrazovat ekvivalentní podformule.

Důkaz ekvivalencí. Nechť libovolná formule φ je částí zápisu formule ϑ, jež je formulí jazyka teorie $\boldsymbol{T}$; formule ψ budiž formulí téhož jazyka. Nechť nahrazením formule φ formulí ψ v zápisu formule ϑ (všude nebo jen někde) vznikne formule ϑ'. Pak v teorii $\boldsymbol{T}$ s dodatečným axiomem $\varphi \equiv \psi$ je dokazatelná ekvivalence $\vartheta \equiv \vartheta'$, v symbolech: $\boldsymbol{T}, \varphi \equiv \psi \vdash \vartheta \equiv \vartheta'$.

V předchozí kapitole jsme snad probrali význam a užití prvních čtyř pravidel dostatečně na to, aby jejich cena byla jasná i pro predikátový počet. Uveďme proto jen tři příklady aplikace sepsaných odvozovacích pravidel, dva z nich (úlohy 29, 31) související s kvantifikací a třetí (úloha 32) dávající do souvislosti dva nejdůležitější pojmy syntaxe — dokazatelnost a spornost. Velice jednoduché užití pátého pravidla ukazuje úloha 30.

Poznamenejme, že každé z prvních čtyř uvedených dodatečných odvozovacích pravidel je jakousi implikací. Pravidla je možno obrátit, např. obrácení důkazu dedukcí je tvrzení: Jestliže v teorii $\boldsymbol{T}$ dokážeme implikaci $\varphi \rightarrow \vartheta$, pak v teorii $\boldsymbol{T}, \varphi$ dokážeme formuli ϑ; v symbolech: je-li $\boldsymbol{T} \vdash \varphi \rightarrow \vartheta$, je $\boldsymbol{T}, \varphi \vdash \vartheta$. Prokázat takováto obrácení je velice snadné, proto odložíme tuto problematiku do cvičení II-2.18–II-2.20, evidentnost obrácení důkazu neutrální formulí byste však měl vidět okamžitě.

Úloha 29. Uvedli jsme, že ve formuli je možno zaměnit pořadí dvou po sobě následujících univerzálních kvantifikací. Prokažte tuto možnost **záměny pořadí univerzálních kvantifikací,** tzn. ukažte, že bez jakýchkoli mimologických axiomů je dokazatelná ekvivalence

$$(\forall x)(\forall y)\varphi \equiv (\forall y)(\forall x)\varphi.$$

Návod: Pro dokázání implikace $(\forall x)(\forall y)\varphi \rightarrow (\forall y)(\forall x)\varphi$ pracujte v teorii s jediným axiomem $(\forall x)(\forall y)\varphi$ a jazykem potřebným pro vybudování formule φ. Užijte dvakrát specifikaci (a modus ponens); poté dvakrát *ve vhodném pořadí* generalizaci. Na závěr stačí aplikovat důkaz dedukcí.

Úloha 30. Dokažte ekvivalenci $(\forall x)\varphi \equiv (\forall x)\neg\neg\varphi$ bez použití mimologických axiomů.

Úloha 31. Ukažte možnost **záměny pořadí existenčních kvantifikací,** tzn. ukažte, že bez jakýchkoli mimologických axiomů je dokazatelná ekvivalence

$$(\exists x)(\exists y)\varphi \equiv (\exists y)(\exists x)\varphi.$$

Návod: Užijte výsledky úloh 29 a 30 a vyjádření existenční kvantifikace pomocí kvantifikace univerzální.

Úloha 32. Prokažte, že *uzavřená* formule φ je dokazatelná v teorii $\boldsymbol{T}$, právě když teorie $\boldsymbol{T}, \neg\varphi$ je sporná. Návod pro prokázání zprava doleva: Formule φ je dokazatelná jak ve sporné teorii $\boldsymbol{T}, \neg\varphi$ (užijte výsledek jedné předchozí úlohy),

---

$^{u29)}$ Pracujte v teorii s jediným axiomem $(\forall x)(\forall y)\varphi$ a s jazykem umožňujícím sestrojení formule φ. Dvojnásobným užitím specifikace (proměnnou x nahrazujeme jí samou a pak proměnnou y opět jí samou) dokážeme formuli φ. Nyní aplikujeme dvakrát generalizaci, *nejprve na proměnnou x* a teprve potom na proměnnou y. Tím jsme v teorii s axiomem $(\forall x)(\forall y)\varphi$ dokázali formuli $(\forall y)(\forall x)\varphi$. Závěrečné užití důkazu dedukcí je snad již zcela rutinní záležitostí. Obrácená implikace se dokáže naprosto stejně.

$^{u30)}$ V důsledku důkazu ekvivalencí je v teorii s jediným axiomem $\varphi \equiv \neg\neg\varphi$ dokazatelná formule $(\forall x)\varphi \equiv (\forall x)\neg\neg\varphi$. Formule $\mathrm{p} \equiv \neg\neg\mathrm{p}$ je dokazatelná ve výrokovém počtu (zákon dvojité negace), pročež je bez použití mimologických axiomů dokazatelná v predikátovém počtu formule $\varphi \equiv \neg\neg\varphi$. Na závěr stačí použít princip „vše dokázané lze použít k dokazování“.

$^{u31)}$ Formule $(\exists x)(\exists y)\varphi$ je vyjádřitelná pomocí $\neg(\forall x)\neg\neg(\forall y)\neg\varphi$. Uvedená formule je ekvivalentní formuli $\neg(\forall x)(\forall y)\neg\varphi$ podle předchozí úlohy. Aplikujeme-li výsledek úlohy 29 na formuli $\neg\varphi$, nahlédneme dokazatelnost ekvivalence formule $(\forall x)(\forall y)\neg\varphi$ a formule $(\forall y)(\forall x)\neg\varphi$ bez užití mimologických axiomů. Na závěr si proto stačí uvědomit, že implikace $(\mathrm{p} \equiv \mathrm{q}) \rightarrow (\neg\mathrm{p} \equiv \neg\mathrm{q})$ je tautologií výrokového počtu.

tak také v teorii $\boldsymbol{T}, \varphi$; pročež stačí aplikovat jedno dodatečné odvozovací pravidlo z našeho seznamu.

*

Přistupme k formulaci dodatečných odvozovacích pravidel, která nemají analogii ve výrokového počtu. První z nich — důkaz rovností — se týká specifického prostředku predikátového počtu, totiž rovnosti. V axiomech **R2–R3** jsme zaručili, že po nahrazení termu termem jemu rovným v základní formuli dostaneme formuli, která je s původní formulí ekvivalentní. Nyní tvrdíme, že totéž nenastane jen pro základní formule, avšak pro všechny formule (s výjimkou těch, které změní svůj význam podstatně, viz rozbor na str. 105). Je přece intuitivně zcela jasné, že jakékoli tvrzení o „nejstarší studentce naší školy“ a totéž tvrzení o „ženě s rodným číslem nejstarší studentky naší školy“ mají stejný význam, neboť „nejstarší studentka naší školy“ a „žena s rodným číslem nejstarší studentky naší školy“ je táž osoba.

V prvním paragrafu následující kapitoly použijeme důkaz rovností mnohokrát při tvoření důkazů v aritmetice. Pro vysvětlení významu důkazu rovností však uveďme již nyní, že ho můžeme použít například ke konstatování, že jakékoli tvrzení o termu $\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathit{0}))$ je ekvivalentní témuž tvrzení o termu $\mathfrak{S}(\mathit{0})+\mathfrak{S}(\mathit{0})$, neboť termy $\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathit{0}))$ a $\mathfrak{S}(\mathit{0})+\mathfrak{S}(\mathit{0})$ jsou si rovny (jelikož oba reprezentují číslo 2).

Důkaz rovností nedovolujeme aplikovat v případě, že nahrazením změní formule svůj význam podstatně, tj. v případě, že se změní (vzroste) systém výskytů vázaných proměnných. Tuto výjimku je třeba zdůraznit z teoretického hlediska, v praxi pravděpodobně nikoho nenapadne, aby prováděl nahrazení podstatně měnící význam formule.

Uvažme např. formuli $(\exists y)(x \neq y)$, která požaduje, aby pro x existoval od něho různý objekt. Je samozřejmé, že takovéto y existuje pro každé individuum v jakékoli struktuře, která má alespoň dvě individua; zkoumaná formule je pro takovéto struktury pravdivá při každém ohodnocení proměnné x. Je naprosto nepřirozené nahrazovat volný výskyt proměnné x proměnnou y, protože tím z volného výskytu učiníme výskyt vázaný. Kdybychom na takovémto nepřirozeném nahrazení trvali, nesmělo by nás překvapit, že dosazením proměnné y za proměnnou x vznikne formule $(\exists y)(y \neq y)$, jež není splněna v žádné struktuře. Následně formule $x = y \rightarrow (\exists y)(y \neq y)$ není pravdivá v žádné struktuře při žádném ohodnocení, které přiřazuje proměnným x, y totéž individuum. Ukázali jsme, že trvat na možnosti aplikovat důkaz rovností na všechny formule a všechna možná nahrazení (včetně těch, která mění význam formule podstatně) by znamenalo, že některé axiomy by nebyly pravdivé ve všech strukturách a všech ohodnoceních (tj. museli bychom oželet korektnost axiomů), což je zcela proti duchu logiky.

---

u32) Zleva doprava: Předpokládáme, že v teorii $\boldsymbol{T}$ je dokazatelná formule φ, takže tato formule je dokazatelná také v teorii $\boldsymbol{T}, \neg\varphi$. V této teorii je dokazatelná rovněž formule $\neg\varphi$, neboť je jejím axiomem. Naopak: Protože $\boldsymbol{T}, \neg\varphi$ je sporná, je v této teorii dokazatelná formule φ (podle výsledku úlohy 14); tatáž formule je dokazatelná také v teorii $\boldsymbol{T}, \varphi$, protože je jejím axiomem. Prokazování zakončíme důkazem neutrální formulí.

Důkaz rovností. Nechť t, s jsou termy jazyka teorie $\boldsymbol{T}$ a budiž φ formule téhož jazyka. Nechť nahrazením proměnné x termem t získáme z formule φ formuli $\varphi(x/t)$ a nahrazením téže proměnné, avšak termem s získáme z formule φ formuli $\varphi(x/s)$. Nechť žádným z uvedených nahrazení se nezmění systém vázaných proměnných (tj. žádáme, aby nahrazeními nezměnila formule φ podstatným způsobem svůj význam). Pak rovnost termů t a s implikuje v teorii $\boldsymbol{T}$ ekvivalenci formulí $\varphi(x/t)$ a $\varphi(x/s)$; v symbolech $\boldsymbol{T} \vdash t = s \rightarrow (\varphi(x/t) \equiv \varphi(x/s))$.

Jiný běžně používaný důkazový prostředek je tzv. fixace (zavedení) konstanty. Představme si, že víme, že objekt s jakousi vlastností existuje. Je možno si pro další důkaz zvolit jeden z těchto objektů jako příklad a pokračovat v další konstrukci důkazu využívajíce tento příklad. Například když víme, že existuje alespoň jeden přítel nejstaršího studenta školy, můžeme vzít jako příklad kteréhokoli z jeho přátel a užít takto fixovaný objekt pro případné další dokazování. V prvním paragrafu třetí kapitoly předvedeme mnoho příkladů užití pravidla fixace konstanty při důkazech v aritmetice.

Podstatné pro fixaci konstanty s nějakou vlastností je vědět, že objekt s touto vlastností existuje. Pochopitelně, kdybychom fixovali objekt s vlastností $x \neq x$ (podle axiomu rovnosti víme, že takové x neexistuje), byli bychom schopni dokázat naprostý nesmysl.

Důkaz fixací (zavedením) konstanty. Buď φ formule taková, že v teorii $\boldsymbol{T}$ je dokazatelná existence x s vlastností φ. Obohaťme jazyk teorie $\boldsymbol{T}$ o novou konstantu $\mathfrak{c}$ a nechť formule $\varphi(x/\mathfrak{c})$ označuje formuli vzniklou z formule φ nahrazením proměnné x konstantou $\mathfrak{c}$. Jestliže v teorii vzniklé z teorie $\boldsymbol{T}$ obohacením jazyka o konstantu $\mathfrak{c}$ a obohacením systému axiomů o nový axiom $\varphi(x/\mathfrak{c})$ je dokazatelná nějaká formule ψ jazyka *původní teorie*, pak je tato formule ψ dokazatelná již v původní teorii. V symbolech: jestliže $\boldsymbol{T} \vdash (\exists x)\varphi$, pak z dokazatelnosti $\boldsymbol{T}, \varphi(x/\mathfrak{c}) \vdash \psi$ vyvodíme $\boldsymbol{T} \vdash \psi$ pro jakoukoli formuli ψ jazyka teorie $\boldsymbol{T}$.

Axiom specifikace vyjadřuje, že „pokud něco platí pro všechny objekty, pak to platí pro jakýkoli zvolený objekt“ a týká se univerzální kvantifikace. Týž princip můžeme vyslovit pomocí existenční kvantifikace ve tvaru „platí-li něco pro jeden určitý objekt, pak existuje objekt, pro který to platí“. (Pokud se vám, milý čtenáři, zdá předchozí výpověď nesmyslná svou banalitou, je to jen prokázání přirozenosti principu, o němž právě pojednáváme.) Princip vyslovíme nejprve pro nejdůležitější případ univerzálního druhu proměnných.

Duální specifikací nazýváme formuli tvaru

$\varphi(x/t) \rightarrow (\exists x)\varphi$, kde formule $\varphi(x/t)$ vznikne z formule φ nahrazením proměnné x jakýmkoli *termem t, jehož nahrazením se nemění systém vázaných výskytů proměnných.*

Intuitivněji řečeno, formuli duální specifikace přijímáme jen v případě, že nahrazením se nemění zásadně význam formule φ.

Přesně tak, jako axiom specifikace je možno formulovat pro libovolný druh proměnných, je možno aplikovat i duální specifikaci na libovolný druh proměnných, pokud máme navíc zaručeno, že substituovaný term je *tohoto druhu*: „platí-li něco pro jeden určitý objekt nějakého druhu, pak existuje objekt tohoto druhu, pro který to platí".

Pokud jste přijal, vážený čtenáři, zápis axiomu specifikace pro obecný druh proměnných, nebudete mít nyní potíže se zápisem duální specifikace pro týž druh proměnných. V následujícím axiomu buďtež proměnné u, v téhož druhu (případ, že u a v jsou toutéž proměnnou, se nevylučuje).

$[\varphi(u/\mathsf{t})\ \&\ (\exists v)(v = \mathsf{t})] \rightarrow (\exists u)\varphi$, kde formule $\varphi(u/\mathsf{t})$ vznikne z formule φ nahrazením proměnné u jakýmkoli *termem* t*, jehož nahrazení nemění systém vázaných výskytů proměnných.*

Jednou z důležitých vlastností kvantifikace je možnost záměny pořadí dvou kvantifikátorů *stejného druhu*. Tuto možnost jsme výše nejen konstatovali, avšak dokonce i prokázali (bez použití mimologických axiomů) v úlohách 29 a 31. Přirozeně vyvstává otázka, zda lze měnit i pořadí kvantifikátorů, z nichž jeden je existenční a druhý univerzální. Na příkladu formulí $(\forall s_1)(\exists s_2)\mathcal{K}am(s_1, s_2)$ a $(\exists s_2)(\forall s_1)\mathcal{K}am(s_1, s_2)$, které v neustále zvažovaném případu školy vyjadřují „Každý student má kamaráda." a „Existuje student, který se kamarádí s každým studentem (dokonce i sám se sebou)." jsme naznačili, že záměna pořadí kvantifikátorů může změnit význam formule.

V úloze 25 jsme ukázali, že ve struktuře $\mathbb{P}$ je splněna formule $(\forall x)(\exists y)(x = y)$ a není splněna formule $(\exists y)(\forall x)(x = y)$. Tím jsme prokázali, že bez použití mimologických axiomů *není možno dokázat* implikaci

$$(\forall x)(\exists y)(x = y) \rightarrow (\exists y)(\forall x)(x = y),$$

neboť existence takového důkazu je v rozporu s korektností predikátového počtu. Na druhé straně si však pro jakoukoli formuli φ dokážete v následující úloze implikaci

$$(\exists y)(\forall x)\varphi \rightarrow (\forall x)(\exists y)\varphi. \tag{x}$$

Úloha 33. Dokažte formuli (x) bez použití mimologických axiomů. Návod: Fixujte konstantu y s vlastností $(\forall x)\varphi$ a uvažujte libovolný objekt x. Pro zvolené x prokažte $(\exists y)\varphi$ duální specifikací.

[u33)] Pro fixovanou konstantu y s vlastností $(\forall x)\varphi$ dostaneme formuli φ specifikací, ve které nahrazujeme proměnnou x jí samotnou. Pro libovolně zvolené x nyní uvažme, že máme konstantu y zaručující φ. Aplikace duální specifikace přináší formuli $(\exists y)\varphi$, na závěr již postačuje použít generalizaci vzhledem k proměnné x.

Ve třetím paragrafu se budeme zabývat problémem možnosti záměny pořadí kvantifikace a implikace obecněji.

* * *

Vraťme se teď k problematice sylogismů diskutované v předchozím paragrafu. Předpokládejme, že v našem jazyce jsou tři unární predikáty $\mathcal{S}, \mathcal{M}$ a $\mathcal{P}$. Pomocí univerzálního druhu proměnných x můžeme zapsat soud „Každé $\mathcal{S}$ je $\mathcal{P}$." ve tvaru $(\forall x)(\mathcal{S}(x) \to \mathcal{P}(x))$ a soud „Některé $\mathcal{S}$ je $\mathcal{P}$." ve tvaru $(\exists x)(\mathcal{S}(x)\ \&\ \mathcal{P}(x))$. Zápis zbývajících soudů pro predikáty $\mathcal{S}, \mathcal{P}$ by měl být zcela jasný — je tomu tak? — Pochopitelně, že soud „Žádné $\mathcal{S}$ není $\mathcal{P}$." a soud „Některé $\mathcal{S}$ není $\mathcal{P}$." zapíšeme postupně ve tvaru $(\forall x)(\mathcal{S}(x) \to \neg\mathcal{P}(x))$ a ve tvaru $(\exists x)(\mathcal{S}(x)\ \&\ \neg\mathcal{P}(x))$. Pokud budeme mít k dipozici dokonce druh proměnných s probíhající přesně objekty mající vlastnost $\mathcal{S}$, zjednoduší se zápisy velice podstatně do tvarů $(\forall s)\mathcal{P}(s)$, $(\exists s)\mathcal{P}(s)$, $(\forall s)\neg\mathcal{P}(s)$ a $(\exists s)\neg\mathcal{P}(s)$.

Jako ukázku metod popsaných v tomto paragrafu ukažme platnost několika sylogismů.

Příklad 7. Prokažme v predikátovém počtu platnost sylogismu

(1) Každé $\mathcal{M}$ je $\mathcal{P}$, tj. $(\forall x)(\mathcal{M}(x) \to \mathcal{P}(x))$.
(2) Každé $\mathcal{S}$ je $\mathcal{M}$, tj. $(\forall x)(\mathcal{S}(x) \to \mathcal{M}(x))$.
pak
(3) Každé $\mathcal{S}$ je $\mathcal{P}$, tj. $(\forall x)(\mathcal{S}(x) \to \mathcal{P}(x))$.

a sylogismu

(1) Každé $\mathcal{M}$ je $\mathcal{P}$, tj. $(\forall x)(\mathcal{M}(x) \to \mathcal{P}(x))$.
(2) Některé $\mathcal{S}$ je $\mathcal{M}$, tj. $(\exists x)(\mathcal{S}(x)\ \&\ \mathcal{M}(x))$.
pak
(3) Některé $\mathcal{S}$ je $\mathcal{P}$, tj. $(\exists x)(\mathcal{S}(x)\ \&\ \mathcal{P}(x))$.

Zavazujeme se tedy dokázat (užívajíce *pouze* vyvozovací principy popsané v tomto paragrafu) závěrečný soud z premis toho kterého sylogismu.

Prokázání platnosti prvního sylogismu: Uvažujme libovolný objekt x. Při užití axiomu specifikace a druhé premisy nahlédneme, že má-li náš objekt vlastnost $\mathcal{S}$, má i vlastnost $\mathcal{M}$, v symbolech $\mathcal{S}(x) \to \mathcal{M}(x)$. Zcela analogicky podle axiomu specifikace a první premisy zjistíme, že pokud má náš objekt vlastnost $\mathcal{M}$, má i vlastnost je $\mathcal{P}$, v symbolech $\mathcal{M}(x) \to \mathcal{P}(x)$. Tranzitivita implikace zabezpečí, že pokud má náš objekt vlastnost $\mathcal{S}$, má i vlastnost $\mathcal{P}$, v symbolech $\mathcal{S}(x) \to \mathcal{P}(x)$ a generalizace přinese $(\forall x)(\mathcal{S}(x) \to \mathcal{P}(x))$.

Prokázání platnosti druhého sylogismu: Fixujme objekt x, který má vlastnost $\mathcal{S}(x)\ \&\ \mathcal{M}(x)$, aplikujíce důkaz užitím konjunkce nahlédněme jak $\mathcal{S}(x)$, tak také $\mathcal{M}(x)$. Podle axiomu specifikace a první premisy zjistíme, že pokud má náš objekt vlastnost $\mathcal{M}$, má i vlastnost $\mathcal{P}$, v symbolech $\mathcal{M}(x) \to \mathcal{P}(x)$. Modus ponens zaručí $\mathcal{P}(x)$. Odvozovací pravidlo důkaz konjunkce zajistí $\mathcal{S}(x)$ & $\mathcal{P}(x)$, tzn. náš fixovaný objekt má vlastnost $\mathcal{S}(x)$ a současně má rovněž vlastnost $\mathcal{P}(x)$. Na závěr postačuje užít duální specifikaci.

Úloha 34. V predikátovém počtu prokažte platnost sylogismu

(1) Žádné $\mathcal{M}$ není $\mathcal{P}$, tj. $(\forall x)(\mathcal{M}(x) \rightarrow \neg\mathcal{P}(x))$.
(2) Každé $\mathcal{S}$ je $\mathcal{M}$, tj. $(\forall x)(\mathcal{S}(x) \rightarrow \mathcal{M}(x))$.
pak
(3) Žádné $\mathcal{S}$ není $\mathcal{P}$, tj. $(\forall x)(\mathcal{S}(x) \rightarrow \neg\mathcal{P}(x))$.

a sylogismu

(1) Žádné $\mathcal{M}$ není $\mathcal{P}$, tj. $(\forall x)(\mathcal{M}(x) \rightarrow \neg\mathcal{P}(x))$.
(2) Některé $\mathcal{S}$ je $\mathcal{M}$, tj. $(\exists x)(\mathcal{S}(x)$ & $\mathcal{M}(x))$.
pak
(3) Některé $\mathcal{S}$ není $\mathcal{P}$, tj. $(\exists x)(\mathcal{S}(x)$ & $\neg\mathcal{P}(x))$.

Příklad 8. Ukažme, že ze soudu „Každé $\mathcal{S}$ je $\mathcal{P}$." plyne soud „Některé $\mathcal{S}$ je $\mathcal{P}$." za předpokladu existence objektu s vlastností $\mathcal{S}$: Fixujme objekt x s vlastností S, v symbolech $\mathcal{S}(x)$. Axiom specifikace aplikovaný na první soud přinese $\mathcal{S}(x) \rightarrow \mathcal{P}(x)$ a následně použitím modus ponens obdržíme $\mathcal{P}(x)$. Užívajíce důkaz konjunkce nahlédneme, že fixovaný objekt má současně vlastnost $\mathcal{S}$ a také vlastnost $\mathcal{P}$, v symbolech $\mathcal{S}(x)$ & $\mathcal{P}(x)$; stačí proto užít duální specifikaci.

Předpokládejme existenci objektu s vlastností $\mathcal{S}$, tzn. pracujme v teorii s axiomem $(\exists x)\mathcal{S}(x)$. Prokažme, že z premis „Každé $\mathcal{M}$ je $\mathcal{P}$." a „Každé $\mathcal{S}$ je $\mathcal{M}$." je dokazatelný soud plyne „Některé $\mathcal{S}$ je $\mathcal{P}$.". Podle předchozího příkladu z našich premis dokážeme soud „Každé $\mathcal{S}$ je $\mathcal{P}$.". Tento důkaz prodloužíme o důkaz, že „Každé $\mathcal{S}$ je $\mathcal{P}$." implikuje „Některé $\mathcal{S}$ je $\mathcal{P}$." (existence důkazu prokázána před okamžikem) a na závěr použijeme modus ponens.

Úloha 35. Plyne ze soudu „Žádné $\mathcal{S}$ není $\mathcal{P}$." soud „Některé $\mathcal{S}$ není $\mathcal{P}$." za předpokladu existence objektu s vlastností $\mathcal{S}$? Za uvedeného předpokladu prokažte platnost sylogismu vyvozujícího z premis „Žádné $\mathcal{M}$ není $\mathcal{P}$." a „Každé $\mathcal{S}$ je $\mathcal{M}$." závěr „Některé $\mathcal{S}$ není $\mathcal{P}$.".

Neplatnost sylogismu jsme prokazovali protipříkladem. Uvědomme si, že protipříklad je v terminologii tohoto paragrafu model, ve kterém jsou pravdivé premisy sylogismu a je nepravdivý jeho závěr.

* * *

u34) Můžeme zopakovat úvahy z předcházejícího příkladu zaměňujíce $\mathcal{P}$ za $\neg\mathcal{P}$, mnohem rychlejší je však aplikovat již dokázané sylogismy na vlastnost $\neg\mathcal{P}$.

u35) Ano; znovu můžeme zopakovat úvahy z předchozího příkladu zaměňujíce $\mathcal{P}$ za $\neg\mathcal{P}$, avšak opět mnohem rychlejší je aplikovat již dokázaný sylogismus na vlastnost $\neg\mathcal{P}$.

Ukázali jsme, jak vyjádřit že do školy chodí alespoň tři studenti-muži. Negací uvedené formule zapíšeme, že do školy chodí nejvýše dva studenti-muži. Podobná tvrzení můžeme vyjadřovat i pro jiné vlastnosti a jiný počet objektů. Nejpoužívanější je však vyjádření, že existuje právě jeden objekt, který má danou vlastnost φ. Uveďme proto výslovně formuli, která tento fakt vyjadřuje (zápisy $\varphi(x/x_1)$ a $\varphi(x/x_2)$ označují po řadě formule, jež vzniknou po řadě z formule φ nahrazením proměnné x proměnnou x_1 a proměnnou x_2; přitom předpokládáme, že uvedenými nahrazeními se nemění systém vázaných proměnných):

(xi) $$(\exists x)\varphi \;\&\; (\forall x_1, x_2)[(\varphi(x/x_1) \;\&\; \varphi(x/x_2)) \to x_1 = x_2]$$

(druhý konjunkt vyjadřuje, že každé dva objekty mající vlastnost φ si již musí být rovny). Pro jednoduchost zápisu je zvykem formuli (xi) označovat jako $(\exists! x)\varphi$ (přitom nevylučujeme, že ve formuli φ jsou volné výskyty i jiných proměnných než x).

* * *

Zopakujme, že teorie popisuje naše pojetí nějakého jevu, např. naši představu o vlastnostech přirozených čísel nebo fyzikální pojetí pohybu v klasické Newtonově mechanice. O dokazatelnosti v teorii jsme již pojednali. Zdůrazněme však, že zatímco ve výrokovém počtu byl důkaz z předpokladů v podstatě pouze pomocný pojem pro zkoumání důkazů ve výrokovém počtu (tzn. důkazů bez předpokladů), je pojem důkazu v teorii velice důležitý. Významnost role teorií je způsobena větší složitostí důkazů v predikátovém počtu, obrovskou rozmanitostí teorií a růzností jejich vlastností.

Podle matematické definice jakýmkoli zadáním jazyka a zadáním soustavy formulí tohoto jazyka jakožto axiomů obdržíme teorii. Ovšem ne každá takto získaná teorie je matematiky uznávána jako hodná zkoumání; dokonce i v matematice samé jsou za „zajímavé a zkoumáníhodné“ teorie považovány jen ty, které popisují jakési matematické jevy. Sporné teorie jsou automaticky zařazeny mezi teorie nezajímavé.

Při tvorbě matematické teorie se také snažíme o úspornost; chceme, aby vytvářená teorie měla přehledný a co nejmenší axiomatický systém. Poměrně velká pozornost bývá věnována problému, zda není možno některý axiom dokázat ze zbývajících. Pro některá zkoumání (např. pro tvorbu modelů dané teorie) je totiž velice výhodné mít minimalizovaný systém axiomů. Pokud víme, že žádný axiom není dokazatelný v teorii vzniklé jeho vypuštěním, mluvíme o **nezávislé soustavě axiomů.**

Zcela analogicky jako se snažíme minimalizovat soustavu axiomů, dáváme rovněž přednost minimálnímu jazyku: snažíme se budovat teorie s co nejmenším jazykem. To je znovu v některých ohledech velice výhodné (např. při vytváření modelů zkoumané teorie). Nicméně tento přístup přináší také podstatné nevýhody, které je však možno odstranit, jak ukážeme za okamžik. Nevýhoda spočívá v tom, že při rozvíjení teorie se často ukáže vhodné užívat prostředek jazyka (predikát, konstantu, funkci nebo druh proměnných), který ve zvoleném jazyce není k dispozici. V takovém případě je výhodné obohatit jazyk o tento nový jazykový prostředek.

Než přikročíme k obecnému popisu jevu, uveďme jeden příklad ilustrující potřebu obohacování jazyka. Již jsme uvedli, že jazyk aritmetiky chceme mít velice jednoduchý: funkce sčítání, násobení a následníka, konstantu $\mathit{0}$ a jediným povoleným predikátem má být rovnost. Avšak při rozvíjení aritmetiky časem dojdeme i k potřebě definovat např. pojem prvočísla (unární predikát). Prvočísly je zvykem nazývat[32] ta „čísla větší než 1, která nelze dělit ničím jiným než jedničkou a sebou samým". Jako rozumné a významné tvrzení aritmetiky přijímáme například, že neexistuje největší prvočíslo.

Takovou větu *nemůžeme* dokázat v teorii s původním jazykem aritmetiky. Důkaz v teorii je totiž podle definice posloupnost formulí *jazyka této teorie*, která má vlastnosti popsané v definici důkazu. Takže v žádném důkazu teorie se nemůže vyskytnout formule, která není vyjádřitelná v jejím jazyce. Přesně vzato bychom tedy při každém zavedení nového prostředku jazyka musili měnit jazyk teorie a tak vytvářet *novou* teorii. To by sice bylo zcela přesné, nicméně podrobné popisování jazyka před vyslovením každé věty by bylo únavné a ve své podstatě by zapříčinilo nepřehlednost výsledků. Máme také možnost vždy místo vyslovení slovního spojení „být prvočíslem" zopakovat definici v uvozovkách z minulého odstavce. To by bylo opět zcela přesné, avšak za chvíli by naše vyjadřování bylo tak těžkopádné, že bychom nebyli schopni si porozumět. Mnohem přehlednější je se dohodnout, že budeme používat pojem prvočísla definovaného vlastností v uvozovkách *jako zkratky*. Neboli pracovat v obohaceném jazyce s vědomím, že na požádání umíme převést každou formuli bohatšího jazyka na formuli jazyka původního, která je s ní ekvivalentní. (V našem případě je algoritmus převodu velmi prostý: vždy nahradíme vazbu „je prvočíslem" slovním spojením, které se v definici pojmu prvočísla vyskytuje v uvozovkách.) Abychom obohacení jazyka byli oprávněni považovat za pouhou zkratku, musíme rovněž vědět, že takovým obohacením teorie nevzrostou podstatně možnosti dokazování. Popišme zmíněné dva požadavky podrobněji:

(a) Pokud má být nový výrazový prostředek pouhou zkratkou, musíme být schopni každou formuli ψ obohaceného jazyka vyjádřit ekvivalentně v původním jazyce jako jakousi formuli ϑ. O ekvivalenci formulí ψ a ϑ můžeme pochopitelně uvažovat jen v teorii, jejíž jazyk obsahuje všechny výrazové prostředky užité při tvorbě těchto formulí, tzn. ekvivalenci máme být schopni dokázat v obohacené teorii.

[32] Definice má smysl, jen pokud už rozumíme významu slov „dělit", „větší" a „jednička", takže předpokládáme, že jsme již dříve obohatili jazyk aritmetiky o tyto pojmy.

(b) Má-li teorie $\boldsymbol{T}$ bohatší jazyk než teorie $\boldsymbol{S}$, dokážeme v teorii $\boldsymbol{T}$ zcela určitě více formulí než v teorii $\boldsymbol{S}$ (například všechny formule vzniklé nahrazením výrokových proměnných v tautologiích výrokového počtu formulemi vyslovitelnými jen v bohatším jazyce). Nemůžeme tedy požadovat, aby v teorii $\boldsymbol{T}$ s bohatším jazykem nebyla dokazatelná žádná formule, která není dokazatelná v $\boldsymbol{S}$. Avšak můžeme a chceme-li vyjádřit nepodstatnost obohacení jazyka, pak dokonce musíme požadovat, aby v $\boldsymbol{T}$ nebyly dokazatelné formule *jazyka teorie* $\boldsymbol{S}$ nedokazatelné v $\boldsymbol{S}$. Tento požadavek matematicky přesně vyjadřuje dříve uvedený požadavek, aby nevzrostly podstatně možnosti dokazování.

Proberme nyní běžné způsoby obohacování jazyka, popišme obecně užívané předpoklady, za kterých je možno obohacení považovat za pouhou zkratku; jinými slovy formulujme předpoklady, za nichž máme zaručeny požadavky[33] (a) a (b), a uveďme při všech obohaceních jiných než predikátem alespoň jeden příklad.

1) Chceme-li přidat nový k-ární predikát $\mathcal{P}$ jako zkratku za vztah $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$, definujeme nový predikát formulí[34]

$$\mathcal{P}(x_1, \ldots, x_k) \equiv \varphi(x_1, \ldots, x_k). \tag{xii}$$

K tomu, aby takovéto obohacení vyhovovalo našim podmínkám (a) a (b), postačuje, aby formule φ byla formulí *původního jazyka*, která má právě k volných proměnných $x_1, \ldots, x_k$.

Formuli, ve které se vyskytuje nový predikát $\mathcal{P}$, vyjádříme v původním jazyce prostě nahrazením jakékoli formule tvaru $\mathcal{P}(\mathsf{t}_1, \ldots, \mathsf{t}_k)$ formulí $\varphi(x_1/\mathsf{t}_1, \ldots, x_k/\mathsf{t}_k)$, vzniklou z formule φ nahrazením proměnných $x_1, \ldots, x_k$ postupně termy $\mathsf{t}_1, \ldots, \mathsf{t}_k$. (Pokud by se uvedeným nahrazením změnil systém vázaných proměnných, je nejprve potřeba upravit formuli φ, aby k tomu nedošlo, tj. přeformulovat vlastnost φ tak, aby se popsaným nahrazením neměnil význam podstatně. Nehodláme se řešením tohoto spíše teoretického problému podrobně zabývat, pro případného zájemce jen poznamenáme, že metoda nahrazování vázaných proměnných předložená ve třetím paragrafu naší kapitoly je pro konstrukci reformulace formule φ dostatečná.)

2) Zkoumejme možnost přidání nové konstanty.

Představujme si např., že už máme zvolen trojúhelník ABC a chceme „sestrojit kružnici k o středu A a procházející bodem B“. Z hlediska obohacování jazyka vlastně přidáváme novou konstantu k, která má vlastnost „být kružnicí o středu A a procházející bodem B“. Takovéto obohacení jazyka zkratkou je

[33] viz §1 kap. III [So], kde najdete mj. *upřesnění* návodů, jak vyjádřit formule bohatšího jazyka v jazyku původním

[34] Pokud chceme být přesní, obohatíme jazyk o nový predikát $\mathcal{P}$ a přidáme axiom (*xii*).

možné, jestliže *existuje právě jeden* objekt, který má uvedenou vlastnost[35]. V našem případě je požadavek splněn, protože existuje přesně jedna kružnice s daným středem a zadaným poloměrem.

Pokud chceme přidat novou konstantu $\mathfrak{c}$ jako zkratku za objekt popsaný pomocí formule $\varphi(x)$, definujeme konstantu $\mathfrak{c}$ formulí[36]

(*xiii*) $\varphi(x/\mathfrak{c})$, která vznikne z formule φ nahrazením proměnné x konstantou $\mathfrak{c}$.

K tomu, aby takovéto obohacení vyhovovalo našim podmínkám (a) a (b), postačuje, aby formule φ byla formulí *původního jazyka* s jedinou volnou proměnnou x a aby v teorii $\boldsymbol{T}$ byla dokazatelná formule $(\exists! x)\varphi(x)$.

Formuli, ve které se vyskytuje nová konstanta (např. formuli $\psi(\mathfrak{c})$) vyjádříme v původním jazyce formulí $(\forall x)(\varphi(x) \to \psi(x))$ nebo ji můžeme ekvivalentně vyjádřit také formulí $(\exists x)(\varphi(x) \,\&\, \psi(x))$.

3) Zkoumejme možnost přidání nové funkce.

Představme si, že např. v aritmetice chceme definovat novou funkci x^3 jako zkratku. K tomu účelu zvolíme nějaký vztah mezi argumentem x a proměnnou y označující hodnotu funkce (v našem případě je vhodný vztah popsán např. formulí $y = x \cdot (x \cdot x)$) a definujeme hodnotu funkce x^3 jako to y, pro které platí zvolený vztah. Velmi podobně jako v předchozím bodě je takovéto obohacení jazyka jakožto zkratka možné, jestliže ke každému x *existuje právě jeden* objekt, který má uvedenou vlastnost.

Jestliže chceme přidat novou k-ární funkci $\mathfrak{F}$ jako zkratku popisující vztah popsaný pomocí formule $\varphi(y, x_1, \ldots, x_n)$, definujeme funkci formulí[37]

(xiv) $\varphi(y/\mathfrak{F}(x_1, \ldots, x_n))$, jež vznikne z formule φ nahrazením proměnné y termem $\mathfrak{F}(x_1, \ldots .x_n)$

[35] Je dosti intuitivní, že je potřeba, aby objekt s uvedenou vlastností existoval. Zkoumejme potřebu jednoznačnosti pro naplnění bodu (a). K tomu účelu rozšiřme výše definovanou strukturu $\mathbb{P}$ jednak realizací dodatečné konstanty $\mathfrak{c}$ individuem $\mathfrak{a}$ a jednak individuem $\mathfrak{b}$. V první rozšířené struktuře je pravdivé $\mathcal{P}(\mathfrak{c})$, ve druhé je pravdivé $\neg\mathcal{P}(\mathfrak{c})$. Každá uzavřená formule neobsahující konstantu $\mathfrak{c}$ je pravdivá v jedné rozšířené struktuře, právě když je pravdivá ve druhé (neboť toto nastane, právě když je pravdivá v původní struktuře $\mathbb{P}$). Nemůže proto existovat formule ψ *původního jazyka*, která by vyjádřila formuli $\mathcal{P}(\mathfrak{c})$.

[36] Pokud chceme být přesní, obohatíme jazyk o novou konstantu $\mathfrak{c}$ a přidáme axiom (*xiii*).

Pravidlo o přidání konstanty jako zkratky je velice podobné odvozovacímu pravidlu důkaz fixací konstanty. Uveďme však, že v důkazu fixací konstanty požadujeme méně a také dostáváme méně: vyžadujeme pouze dokazatelnost existence objektu s vlastností φ (a nikoli jednoznačnost takovéhoto objektu) a máme zaručeno pouze, že formule původního jazyka dokazatelné v rozšířené teorii jsou dokazatelné i v teorii původní (tj. získáme pouze vlastnost (b)). Vlastnost (a) (tzn. možnost ekvivalentně vyjádřit jakoukoli formuli s konstantou $\mathfrak{c}$ v jazyce bez této konstanty) již zaručenu nemáme a podle předcházející poznámky ani mít nemůžeme.

[37] Pokud chceme být přesní, obohatíme jazyk o novou funkci $\mathfrak{F}$ a přidáme axiom (*xiv*).

K tomu, aby takovéto obohacení vyhovovalo našim podmínkám (a) a (b), postačuje, aby formule φ byla formulí *původního jazyka* s $n+1$ volnými proměnnými $y, x_1, \ldots, x_n$ a aby v teorii $\boldsymbol{T}$ byla dokazatelná formule $(\forall x_1, \ldots, x_k)(\exists! y)\varphi$. Uvedený požadavek je zcela přirozený: aby funkce byla definována, potřebujeme aby objekt y s požadovanou vlastností existoval a k tomu, aby se jednalo o *funkci*, potřebujeme, aby takový objekt byl jediný.

Vyjádřit formuli, ve které se vyskytuje nová funkce, formulí v původním jazyce je již poněkud těžší. Musíme *opakovaně* (podle počtu výskytů znaku pro novou funkci) užít ideu z předchozího bodu.

4) Zkoumejme možnost přidání nového druhu proměnných.

Představme si, že např. chceme zavést proměnné $p, p_1, p_2, \ldots$ pro prvočísla a používat kvantifikaci „pro každé prvočíslo …“ Pak můžeme tvrzení „Pro každé prvočíslo existuje prvočíslo, které je větší.“ zapsat prostě $(\forall p_1)(\exists p_2)(p_1 < p_2)$. Bez proměnných pro prvočísla bychom uvedené tvrzení zapisovali poněkud složitěji:

$$(\forall x_1)[\text{„}x_1 \text{ je prvočíslo“} \rightarrow (\exists x_2)(\text{„}x_2 \text{ je prvočíslo“} \mathbin{\&} x_1 < x_2)]$$

(pochopitelně při ještě větším počtu kvantifikací by zjednodušení umožněné definicí nového druhu proměnných vyniklo ještě výrazněji).

Pokud chceme přidat nový druh proměnných $u, u_1, u_2, \ldots$ (srovnej běžný matematický obrat „nechť ta a ta proměnná probíhá ten a ten obor“) jako zkratku za objekty mající vlastnost $\varphi(x)$, definujeme tento druh proměnných formulí[38)]

$$(xv) \qquad (\exists u)(u = x) \equiv \varphi(x).$$

K tomu, aby takovéto obohacení vyhovovalo našim podmínkám (a) a (b), postačuje, aby formule φ byla formulí *původního jazyka* s jedinou volnou proměnnou x univerzálního druhu a aby v teorii $\boldsymbol{T}$ byla dokazatelná formule $(\exists x)\varphi$ (každý obor proměnných musí být neprázdný).

Vyjádřit formuli, ve které se vyskytuje nový druh proměnných, formulí v původním jazyce je opět poněkud těžší. Musíme *opakovaně* (podle počtu kvantifikací proměnných nového druhu) užít ideu popsanou pro proměnné druhu „prvočíslo“.

CVIČENÍ

II-2.1 Jen za použití unárního predikátu $\mathcal{M}u\check{z}$ a binárních predikátů $\mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}$ a $\mathcal{M}an\check{z}$ vyjádřete rodinné vztahy: (a) x je synem y, (b) x je babičkou y, (c) x je snachou y (d) x je bratrem y, (e) x je sestřenicí y.

II-2.2 Rozhodněte, které vztahy v rodině odpovídají následujícím formulím:
(a) $\neg\mathcal{M}u\check{z}(y) \mathbin{\&} \mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(y, x)$;
(b) $(\exists z)(\mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(x, z) \mathbin{\&} \mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(z, y) \mathbin{\&} \mathcal{M}u\check{z}(y))$;
(c) $\mathcal{M}u\check{z}(x) \mathbin{\&}$
$\mathbin{\&}(\exists u)(\exists z_1, z_2)[\mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(x, z_1) \mathbin{\&} \mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(y, z_2) \mathbin{\&} z_1 \neq z_2 \mathbin{\&} \mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(z_1, u) \mathbin{\&} \mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(z_2, u)]$;

38) Pokud chceme být přesní, obohatíme jazyk o nový druh proměnných $u, u_1, u_2, \ldots$ a přidáme axiom (xv). Zápis $(\exists u)(u = x)$ vyjadřuje „x je druhu u“, protože sobě rovné objekty mají mít tytéž vlastnosti a u je určitě proměnnou druhu u.

(d) $\mathcal{M}u\check{z}(x)$ & $(\exists u)(\exists z_1, z_2)[\mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(y, z_1)$ & $z_1 \neq z_2$ & $\mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(z_1, u)$ & $\mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(z_2, u)$ & & $(z_2 = x \vee \mathcal{M}an\check{z}(z_2, x))]$;
(e) $\neg\mathcal{M}u\check{z}(x)$ & $(\exists z)(\mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(z, x)$ & $\mathcal{M}an\check{z}(z, y))$;
(f) $(\exists z_1, z_2, z_3)(\mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(y, z_1)$ & $\mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(z_1, z_2)$ & $\mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(z_2, z_3)$ & $\mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(z_3, x)$ & & $\neg\mathcal{M}u\check{z}(y))$.

II-2.3 Ukažte, že formulemi jazyka **La** zavedeného před úlohou 2 jsou oba zápisy $(\forall x, y)(\mathcal{Q}(x, y) \rightarrow \mathcal{Q}(y, x))$ a $(\forall x)(\mathcal{Q}(x, y) \vee (\exists y)\mathcal{Q}(y, x))$. Pro druhý zápis nalezněte alespoň dvě různé posloupnosti s minimálním počtem členů prokazující, že se jedná o formuli jazyka **La.** Které výskyty proměnných jsou v našich formulích volné a které jsou vázané? Jaký je význam první formule?

II-2.4 Prokažte, že zápisy $\mathcal{P}(x = y)$, $\mathcal{Q}(x, y, \mathfrak{c})$ a $(\forall x, \mathfrak{c})\mathcal{Q}(x, \mathfrak{c})$ nejsou formulemi jazyka **La.**

II-2.5 Rozhodněte, zda jsou formulemi jazyka **La zápisy** $(\forall z)(\exists y)\mathcal{Q}(\mathfrak{c}, x)$, $(\exists y)[\mathcal{Q}(\mathfrak{c}, x) \vee \mathcal{P}(z)$ & $(\forall z)\mathcal{Q}(\mathfrak{c}, z)]$**,** $(\forall x)(\exists y)(\neg\mathcal{P}(x) \rightarrow x = y)$ **a zápis** $(\mathcal{Q}(\mathfrak{c}, \mathfrak{c}$ & $x) \rightarrow (\exists x)\mathcal{Q}(x, x))$**.** Ve formulích určete, které výskyty proměnných jsou volné a které vázané.

II-2.6 Ukažte, že zápisy $\mathfrak{H}(\mathfrak{F}(\mathfrak{c}), \mathfrak{F}(x))$ a $\mathfrak{H}(\mathfrak{H}(x, y), \mathfrak{H}(y, x))$ jsou termy jazyka **La.** Pro každý zápis nalezněte alespoň dvě různé minimální posloupnosti prokazující, že zápis je termem jazyka **La.**

II-2.7 Prokažte, že zápisy $\mathfrak{G}(x, y)$, $\mathfrak{H}(\mathfrak{c})$ a $\mathfrak{H}(y), \mathfrak{F}(x))$ nejsou termy jazyka **La.**

II-2.8 Rozhodněte, zda zápisy $\mathfrak{H}(\mathfrak{c}, \mathfrak{F}(z))$, $\mathfrak{F}(\mathfrak{H}(\mathfrak{F}(\mathfrak{c}), \mathfrak{H}(x, y)))$ a zápis $\mathfrak{H}(\mathfrak{H}(\mathfrak{F}(x), \mathfrak{H}(\mathfrak{c}, y), \mathfrak{c})$ jsou termy jazyka **La.**

II-2.9 Určete, které ze zápisů $(\exists y)\mathfrak{F}(x) = \mathfrak{H}(x, x)$, $\mathcal{P}(\mathfrak{H}(x))$, $\mathcal{P}(\mathfrak{H}(\mathfrak{F}(x) = \mathfrak{c}))$ jsou formulemi jazyka **La.** Pro formule určete navíc, které výskyty proměnných jsou volné a které nikoli.

II-2.10 Rozhodněte, které ze zápisů $(x + y) \cdot (x + y)$, x^2, x/y, $x + y = y \cdot x$, $[x + (\mathfrak{S}(0) \cdot y)] \cdot [(x \cdot z) + (z \cdot y)]$ jsou termy aritmetiky přirozených čísel.

II-2.11 Rozhodněte, zda zápisy $(\exists z)(x = y - z)$, $(\exists z)(y = x \cdot z)$ a zápis $(\exists z_1, z_2)(x_2 = z_1 \cdot y$ & $x_2 = z_2 \cdot y)$ jsou formulemi aritmetiky. Uměli byste dát uvedeným aritmetickým formulím intuitivní význam? Jsou výskyty proměnných v zápisech, které jsou formulemi aritmetiky, volné nebo vázané?

II-2.12 Napište v symbolech „x je druhou mocninou prvočísla.“.

II-2.13 Ve formulích $(\exists y)\mathcal{Q}(\mathfrak{F}(x), \mathfrak{G}(x, \mathfrak{F}(y)))$, $\mathcal{Q}(\mathfrak{c}, y) \rightarrow (\forall x)(\mathcal{Q}(x, y)$ & $\mathcal{P}(z))$ a $(\forall z)(\mathcal{Q}(x, \mathfrak{c}) \vee \mathcal{Q}(\mathfrak{c}, y))$ jazyka **La** nahraďte postupně proměnnou

(a) x konstantou $\mathfrak{c}$,	(d) x termem $\mathfrak{F}(x)$,	(g) y proměnnou x,
(b) x proměnnou y,	(e) x termem $\mathfrak{G}(x, y)$,	(h) y termem $\mathfrak{F}(x)$,
(c) x proměnnou z,	(f) y konstantou $\mathfrak{c}$,	(i) z proměnnou x.

Při kterých nahrazeních termu za proměnnou a v kterých formulích vzroste počet vázaných výskytů?

II-2.14 Ukažte, že disjunkce $\varphi \vee \psi$ je při daném ohodnocení pravdivá ve struktuře, právě když při tomto ohodnocení je ve struktuře pravdivá formule φ *nebo* formule ψ. Návod: formuli $\varphi \vee \psi$ chápeme jako formuli $\neg(\neg\varphi \,\&\, \neg\psi)$ (viz §2 kap. I).

II-2.15 Ukažte, že ekvivalence $\varphi \equiv \psi$ je při daném ohodnocení pravdivá ve struktuře, přesně tehdy když při tomto ohodnocení je ve struktuře pravdivá formule φ, *právě když* je pravdivá formule ψ.

II-2.16 Zapište v jazyce **Ls** tvrzení „Jan ze 3.B je nejstarší ze všech studentů-mužů.“, „Ve škole je studentka, která je mladší než Jan ze 3.B.“ a „Nejstarší ze všech studentů mladších než Jan ze 3.B je upovídaná studentka.“. Jsou tyto formule pravdivé ve struktuře $\mathbb{S}$?

II-2.17 Věta o úplnosti bývá také často formulována, že každá bezesporná teorie má model, v textu jsme však uvedli znění: je-li formule φ jazyka splněna v každém modelu teorie $\boldsymbol{T}$, je formule φ v teorii $\boldsymbol{T}$ dokazatelná. Ukažte, že obě formulace vypovídají totéž. Návod: užijte výsledek úlohy 14.

II-2.18 Prokažte možnost obrácení odvozovacího pravidla důkaz dedukcí, tzn. ukažte, že jestliže v teorii $\boldsymbol{T}$ dokážeme implikaci $\varphi \to \vartheta$, pak v teorii $\boldsymbol{T}, \varphi$ dokážeme formuli ϑ; v symbolech: je-li $\boldsymbol{T} \vdash \varphi \to \vartheta$, je $\boldsymbol{T}, \varphi \vdash \vartheta$. Je zapotřebí užít při prokazování předpoklad uzavřenosti formule φ?

II-2.19 Ukažte možnost obrácení odvozovacího pravidla důkaz sporem, tj. prokažte, že dokazatelnost formule φ v teorii $\boldsymbol{T}$ implikuje spornost teorie $\boldsymbol{T}, \neg\varphi$; v symbolech: jestliže $\boldsymbol{T} \vdash \varphi$, je $\boldsymbol{T}, \neg\varphi$ sporná.

II-2.20 Ukažte možnost obrácení odvozovacího pravidla důkaz rozborem případů, tzn. prokažte, že dokazatelnost formule ϑ v teorii $\boldsymbol{T}, \varphi \vee \psi$ zajistí dokazatelnost formule ϑ jak v teorii $\boldsymbol{T}, \varphi$, tak také v teorii $\boldsymbol{T}, \psi$; v symbolech: jestliže $\boldsymbol{T}, \varphi \vee \psi \vdash \vartheta$, je $\boldsymbol{T}, \varphi \vdash \vartheta$ a současně $\boldsymbol{T}, \psi \vdash \vartheta$.

II-2.21 V predikátovém počtu prokažte platnost sylogismu s premisami

(1) Žádné $\mathcal{M}$ není $\mathcal{P}$,
(2) Některé $\mathcal{M}$ je $\mathcal{S}$.

a závěrem

(3) Některé $\mathcal{S}$ není $\mathcal{P}$.

Za předpokladu existence objektu s vlastností $\mathcal{M}$ prokažte jednoduše na základě prokázaného platnost sylogismu se stejnou první premisou a závěrem a s druhou premisou „Každé $\mathcal{M}$ je $\mathcal{S}$.“.

II-2.22 V predikátovém počtu prokažte platnost sylogismu s premisami

(1) Každé $\mathcal{P}$ je $\mathcal{M}$,
(2) Žádné $\mathcal{S}$ není $\mathcal{M}$.

a závěrem

(3) Žádné $\mathcal{S}$ není $\mathcal{P}$.

Platnost sylogismu se stejnými premisami a se závěrem „Některé $\mathcal{S}$ není $\mathcal{P}$.“ zaručí zcela jednoduše existence objektu s určitou vlastností. O kterou vlastnost se jedná?

II-2.23 V predikátovém počtu prokažte platnost sylogismů se závěrem „Některé $\mathcal{S}$ je $\mathcal{P}$." a s premisami

(1) Některé $\mathcal{P}$ je $\mathcal{M}$.	(1) Každé $\mathcal{P}$ je $\mathcal{M}$.
(2) Každé $\mathcal{M}$ je $\mathcal{S}$.	(2) Každé $\mathcal{M}$ je $\mathcal{S}$.

Který z uvedených sylogismů je pouze aristotelsky platný (a za jakého předpokladu)?

II-2.24 Zdůvodněte Pythagorovu větu pomocí následující dvojice diagramů:

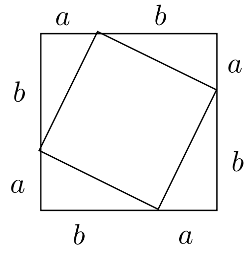

Diagram 6a

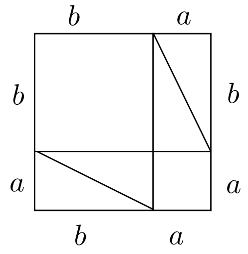

Diagram 6b

II-2.25 Aplikujte Eukleidovu větu o odvěsně na obě odvěsny pravoúhlého trojúhelníka $\triangle$ABC; na základě těchto aplikací zdůvodněte Pythagorovu větu.

§3

DODATEK K PREDIKÁTOVÉMU POČTU

V tomto paragrafu nejprve uvedeme, jak se dříve vyučovala nauka o sylogismech. Seznam aristotelsky platných sylogismů může každému čtenáři sloužit jako kontrola řešení jednotlivých úloh o platnosti sylogismů. Pro ty, kteří se zajímají nebo musí zajímat o středověké chápání sylogistiky[1], je tento seznam důležitý sám o sobě.

Ve druhé části dodatku se budeme podrobněji zabývat vlastnostmi kvantifikace, zejména změnou pořadí kvantifikace a výrokových spojek. Dovednosti, které získáme, pak umožní převádět formule do prenexního tvaru, o jehož významu jsme pojednali již v prvním odstavci předcházejícího paragrafu.

* * *

Než přikročíme ke zkoumání sylogismů, zabývejme se vztahy soudů, jež můžeme vytvořit pomocí pouhých dvou predikátů $\mathcal{S}$ a $\mathcal{P}$. Zápisem $\mathcal{S} * \mathcal{P}$ budeme rozumět jakýkoli soud, ve kterém se vyskytují predikáty $\mathcal{S}$ a $\mathcal{P}$, a nadto predikát $\mathcal{S}$ se vyskytuje jakožto prvý (a tudíž predikát $\mathcal{P}$ jako druhý); znak $*$ zastupuje některý ze znaků ***a, i, e, o***.

Zopakujme seznam soudů (i) z prvního paragrafu této kapitoly a ke každému soudu ještě připišme jeho zápisy pomocí symbolů.

	$\mathcal{S}\boldsymbol{a}\mathcal{P}$	Každé $\mathcal{S}$ je $\mathcal{P}$	zapsatelné formulí	$(\forall x)(\mathcal{S}(x) \rightarrow \mathcal{P}(x))$
			nebo formulí	$(\forall s)\mathcal{P}(s)$,
(i)	$\mathcal{S}\boldsymbol{e}\mathcal{P}$	Žádné $\mathcal{S}$ není $\mathcal{P}$	zapsatelné formulí	$(\forall x)(\mathcal{S}(x) \rightarrow \neg\mathcal{P}(x))$
			nebo formulí	$(\forall s)\neg\mathcal{P}(s)$,
	$\mathcal{S}\boldsymbol{i}\mathcal{P}$	Některé $\mathcal{S}$ je $\mathcal{P}$	zapsatelné formulí	$(\exists x)(\mathcal{S}(x) \mathbin{\&} \mathcal{P}(x))$
			nebo formulí	$(\exists s)\mathcal{P}(s)$,
	$\mathcal{S}\boldsymbol{o}\mathcal{P}$	Některé $\mathcal{S}$ není $\mathcal{P}$	zapsatelné formulí	$(\exists x)(\mathcal{S}(x) \mathbin{\&} \neg\mathcal{P}(x))$
			nebo formulí	$(\exists s)\neg\mathcal{P}(s)$.

Komentujme nyní formule uvedené v seznamu (i). Ve formulích uvedených jako první probíhá proměnná x všechny uvažované objekty (v motivujícím příkladu z prvého paragrafu „všechny ženy ve zkoumané skupině“). Většinou se v současné době používá tento zápis, jenž má tu výhodu, že neužívá více druhů proměnných. (Podrobněji: sylogismus jsme definovali jako trojici soudů a při jejich zápisu formulemi prvého typu užíváme ve všech třech soudech jen jeden

[1] Mnozí studenti humanitních oborů zjistí ke svému překvapení, že patří do druhé skupiny. Souvislosti jsou opravdu nečekané. Sloh baroko byl prý nazván podle mnemotechnického slůvka z tabulky uvedené dále v textu. Odpůrci nového slohu chtěli vyjádřit formální správnost, ale naprostou nepřirozenost vzniklého slohu. Sylogismus označovaný ve středověku jako b***aroco*** pokládali za příklad nepřirozené úvahy, a proto prý zvolili toto označení odmítaného slohu. (Doufejme, že vy, milý čtenáři, nepovažujete za nepřirozený druhý sylogismus vyšetřovaný v příkladu 8 z prvního paragrafu — přestože je typu b***aroco***.)

druh proměnných.) Ve formulích uváděných jako druhé předpokládáme, že proměnná s probíhá právě objekty, které mají vlastnost $\mathcal{S}$, a takovýto zápis *subjekt-predikátového soudu* je bližší Aristotelovu pojetí — přehledněji formuluje výpověď o tom, zda *subjekt* s má, či nemá vlastnost (*predikát*) $\mathcal{P}$.

*

Aristotelem popsané vztahy *jednotlivých* soudů ze seznamu (i) můžeme zobrazit tzv. logickým čtvercem[2]

$$\begin{array}{cccccc} & & \text{kontrárnost} & & & \\ (\forall s)\mathcal{P}(s) & \mathcal{S}\boldsymbol{a}\mathcal{P} & \longleftrightarrow & \mathcal{S}\boldsymbol{e}\mathcal{P} & (\forall s)\neg\mathcal{P}(s) \\ & \Downarrow & \times & \Downarrow & \\ (\exists s)\mathcal{P}(s) & \mathcal{S}\boldsymbol{i}\mathcal{P} & \longleftrightarrow & \mathcal{S}\boldsymbol{o}\mathcal{P} & (\exists s)\neg\mathcal{P}(s) \\ & & \text{subkontrárnost,} & & & \end{array}$$

ve kterém $\Downarrow$ znamená vyplývání (cizím slovem subsumpci, tzn. možnost dokázat v predikátovém počtu implikace $(\forall s)\mathcal{P}(s) \rightarrow (\exists s)\mathcal{P}(s)$ a $(\forall s)\neg\mathcal{P}(s) \rightarrow (\exists s)\neg\mathcal{P}(s)$), vztahy po diagonálách jsou vztahy vzájemné spornosti (kontradikce, tj. soudy na diagonálách jsou jeden negací druhého). Zajímavý je vztah kontrárnosti (v češtině se užívá protiva), který znamená, že nemohou být pravdivé oba soudy zároveň, mohou však zároveň být oba nepravdivé, a vztah subkontrárnosti (česky podprotiva), který znamená, že mohou být pravdivé oba soudy zároveň, ale nemohou zároveň být oba nepravdivé.

Důrazně zopakujme, že obor proměnné musí být vždy neprázdný, pročež se při užití proměnné probíhající objekty s jistou vlastností blížíme pojetí Aristotela, který předpokládal neprázdnost všech skupin vymezených jednotlivými vlastnostmi (viz motivaci pojmu aristotelsky platných sylogismů v prvním paragrafu). Pokud bychom zachovali značení se dvěma predikáty, tzn. např. $\mathcal{S}\boldsymbol{a}\mathcal{P}$ jako $(\forall x)(\mathcal{S}(x) \rightarrow \mathcal{P}(x))$, museli bychom předpokládat navíc, že nějaký objekt s vlastností $\mathcal{S}$ existuje, tj. $(\exists x)\mathcal{S}(x)$. Jinak totiž uvedené vztahy v logickém čtverci *nemusí* platit. Při neexistenci objektu s vlastností $\mathcal{S}$ nemůže např. platit implikace $(\forall x)(\mathcal{S}(x) \rightarrow \mathcal{P}(x)) \rightarrow (\exists x)(\mathcal{S}(x) \,\&\, \mathcal{P}(x))$.

Na vztahu soudů po diagonále v logickém čtverci speciálně vidíme, že možnost chápat $(\exists x)\varphi$ jako $\neg(\forall x)\neg\varphi$ se odkazuje až k Aristotelovi (384–322 př. Kr.), naproti tomu Eukleidovi (315–271 př. Kr.) se připisuje spíše chápání „existuje" jako „lze sestrojit", a tedy jeho pojetí by více odpovídalo intuicionistickému (viz závěr našeho textu).

*

Začněme se nyní zabývat sylogismy. Jestliže dodržíme dohodu, že první premisa v sylogismu se týká predikátů $\mathcal{P}$ a $\mathcal{M}$ (a následně druhá predikátů $\mathcal{S}$ a $\mathcal{M}$), rozpadne se soubor sylogismů do čtyř skupin (nazývaných figurami) podle pořadí predikátů v jednotlivých premisách[3]:

[2] V dochovaných textech se forma logického čtverce vyskytuje poprvé u Apuleia z Madaury (125 po Kr.).

[3] Pozorujete-li výskyt predikátu $\mathcal{M}$ v jednotlivých figurách, získáte obrázek \ | | / a mnemotechnická pomůcka „andělská křidélka" (vidíte je v obrázku?) pomáhala zapamatovat

I figura	II figura	III figura	IV figura
$\mathcal{M} * \mathcal{P}$	$\mathcal{P} * \mathcal{M}$	$\mathcal{M} * \mathcal{P}$	$\mathcal{P} * \mathcal{M}$
$\mathcal{S} * \mathcal{M}$	$\mathcal{S} * \mathcal{M}$	$\mathcal{M} * \mathcal{S}$	$\mathcal{M} * \mathcal{S}$

Již v prvním paragrafu jsme uvedli, že od středověku se studenti učili platné sylogismy vyjmenovávat asi tak, jako se dnes učí vyjmenovaná slova. I užití bylo podobné: není-li slovo odvoditelné ze slova vyjmenovaného, víme, že máme psát měkké „i“; analogicky studenti věděli, že sylogismus, který není mezi vybranými, není aristotelsky platný, a naopak kterýkoli z vybraných je aristotelsky platný. Naštěstí pro studenty starší doby z celkového počtu 256 sylogismů je jen několik sylogismů aristotelsky platných[4]. K zapamatování aristotelsky platných sylogismů byly vytvořeny nejrůznější mnemotechnické pomůcky, zejména pak slova b***a***rb***a***r***a***, c***e***l***a***r***e***nt, c***e***s***a***r***e***, atd[5]. Tučně vyznačené samohlásky v „mnemotechnických slovech“ určují tvar jednotlivých soudů v sylogismu. Student musel vědět, ke které figuře slovo patří, a pak již uměl příslušný sylogismus vytvořit: b***a***rb***a***r***a*** patří první figuře, a tedy příslušný sylogismus z $\mathcal{M}\boldsymbol{a}\mathcal{P}$ a $\mathcal{S}\boldsymbol{a}\mathcal{M}$ umožňuje odvodit $\mathcal{S}\boldsymbol{a}\mathcal{P}$ (pořadí predikátů v závěru je povinné — povšimněte si, že tedy tento sylogismus odpovídá tranzitivitě implikace); c***e***s***a***r***e*** patří do druhé figury, a tedy příslušný sylogismus má premisy $\mathcal{P}\boldsymbol{e}\mathcal{M}$, $\mathcal{S}\boldsymbol{a}\mathcal{M}$ a závěr $\mathcal{S}\boldsymbol{e}\mathcal{P}$, atd.

Mnemotechnická slova v prvním sloupci následující tabulky zastupují platné sylogismy; mnemotechnická slova v dalších třech sloupcích odpovídají sylogismům platným jen aristotelsky, přitom záhlaví příslušných sloupců udávají podmínky zaručující aristotelskou platnost zaznamenaných sylogismů.

si charakteristiku jednotlivých figur (pochopitelně jen tomu, kdo si pamatoval, že $\mathcal{P}$ je v prvém soudu). Připomeňme, že závěr sylogismu je vždy tvaru $\mathcal{S} * \mathcal{P}$, pročež jeho tvar neovlivňuje zařazování sylogismů do jednotlivých figur.

Vlastnosti měly své názvy. V závěru se vyskytují dvě, z nichž prvá ($\mathcal{S}$) se nazývala terminus (nebo conceptus) minor (nižší) a druhá ($\mathcal{P}$) terminus major (vyšší). Vlastnosti vyskytující se pouze v premisách ($\mathcal{M}$) se říkalo terminus medius (střední). Premisa se nazývala minor nebo major podle toho, které vlastnosti se týkala.

[4] Aristotelsky platných je přesně 24, což matematicky přesně ukázal G. W. Leibniz (viz [Le1]), devět z nich je však platných jen za určitých dodatečných předpokladů (viz následující tabulku), pročež platných sylogismů je přesně 15.

[5] první verze v první polovině třináctého století Williamem z Shyreswoodu, vylepšil a rozšířil Petrus Hispanius (1210–1277)

	bez předpokladů	M neprázdné	S neprázdné	P neprázdné
I figura	barbara, celarent, darii, ferio		barbari, celaront	
II figura	ces are, festino, camestres, baroco		cesaro, camestros	
III figura	bocardo, disamis, datisi, ferison	darapti, felapton		
IV figura	calemes, fresison, dimatis	fesapo	calemos	bramalip

Pro ilustraci předchozího seznamu platných sylogismů uveďme teď, kterými sylogismy jsme se zabývali v prvním paragrafu. V úlohách 1–11 jsme zkoumali sylogismy I figury; jeden platný sylogismus byl uveden v první úloze (barbara) a jeden aristotelsky platný se nacházel v úloze 5 (barbari). V úloze 8 jste měli objevit platný sylogismus (celarent) a jeden aristotelsky platný (celaront). Zbývající dva platné sylogismy jste měli nalézt v úlohách 6 (darii) a 9 (ferio). (Sylogismy první figury se také zabývalo cvičení II-1.6.) Důkazy platnosti sylogismů I figury v predikátovém počtu (tzn. vyvození závěru sylogismu z premis sylogismu a vyvozovacích principů popsaných ve druhém paragrafu) jsme předvedli v příkladech 7 a 8 §2 kap. II a úlohách 34 a 35 téhož paragrafu.

II figura byla zkoumána v prvním příkladu (cesare, aristotelsky platný cesaro, dva neplatné), v příkladech 4 (festino), 6 (aristotelsky platné camestros), 7 (neplatný) a 8 (camestres, baroco a dva neplatné). Sylogismus z úvodu paragrafu byl z III figury (aristotelsky platné darapti) a dále se III figurou zabýval druhý (ferison a tři neplatné) a pátý příklad (aristotelsky platné felapton), cvičení II-1.3 (bocardo a tři neplatné), II-1.7 (neplatný), II-1.8 (disamis) a II-1.9 (datisi a tři neplatné). Sylogismů IV figury se týkají cvičení II-1.4 (camenes, aristotelsky platné camelos a dva neplatné) a II-1.10 (aristotelsky platné bamalip a tři neplatné); ve cvičení II-1.11 jsou ze dvanácti sylogismů jen dva platné ((a) fresison, (b) dimatis) a jeden aristotelsky platný ((c) calemos).

Aristotelés si byl vědom odvoditelnosti všech sylogismů ze sylogismů figury první (dokonce jen ze sylogismů barbara, celarent), ve středověkém značení prozrazují první písmena mnemotechnických slov příslušná jednotlivým sylogismům, z kterého sylogismu první figury je možno označený sylogismus odvodit, další písmeno podává dokonce návod jak[6]. Vědomí odvoditelnosti všech sylogismů ze sylogismů první figury nás motivovalo k tomu, abychom v textu předchozího paragrafu předvedli jen důkazy sylogismů první figury (viz příklady 7, 8 a úlohy 34 a 35), avšak ve cvičeních II-2.22–II-2.23 jste si nadto měl, vážený čtenáři, dokázat platnost sylogismů ferison, camestres a dimatis a aristotelských sylogismů felapton, camestros a bamalip.

*

[6] Případný zájemce nechť konzultuje např. [Ben] str. 21 nebo [Sou]. Uvědomte si, že Aristotelés volbou základních sylogismů a formulací odvozovacích pravidel vlastně zavádí axiomatický systém teorie sylogismů.

Kromě vyjmenování platných sylogismů vypracovala tradiční sylogistika také pravidla, která určují platnost sylogismů. Před jejich zavedením je však zapotřebí objasnit některé klasické pojmy.

Označení soudů pomocí samohlásek $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{i}$ pochází z latinského $\boldsymbol{a}$ff$\boldsymbol{i}$rmo (tvrdím) a písmena $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{o}$ pocházejí z n$\boldsymbol{e}$g$\boldsymbol{o}$ (popírám). Soudy dělíme — v souhlase s významem uvedených slov — na **kladné** (označované znaky $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{i}$; při zápisu těchto soudů formulemi se nevyskytuje negace) a **záporné** (označené samohláskami $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{o}$). Z druhého hlediska dělíme soudy na **obecné** (značené samohláskami $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{e}$; tyto soudy vypovídají o všech uvažovaných objektech a v jejich matematickém vyjádření se vyskytuje obecná kvantifikace) a **částečné** (označené písmeny $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{o}$; tyto soudy vypovídají pouze o některých objektech a jejich matematické vyjádření obsahuje existenční kvantifikaci).

Posledním pomocným pojmem bude tzv. **vyčerpanost**. V soudu typu $\mathcal{S}\boldsymbol{a}\mathcal{P}$ je vyčerpán predikát $\mathcal{S}$, v soudu typu $\mathcal{S}\boldsymbol{o}\mathcal{P}$ je vyčerpán predikát $\mathcal{P}$ a v soudu typu $\mathcal{S}\boldsymbol{e}\mathcal{P}$ jsou vyčerpány oba. Můžeme se pochopitelně spokojit s uvedenou definicí, avšak mnohem lepší je nahlédnout také její motivaci. Podle příkladu 8 prvého paragrafu a podle cv. II-1.6 jsou predikáty vyčerpané přesně v těch soudech, ve kterých se tyto predikáty přenášejí na silnější predikát[7].

Pravidla pro rozpoznávání aristotelsky platných sylogismů jsou:

(1) Ze dvou záporných premis nic[8] neplyne (viz cvičení II-1.5).
(2) Ze dvou částečných premis nic neplyne (viz příklad 3 §1 druhé kapitoly).
(3) Závěr je záporný, právě když alespoň jedna premisa je záporná. Je-li alespoň jedna premisa částečná, je závěr částečný.
(4) Predikát $\mathcal{M}$ musí být vyčerpán alespoň v jedné premise.
(5) Pokud je predikát vyčerpán v závěru, musí být vyčerpán v premise (v té, ve které se vyskytuje).

Systém platných sylogismů získáme, když pravidlo (3) zesílíme na pravidlo (3′):

(3’) Závěr je záporný, právě když alespoň jedna premisa je záporná a je částečný, právě když je alespoň jedna premisa částečná.

Místo luštění nějaké křížovky doporučuji čtenáři si ověřit, že předchozích pět pravidel tvoří síto, kterým propadnou všechny aristotelsky neplatné sylogismy a aristotelsky platné jsou zadrženy. Při použití pravidla (3′) se „oka síta zvětší“ a propadnou navíc

[7] Explicitněji: Například vyčerpanost predikátu $\mathcal{S}$ v soudu typu $\mathcal{S}\boldsymbol{a}\mathcal{P}$ (resp. typu $\mathcal{S}\boldsymbol{e}\mathcal{P}$) znamená, že za předpokladu, že $\mathcal{S}'$ je silnější než $\mathcal{S}$, umíme ze soudu typu $\mathcal{S}\boldsymbol{a}\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{S}\boldsymbol{e}\mathcal{P}$), týkajícího se predikátů $\mathcal{S}$ a $\mathcal{P}$, vyvodit soud $\mathcal{S}'\boldsymbol{a}\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{S}'\boldsymbol{e}\mathcal{P}$) téhož typu, avšak týkající se nyní „nového“ predikátu $\mathcal{S}'$ a predikátu $\mathcal{P}$.

[8] Takové pravidlo je však zcela v rozporu s výsledky výrokového počtu, vždyť přece víme, že z každého soudu musí plynout minimálně on sám! Navíc ze soudů (1) „Žádné $\mathcal{M}$ není $\mathcal{P}$.“ (tvaru $\boldsymbol{e}$) a (2) „Některé $\mathcal{M}$ není $\mathcal{S}$.“ (tvaru $\boldsymbol{o}$) velmi jednoduše vyvodíme tvrzení (3) „Existuje individuum, které nemá vlastnost $\mathcal{S}$ ani vlastnost $\mathcal{P}$.“
Umíte vysvětlit tyto rozpory? — Pokud se Vám to nepodařilo na první pokus, podívejte se pozorně na tvar posledního tvrzení a dále zauvažujte, proč nevadí, že z předpokladů (1) a (2) je dokazatelný např. soud (2). — Pochopitelně, vždyť (3) není subjekt-predikátový soud (není to žádné tvrzení tvaru uvedeného v seznamu (i)) a soud (2) se týká predikátu $\mathcal{M}$, což jsme pro závěrečné soudy zakázali. Zbývá jedině konstatovat, že uvedené klasické pravidlo je formulováno příliš zkratkovitě a že místo slůvka „nic“ by bylo korektnější užít slovní spojení „žádný *subjekt-predikátový soud* vypovídající o predikátech $\mathcal{S}$ a $\mathcal{P}$“.

sylogismy, které jsou platné jen aristotelovsky. Když člověk vidí, jak se postupně vyškrtávají neplatné sylogismy a zažívá souhru jednotlivých pravidel, je naplněn obdivem k jejich tvůrcům. Pokud se rozhodnete si tuto hru zahrát, je nejlepší začít vyškrtávat pomocí prvních tří pravidel, která vyloučí ve všech čtyřech figurách najednou řadu sylogismů, které jsou aristotelsky neplatné.

*

Náš výklad užíval středověké pojetí a symboliku více než původní Aristotelovy formulace. Uveďme proto krátce nejdůležitější rozdíly. Aristotelés výslovně uznává jen 14 platných sylogismů, zejména pouze naznačuje sylogismy dovoditelné za podmínky neprázdnosti $\mathcal{S}$ (barbari, celaront, cesaro, camestros a calemos). Navíc nezavedl explicitně čtvrtou figuru, i když některé její sylogismy výslovně uvádí a jiné naznačuje. Zavedení čtvrté figury se běžně připisovalo Galénovi (129–199 po Kr.), podrobnější rozbory dvacátého století ukazují, že asi neprávem; dnes někteří tvrdí, že Aristotelovy formulace[9] opravňují připsání všech čtyř figur Aristotelovi, jiní zastávají stanovisko, že čtvrtá figura pochází až z 6. stol. po Kr.

* * *

Ve druhé části dodatku se budeme nejprve zabývat možností změnit pořadí kvantifikace a implikace za předpokladu, že v jedné ze složek implikace kvantifikovaná proměnná nemá volný výskyt. Nejdůležitější případ takové záměny popisuje axiom distribuce, je tedy přirozené, že v tabulce shrnující možnosti záměny vytváří axiom distribuce jednu z implikací potřebných pro ekvivalenci uvedenou pod bodem (1). Tabulka vyčerpává všechny čtyři možnosti dané volbou typu kvantifikace a volbou, zda formulí, ve které se kvantifikovaná proměnná nevyskytuje volně, je antecedent, nebo konsekvent.

Při **záměně pořadí kvantifikace a implikace** můžeme kvantifikátor přesunout ke konsekventu za předpokladu[10], že v antecedentu nemá kvantifikovaná proměnná volný výskyt; typ kvantifikace se při tomto přesunu nemění. Jestliže naopak nemá kvantifikovaná proměnná volný výskyt v konsekventu, můžeme kvantifikátor přesunout k antecedentu, musíme však *změnit jeho typ*. O formulích, které vzniknou popsaným přesunem, je možno dokázat již v predikátovém počtu, že jsou ekvivalentní formulím výchozím. Uvedená pravidla shrnuje následující tabulka, ve které φ a ψ označují libovolné formule:

[9] V subjekt-predikátových soudech popsaných v seznamu (i) v §1 kap. II nejsou predikáty $\mathcal{S}$, $\mathcal{P}$ (v klasické terminologii nazývané „subjekt“ a „predikát“) symetrické. Ve druhé figuře vystupuje střední člen $\mathcal{M}$ dvakrát jako „predikát“ a ve třetí figuře vystupuje střední člen dvakrát jako „subjekt“. Jak v první, tak ve čtvrté figuře vystupuje střední člen jednou jako „subjekt“ a jednou jako „predikát“. Pokud — jako Aristotelés — netrváme na pořadí „subjekt“-„predikát“ v závěru sylogismu, můžeme spojit první a čtvrtou figuru do jedné; pokud na pořadí „subjekt“-„predikát“ v závěru sylogismu — tak jako v celém našem textu podle středověké tradice — trváme, musíme první a čtvrtou figuru odlišit.

[10] Ekvivalentně: pokud jsou stejné systémy vázaných výskytů proměnných ve formulích na obou stranách ekvivalencí (1) a (3).

(1) $\vdash (\forall x)(\varphi \to \psi) \equiv [\varphi \to (\forall x)\psi]$, *pokud proměnná x nemá volný výskyt ve formuli φ;*
(2) $\vdash (\forall x)(\varphi \to \psi) \equiv [(\exists x)\varphi \to \psi]$, *pokud proměnná x nemá volný výskyt ve formuli ψ;*
(3) $\vdash (\exists x)(\varphi \to \psi) \equiv [\varphi \to (\exists x)\psi]$, *pokud proměnná x nemá volný výskyt ve formuli φ;*
(4) $\vdash (\exists x)(\varphi \to \psi) \equiv [(\forall x)\varphi \to \psi]$, *pokud proměnná x nemá volný výskyt ve formuli ψ.*

Již jsme uvedli, že implikace zleva doprava v ekvivalenci (1) je axiomem specifikace. Místo popisování motivace druhé implikace v ekvivalenci (1) ukážeme prostě, že je důsledkem principů motivovaných ve druhém paragrafu. Týž přístup zachováme i k ekvivalenci (2), opět ji dokážeme v predikátovém počtu, tzn. pouze z principů, o jejichž intuitivnosti jsme pojednali v §2; tím snad překonáme pochopitelnou nedůvěru k faktu, že typ kvantifikace je potřeba změnit. Formule (3) a (4) již dokazovat nebudeme doufajíce, že čtenář uvěří, že hlavní ideou důkazu je vztah mezi velkou a malou kvantifikací popsaný axiomem $(\exists\forall)$, jenž aplikujeme na formule (1) a (2) (podrobněji viz např. §4 kap. II [So]).

Příklad 1. Předpokládejme, že proměnná x nemá volný výskyt ve formuli φ, a ukažme dokazatelnost formule

$$[\varphi \to (\forall x)\psi] \to (\forall x)(\varphi \to \psi) \tag{ii}$$

bez mimologických předpokladů. Pro jednoduchost budeme při tom předpokládat, že formule $\varphi \to (\forall x)\psi$ je uzavřená; tento předpoklad poněkud ulehčí prokazování, jehož idea tak více vynikne, tvrzení však lze dokázat i bez něho. Nechť $\boldsymbol{T}$ je teorie, jejíž jazyk umožňuje vybudování formule $\varphi \to (\forall x)\psi$ a která má jako jediný axiom posledně jmenovanou formuli. Dokazatelnost formule (*ii*) v predikátovém počtu prokážeme např. v následujících krocích:

(a) $\vdash (\forall x)\psi \to \psi$, uvedená formule je prostě axiomem specifikace, v němž ve formuli ψ substituujeme proměnnou x za sebe samu;
(b) $\boldsymbol{T} \vdash \varphi \to (\forall x)\psi$, jednoduše sepíšeme axiom teorie;
(c) $\boldsymbol{T} \vdash \varphi \to \psi$, princip tranzitivity implikace aplikovaný na formule uvedené v bodech (b) a (a);
(d) $\boldsymbol{T} \vdash (\forall x)(\varphi \to \psi)$, generalizace;
(e) $\vdash [\varphi \to (\forall x)\psi] \to (\forall x)(\varphi \to \psi)$, teorie $\boldsymbol{T}$ má jediný axiom $\varphi \to (\forall x)\psi$, a proto po užití důkazu dedukcí již bude systém zbývajících axiomů prázdný, tzn. naše formule bude dokazatelná bez mimologických axiomů (při užití důkazu dedukcí užíváme předpoklad, že formule $\varphi \to (\forall x)\psi$ je uzavřená).

Příklad 2. Prokažme dokazatelnost formule (2) bez mimologických předpokladů.

(a) $\vdash (\forall x)(\neg\psi \to \neg\varphi) \equiv [\neg\psi \to (\forall x)\neg\varphi]$, první tvrzení aplikované na formule $\neg\psi$ a $\neg\varphi$, předpoklad; že x nemá volný výskyt ani ve formuli $\neg\psi$;

(b) $\vdash (\forall x)(\neg\psi \to \neg\varphi) \equiv [\neg\psi \to \neg(\exists x)\neg\neg\varphi]$, reformulace formule (a) využívající vztah mezi univerzální a existenční kvantifikací popsaný axiomem $(\exists\forall)$;

(c) $\vdash \neg\neg\varphi \equiv \varphi$ axiom predikátového počtu vzniklý nahrazením proměnné p formulí φ v zákonu dvojité negace $\neg\neg\mathsf{p} \equiv \mathsf{p}$ (zákon dvojité negace je tautologií výrokového počtu);

(d) $\vdash \neg(\exists x)\neg\neg\varphi \equiv \neg(\exists x)\varphi$ důkaz ekvivalencí aplikovaný na formuli $\neg(\exists x)\neg\neg\varphi$ a využívající dokazatelnost (c);

(e) $\vdash (\forall x)(\neg\psi \to \neg\varphi) \equiv [\neg\psi \to \neg(\exists x)\varphi]$, důkaz ekvivalencí aplikovaný na formuli (b) a užívající dokazatelnost (d);

(f) $\vdash (\neg\psi \to \neg\varphi) \equiv (\varphi \to \psi)$ axiom predikátového počtu vzniklý nahrazením proměnné p formulí φ a proměnné q formulí ψ v tautologii $(\neg\mathsf{q} \to \neg\mathsf{p}) \equiv (\mathsf{p} \to \mathsf{q})$;

(g) $\vdash (\forall x)(\varphi \to \psi) \equiv [\neg\psi \to \neg(\exists x)\varphi]$, důkaz ekvivalencí aplikovaný na formuli (e) a užívající dokazatelnost (f);

(h) $\vdash [\neg\psi \to \neg(\exists x)\varphi] \equiv [(\exists x)\varphi \to \psi]$, axiom predikátového počtu vzniklý nahrazením proměnné p formulí $(\exists x)\varphi$ a proměnné q formulí ψ, a to opět v tautologii $(\neg\mathsf{q} \to \neg\mathsf{p}) \equiv (\mathsf{p} \to \mathsf{q})$;

(i) $\vdash (\forall x)(\varphi \to \psi) \equiv [(\exists x)\varphi \to \psi]$, důkaz ekvivalencí aplikovaný na formuli (g) a užívající dokazatelnost (h).

*

Zabývejme se nyní možností přeznačit vázanou proměnnou a získat tak formuli ekvivalentní původní formuli. Abyste si uvědomil, vážený čtenáři, naprostou přirozenost faktu, že přeznačením vázané proměnné dostaneme tutéž výpověď, uvažte jakékoli tvrzení φ o proměnné „člověk“; všude v tvrzení φ nahraďte slovo „člověk“ souslovím „lidská bytost“ a získejte tak tvrzení ψ. Nyní pochopitelně tvrzení „Každý člověk má vlastnost φ.“ a tvrzení „Každá lidská bytost má vlastnost ψ.“ mají přesně týž význam.

Při přeznačování vázaných proměnných musíme opět dbát toho, abychom nezměnili význam formule, analogicky jako jsme tomuto věnovali pozornost při formulaci axiomu specifikace — budeme tudíž opět požadovat, aby systém vázaných výskytů proměnných byl v obou formulích týž a aby nahrazovaná i nahrazující proměnné byly téhož druhu. (Uvědomme si, že např. formule $(\forall x)(x = y)$ a $(\forall y)(y = y)$ mají různé významy, přestože druhá formule vzniká z první přeznačením vázané proměnné; dále nahlédněme, že v první formuli má proměnná y volný výskyt a ve druhé nikoli.)

Přeznačování vázaných proměnných. Nechť formule $\varphi(u/v)$ označuje formuli vzniklou z formule φ nahrazením proměnné u proměnnou v (téhož druhu) a nechť *systém výskytů vázaných proměnných ve formuli* $(\forall u)\varphi$ *je přesně týž jako systém výskytů vázaných proměnných ve formuli* $(\forall v)\varphi(u/v)$. Pak bez použití mimologických axiomů je možno dokázat

ekvivalenci $(\forall u)\varphi \equiv (\forall v)\varphi(u/v)$ a také ekvivalenci $(\exists u)\varphi \equiv (\exists v)\varphi(u/v)$.

Jako poslední poznatek o kvantifikaci formulujme **nepodstatnost kvantifikace proměnné, jež nemá ve formuli volný výskyt:**
Nemá-li proměnná u volný výskyt ve formuli φ, jsou

ekvivalence $\varphi \equiv (\forall u)\varphi$ a také ekvivalence $\varphi \equiv (\exists u)\varphi$

dokazatelné bez užití mimologických axiomů.

Uvedené tvrzení je velice intuitivní: když se ve formuli proměnná nevyskytuje, nemá cenu ji kvantifikovat (jestliže proměnná nemá volný výskyt, můžeme si, v důsledku možnosti přeznačovat vázané proměnné, představovat, že se nevyskytuje vůbec).

Rovněž prokázání dokazatelnosti ekvivalence bez užití mimologických axiomů je velice jednoduché: Na jedné straně formule $(\forall u)\varphi \rightarrow \varphi$ je přímo axiomem specifikace a na straně druhé je formule $\varphi \rightarrow \varphi$ axiomem predikátového počtu (vzniklým dosazením do tautologie $\mathsf{p} \rightarrow \mathsf{p}$), z kterého získáme generalizací $(\forall u)(\varphi \rightarrow \varphi)$ a následně obdržíme $\varphi \rightarrow (\forall u)\varphi$ prostou aplikací axiomu distribuce (při níž užíváme předpoklad, že proměnná u nemá volný výskyt ve formuli φ).

*

V dodatku k výrokovému počtu jsme ukázali, že každou formuli výrokového počtu je možno zapsat v jakémsi jednoduchém tvaru. Výsledek o možnosti převádět formule na formule jednoduchého tvaru ukážeme teď i pro predikátový počet. Pro predikátový počet je význačná kvantifikace a proto „jednoduché“ formule budou ty, které mají přehlednou kvantifikaci.

O formuli budeme říkat, že je v **prenexním tvaru** (*prenexní formě*), jestliže splňuje následující dvě podmínky:

(a) má všechny kvantifikátory soustředěny na začátek formule, tzn. je tvaru $(Q_1u_1)\dots(Q_nu_n)\psi$, kde pro každé nenulové m menší nebo rovno n označuje symbol Q_m buďto symbol $\forall$, nebo symbol $\exists$ a formule ψ již kvantifikátory neobsahuje, tj. je otevřená;

(b) každá proměnná je kvantifikována nejvýše jednou, tj. pro formuli zapsanou ve tvaru z bodu (a) jsou proměnné $u_1, \dots, u_n$ od sebe různé.

Posloupnost kvantifikací $(Q_1u_1)\dots(Q_nu_n)$ se nazývá **prefixem** a formule ψ se nazývá **(otevřeným) jádrem** formule $(Q_1u_1)\dots(Q_nu_n)\psi$.

Každou formuli je možno vyjádřit v prenexním tvaru, tzn. ke každé formuli φ predikátového počtu existuje formule ϑ v prenexním tvaru, taková, že ekvivalence $\varphi \equiv \vartheta$ je dokazatelná bez použití mimologických axiomů.

Příklad 3. Převeďme formuli

$$(\forall x)(\exists y)\mathcal{P}(x,y) \rightarrow (\exists z)(\forall x)\mathcal{P}(z,x)$$

do prenexního tvaru.

V konsekventu i antecedentu je kvantifikována proměnná x, přeznačme je např. v konsekventu, čímž získáme formuli $(\forall x)(\exists y)\mathcal{P}(x,y) \rightarrow (\exists z)(\forall q)\mathcal{P}(z,q)$.

Nyní můžeme zaměnit pořadí implikace a kvantifikace proměnné x nebo pořadí implikace a kvantifikace proměnné z podle naší volby. Rozhodněme se např. pro druhý případ; podobně si budeme volit pořadí kvantifikací, které zaměňujeme s implikací i v dalších případech.

Postupně získáváme formule ekvivalentní s formulí výchozí

$$\begin{gathered}
(\forall x)(\exists y)\mathcal{P}(x,y) \rightarrow (\exists z)(\forall q)\mathcal{P}(z,q),\\
(\exists z)[(\forall x)(\exists y)\mathcal{P}(x,y) \rightarrow (\forall q)\mathcal{P}(z,q)],\\
(\exists z)(\forall q)[(\forall x)(\exists y)\mathcal{P}(x,y) \rightarrow \mathcal{P}(z,q)],\\
(\exists z)(\forall q)(\exists x)[(\exists y)\mathcal{P}(x,y) \rightarrow \mathcal{P}(z,q)],\\
(\exists z)(\forall q)(\exists x)(\forall y)[\mathcal{P}(x,y) \rightarrow \mathcal{P}(z,q)].
\end{gathered}$$

Poslední formule již je v prenexním tvaru. Při jiném pořadí záměny kvantifikace můžeme však obdržet např. formuli

$$(\exists z)(\exists x)(\forall y)(\forall q)[\mathcal{P}(x,y) \rightarrow \mathcal{P}(z,q)],$$

která je také ekvivalentní formuli výchozí.

V předchozím textu jsme varovali, že záměnou univerzální a existenční kvantifikace může dojít ke změně významu formule. Tentokrát sice různou volbou změny pořadí kvantifikace a implikace můžeme získat formule vniklé záměnou pořadí existenční a univerzální kvantifikace, možnost změny významu formule však nehrozí. To je způsobeno faktem, že při záměně pořadí kvantifikace a implikace smí být proměnná kvantifikována buď pouze v antecedentu, nebo pouze v konsekventu.

Úloha 1. Sestrojte prenexní tvar formule

$$(iii) \qquad (\exists x)[(\forall y)\mathcal{Q}(x,y) \rightarrow (\forall x,y)\mathcal{Q}(x,y)].$$

$^{u1)}$ Ve formuli (iii) nejprve přeznačíme vázané proměnné a poté třikrát zaměníme pořadí kvantifikace a implikace:

$$\begin{gathered}
(\exists x)[(\forall y)\mathcal{Q}(x,y) \rightarrow (\forall x_1,y_1)\mathcal{Q}(x_1,y_1)]\\
(\exists x)(\exists y)[\mathcal{Q}(x,y) \rightarrow (\forall x_1,y_1)\mathcal{Q}(x_1,y_1)]\\
(\exists x)(\exists y)(\forall x_1,y_1)[\mathcal{Q}(x,y) \rightarrow \mathcal{Q}(x_1,y_1)].
\end{gathered}$$

Úloha 2. Převeďte do prenexního tvaru formuli

$$(\forall x)\mathcal{P}(x) \vee (\forall x)\neg\mathcal{P}(x). \tag{iv}$$

Návod: přeformulujte disjunkci pomocí implikace, užijte záměnu kvantifikace a implikace a na závěr převeďte otevřené jádro do tvaru disjunkce; znovu zdůrazněme, že formuli *nelze* převést ekvivalentně na formuli $(\forall x)[\mathcal{P}(x) \vee \neg\mathcal{P}(x)]$, neboť ta má jiný význam.

*

Ve formuli se může (a je to obvyklé) jedna proměnná vyskytovat na více místech. Méně obvyklé (ale podle definice formule také možné) je, že některé z těchto výskytů mohou být vázané a jiné volné (např. ve formuli $\mathcal{Q}(x,y)$ & $(\forall x)(\exists y)\mathcal{Q}(x,y)$). Může se také stát, že táž proměnná je na některém místě vázána jedním kvantifikátorem a na jiném místě jiným (např. ve formuli $(\forall x)(\exists y)\mathcal{Q}(x,y)$ & $(\forall y)(\exists x)\mathcal{Q}(x,y)$). Je pochopitelně na místě si položit otázku, zda můžeme každou formuli ekvivalentně zapsat tak, že každá proměnná je buďto jen volná, anebo jen vázaná a že žádná vázaná proměnná ve formuli není vázána různými kvantifikátory. Ekvivalentní přepis kterékoli formule do takového tvaru obdržíme pomocí přeznačování vázaných proměnných (např. výše uvedené formule vyjádříme zápisy $\mathcal{Q}(x,y)$ & $(\forall x_1)(\exists y_1)\mathcal{Q}(x_1,y_1)$ a $(\forall x)(\exists y)\mathcal{Q}(x,y)$ & $(\forall y_1)(\exists x_1)\mathcal{Q}(x_1,y_1)$).

* * *

Na závěr našich zkoumání o možnosti záměny kvantifikace s logickou spojkou uveďme již bez dokazování užitečnou tabulku dalších dokazatelných implikací. Na rozdíl od tabulky možnosti záměny pořadí kvantifikace a implikace připouštíme nyní, že uvažovaná proměnná je kvantifikována u *obou* členů spojených výrokovou spojkou. Pod body (7) a (8) zahrňme i záměnu kvantifikátoru s negací a poznamenejme přitom, že formule (8) je axiomem $(\exists\forall)$.

[u2] Pomocí implikace vyjádříme formuli (*iv*) ve tvaru

$$\neg(\forall x)\mathcal{P}(x) \to (\forall x)\neg\mathcal{P}(x),$$

tzn. ve tvaru

$$(\exists x)\neg\mathcal{P}(x) \to (\forall x)\neg\mathcal{P}(x).$$

První z následujících ekvivalentních vyjádření získáme přeznačením vázané proměnné a dvě další záměnou kvantifikace a implikace. Poslední formule vyjadřuje otevřené jádro ve tvaru disjunkce.

$$(\exists y)\neg\mathcal{P}(y) \to (\forall x)\neg\mathcal{P}(x),$$
$$(\forall x)[(\exists y)\neg\mathcal{P}(y) \to \neg\mathcal{P}(x)],$$
$$(\forall x)(\forall y)[\neg\mathcal{P}(y) \to \neg\mathcal{P}(x)],$$
$$(\forall x)(\forall y)[\mathcal{P}(y) \vee \neg\mathcal{P}(x)].$$

Pro každou dvojici formulí φ, ψ platí:

(1) $\vdash (\forall x)(\varphi \to \psi) \to [(\forall x)\varphi \to (\forall x)\psi]$	(2) $\vdash (\forall x)(\varphi \to \psi) \to [(\exists x)\varphi \to (\exists x)\psi]$,
(3) $\vdash (\forall x)(\varphi \mathbin{\&} \psi) \equiv [(\forall x)\varphi \mathbin{\&} (\forall x)\psi]$,	(4) $\vdash [(\forall x)\varphi \vee (\forall x)\psi] \to (\forall x)(\varphi \vee \psi)$,
(5) $\vdash (\exists x)(\varphi \mathbin{\&} \psi) \to [(\exists x)\varphi \mathbin{\&} (\exists x)\psi]$,	(6) $\vdash [(\exists x)\varphi \vee (\exists x)\psi] \equiv (\exists x)(\varphi \vee \psi)$,
(7) $\vdash (\forall u)\varphi \equiv \neg(\exists u)\neg\varphi$,	(8) $\vdash (\exists u)\varphi \equiv \neg(\forall u)\neg\varphi$.

Obrácení implikace (1) *není dokazatelné* bez mimologických axiomů. Například implikace „jestliže je každé přirozené číslo sudé, je každé přirozené číslo liché“, pochopitelně platí, protože antecedent neplatí, současně však neplatí tvrzení, že pro každé přirozené číslo jeho sudost implikuje jeho lichost.

Rovněž obrácené implikace k implikacím uvedených v bodech (4) a (5), tzn. formule $(\forall x)(\varphi \vee \psi) \to [(\forall x)\varphi \vee (\forall x)\psi]$ a formule $[(\exists x)\varphi \mathbin{\&} (\exists x)\psi] \to (\exists x)(\varphi \mathbin{\&} \psi)$ bohužel *nejsou dokazatelné* v predikátovém počtu pro některé formule φ a ψ. Např. každé přirozené číslo je buďto sudé, nebo liché, avšak neplatí, že buďto jsou všechna přirozená čísla sudá, nebo jsou všechna přirozená čísla lichá. Analogicky existuje liché přirozené číslo a existuje sudé přirozené číslo, avšak neexistuje přirozené číslo, jež by bylo současně liché i sudé.

Dále poznamenejme, že pro zachování symetrie by bylo potřeba místo formule uvedené v bodě (2) předchozí tabulky uvažovat formuli $(\exists x)(\varphi \to \psi) \to [(\exists x)\varphi \to (\exists x)\psi]$ začínající existenčním a nikoli univerzálním kvantifikátorem. Bohužel ani tato formule není dokazatelná v predikátovém počtu. Pro každé liché přirozené číslo platí, že je-li sudé, pak je současně sudé i liché (antecedent totiž neplatí). Takže existuje přirozené číslo x, pro které platí implikace „jestliže je x sudé, pak je současně sudé i liché“, avšak implikace „Pokud existuje sudé přirozené číslo, pak existuje přirozené číslo, které je současně sudé i liché.“ prostě neplatí.

* * *

Ve druhém paragrafu jsme slíbili, že budeme diskutovat důvod, který nás nutí omezit použití odvozovacích pravidel důkaz dedukcí, sporem, rozborem případů a neutrální formulí na uzavřené formule. V citovaném paragrafu jsme rovněž uvedli, že nemůžeme přijmout jakýkoli vyvozovací princip, které by zapříčinil, že by formule dokazatelná v teorii $\boldsymbol{T}$ nebyla pravdivá v nějakém modelu teorie $\boldsymbol{T}$, a to byť by to bylo při jednom jediném ohodnocení. Kdybychom neomezili vyjmenovaná odvozovací pravidla na uzavřené formule, potkala by nás právě takováto nepříjemnost. Při tomto zkoumání využijeme výsledky cvičení 23 a 24 z předcházejícího paragrafu.

K ukázání nemožnosti aplikovat důkaz sporu na všechny formule začněme pracovat v teorii se dvěma axiomy: axiomem $\neg(\forall x)\neg\mathcal{P}(x)$ (tj. $(\exists x)\mathcal{P}(x)$) a axiomem $\neg\mathcal{P}(x)$ (a s jazykem obsahujícím jediný (unární) predikát $\mathcal{P}$). V této teorii je dokazatelná formule $\neg\mathcal{P}(x)$, protože je axiomem a dále pomocí generalizace dokážeme $(\forall x)\neg\mathcal{P}(x)$. Navíc je dokazatelný axiom $\neg(\forall x)\neg\mathcal{P}(x)$. Takže teorie je sporná a kdyby bylo možno důkaz sporu aplikovat na všechny formule, dostali bychom dokazatelnost formule $\mathcal{P}(x)$ v teorii s jediným axiomem $\neg(\forall x)\neg\mathcal{P}(x)$. Užívajíce důkaz dedukcí (formule $\neg(\forall x)\neg\mathcal{P}(x)$ je uzavřená) bychom získali dokazatelnost formule $\neg(\forall x)\neg\mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x)$ bez jakýchkoli mimologických axiomů. Nyní stačí užít dokazatelnost formule $(\neg \mathsf{p} \to \mathsf{q}) \to (\neg \mathsf{q} \to \mathsf{p})$ ve výrokovém počtu (a navíc možnost dosazení formulí predikátového počtu do tautologií výrokového počtu a modus ponens) a získáme dokazatelnost formule (*viii*) z úlohy 23 předcházejícího paragrafu bez jakýchkoli mimologických axiomů. To je však vyloučeno, formule není splněna ve struktuře $\mathbb{P}$, pročež nemůže být dokazatelná bez mimologických axiomů. Není proto možno aplikovat důkaz sporem na všechny formule predikátového počtu.

Předchozí rozbor přináší ještě jedno ponaučení. Odvozovací pravidlo generalizace dovoluje z každé formule φ odvodit formuli $(\forall x)\varphi$. Kdyby bylo možno *odvozovací pravidlo* generalizace nahradit *axiomy* tvaru $\varphi \to (\forall x)\varphi$ požadovanými pro libovolnou formuli φ, bylo by nutno jako axiom přijmout i citovanou formuli (*viii*) (která je tvaru zmíněného eventuálního axiomu, v němž jako formule φ vystupuje formule $\neg\mathcal{P}(x)$). Vidíme tedy, že *nelze* odvozovací pravidlo generalizace reformulovat jako axiom[11)].

Ve snaze ukázat nemožnost aplikovat důkaz neutrální formulí na všechny formule uvažme nejprve teorii s jediným axiomem $\mathcal{P}(x)$ (a jazykem obsahujícím jediný predikát $\mathcal{P}$). V této teorii je generalizací dokazatelná formule $(\forall x)\mathcal{P}(x)$ a následně také formule

$$(v) \qquad (\forall x)\mathcal{P}(x) \vee (\forall x)\neg\mathcal{P}(x),$$

protože ve výrokovém počtu je dokazatelná formule $\mathsf{p} \to (\mathsf{p} \vee \mathsf{q})$. Formule (*v*) je zcela analogicky dokazatelná rovněž v teorii s jediným axiomem $\neg\mathcal{P}(x)$. Kdybychom směli aplikovat důkaz neutrální formulí v plné obecnosti, dostali bychom dokazatelnost formule (*v*) bez použití mimologických axiomů, což však odporuje faktu, že formule (*v*) není splněna ve struktuře $\mathbb{P}$ (viz úlohu 24 §2 kap. II). Důkaz neutrální formulí není proto možno obecně aplikovat na všechny formule (včetně neuzavřených). Následně nelze v plné obecnosti aplikovat ani důkaz rozborem případů, neboť důkaz neutrální formulí je jeho speciálním případem.

* * *

Formulovali jsme deset axiomů predikátového počtu, zkoumání nezávislosti tohoto systému by bylo poněkud zdlouhavé, a nadto by nepřineslo podstatně nové myšlenky než byly nebo budou formulovány v našem textu. Omezme se proto na ukázání nezávislosti axiomů **PP4, PP5** a odvozovacího pravidla generalizace při současném přijetí axiomů **PP1–PP3** a pravidla modus ponens. Tyto úvahy připojujeme již pouze pro skutečné labužníky.

V následujících zkoumáních uvažujme jazyk **La** a nepřipouštějme mimologické axiomy.

1) Jestliže zaměníme univerzální kvantifikaci za kvantifikaci existenční, přejde kterýkoli axiom **PP1–PP3** na axiom téhož typu. (Podrobněji: například formule $(\forall x)\mathcal{P}(x) \to [(\exists y)\mathcal{P}(y) \to (\forall x)\mathcal{P}(x)]$ přejde na formuli $(\exists x)\mathcal{P}(x) \to [(\exists y)\mathcal{P}(y) \to (\exists x)\mathcal{P}(x)]$, která je sice různá od formule původní, avšak je opět formulí vzniklou dosazením formulí predikátového počtu ze výrokové proměnné v axiomu **VP1.** Odvozovací pravidlo modus ponens je transformováno na sebe. Axiom **PP4** přejde na formuli $(\exists x)\varphi \to \varphi(x/\boldsymbol{t})$,

11) Nemožnost reformulace odvozovacího pravidla generalizace ve tvaru axiomu neznamená, že by nebylo možno vytvořit *jinou* soustavu vyvozovacích principů, ve které by modus ponens byl jediným odvozovacím pravidlem. Takovou soustavu dostaneme např. mírnou úpravou (přidáním axiomu specifikace) systému odvozovacích principů uvedených v knize [Gr], kde se přijímá jako jediné odvozovací pravidlo modus ponens a jako axiomy se připouštějí pouze uzavřené formule.

která není splněna např. v modelu $\mathbb{P}$ popsaném v §2 kap. II. Naproti tomu axiom **PP5** je transformován na formuli $(\exists x)(\varphi \to \psi) \to [\varphi \to (\exists x)\psi]$, jejíž dokazatelnost jsme konstatovali o šest stránek výše (dokonce s naznačením metody důkazu) za předpokladu, že proměnná x nemá volný výskyt ve formuli φ. Pravidlo generalizace přejde na pravidlo umožňující z formule φ vyvodit formuli $(\exists x)\varphi$. Takto vzniklé pravidlo je korektní, což dovodíme z duální specifikace (a modus ponens). Všechny uvažované axiomy s výjimkou axiomu **PP4** přejdou na dokazatelné formule, odvozovací pravidla přejdou na korektní odvozovací pravidla, takže všechny formule dokazatelné v systému vzniklém transformací axiomů **PP1–PP3, PP5** a transformací odvozovacích pravidel modus ponens a generalizace jsou dokazatelné v predikátovém počtu. Protože transformace axiomu **PP4** dokazatelná v predikátovém počtu není, je axiom **PP4** nezávislý.

2) Zaměníme-li každou formuli tvaru $(\forall x)\varphi$ za formuli tvaru $(\forall x)\neg(\varphi \to \varphi)$, přechází každý z axiomů **PP1–PP3** na axiom téhož tvaru a axiomy **PP4,5** přecházejí na dokazatelné formule (implikace s antecedentem, jehož negace je dokazatelná v predikátovém počtu). Odvozovací pravidlo modus ponens přechází na sebe, naproti tomu generalizace je transformována na odvozovací pravidlo, které *není* korektní (formule $\mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x)$ je dokazatelná a je transformována na sebe sama, avšak formule $(\forall x)(\mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x))$ je převedena na formuli $(\forall x)\neg[(\mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x)) \to (\mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x))]$, jež dokazatelná není). Takže odvozovací pravidlo generalizace je nezávislé.

3) Jestliže zaměníme jakoukoli podformuli tvaru $(\forall x)\mathcal{P}(x)$ (Pozor: teď zaměňujeme pouze tuto jednu jedinou speciální formuli a nikoli všechny podformule začínající univerzálním kvantifikátorem!) formulí $(\forall x)\neg(\mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x))$, je transformován kterýkoli axiom **PP1–PP3** na axiom téhož typu a odvozovací pravidlo modus ponens přeje na sebe. Každý případ axiomu **PP4** tvaru $(\forall x)\mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(t)$ přejde na dokazatelnou formuli $(\forall x)\neg(\mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x)) \to \mathcal{P}(t)$ (negace antecedentu je dokazatelná). Pro formuli φ různou od formule tvaru $\mathcal{P}(x)$, je každý případ axiomu **PP4** tvaru $(\forall x)\varphi \to \varphi(x/t)$ transformován na axiom téhož tvaru. Formule tvaru $\mathcal{P}(x)$ *není* dokazatelná, a proto pravidlo dovolující odvodit formuli $(\forall x)\neg(\mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x))$ z formule $\mathcal{P}(x)$ je korektní. Ostatní případy generalizace přejdou opět na odvozovací pravidlo generalizace. Na závěr uvažme formuli

$$(\forall x)[(\forall x)(\mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x)) \to \mathcal{P}(x)] \to [(\forall x)(\mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x)) \to (\forall x)\mathcal{P}(x)],$$

jež je tvaru axiomu **PP5** a která přejde na formuli

$$(\forall x)[(\forall x)(\mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x)) \to \mathcal{P}(x)] \to [(\forall x)(\mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x)) \to (\forall x)\neg(\mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x))].$$

Posledně uvedená formule není dokazatelná (dokonce není pravdivá ve vhodné jednoprvkové struktuře), pročež axiom **PP5** je nezávislý.

KAPITOLA III

DOKAZATELNOST A NEDOKAZATELNOST

Člověk je zjevně stvořený k tomu,
aby myslel. V tom spočívá všechna
jeho důstojnost a celá jeho přednost;
a veškerou jeho povinností je,
aby myslel správně.

Posledním krokem rozumu je uznat,
že nekonečně mnoho věcí jej přesahuje.
Jen slabý rozum nedospěje až
k tomuto poznání.
B. Pascal Myšlenky

§1

DOKAZATELNOST V ARITMETICE, MODELY ARITMETIKY

Účelem tohoto paragrafu je jednak předvést, jak se dokazuje v matematických teoriích, a jednak ukázat metody prokazující nedokazatelnost toho kterého tvrzení v dané teorii. Jako vhodnou matematickou teorii k tomuto účelu zvolíme aritmetiku vycházejíce z předpokladu, že každý čtenář se již s aritmetikou mnohokrát setkal, byť v její neformalizované podobě. Pro axiomatizaci aritmetiky vybereme dva různě silné (a nejběžněji užívané) axiomatické systémy — Robinsonovu a Peanovu aritmetiku[1]. Právě srovnání dokazatelnosti v těchto dvou teoriích přináší řadu příkladů tvrzení dokazatelných v teorii silnější a nedokazatelných v slabší z nich.

Robinsonova aritmetika $\boldsymbol{RA}$ je teorie, jejíž jazyk neobsahuje kromě rovnosti žádný predikát, obsahuje však konstantu $\mathit{0}$, unární funkci následovníka $\mathfrak{S}$ a dvě binární funkce $+$ a $\cdot$. Následovníka čísla x intuitivně můžeme chápat jako $x+1$, ale

[1] Název Peanova aritmetika odkazuje na Giuseppe Peana, který navrhl první axiomatický systém pro aritmetiku (viz [Pe]) i když rozdílný od dnešní axiomatiky „Peanovy“ aritmetiky. Informace o původním Peanově chápání aritmetiky lze najít např. v práci P. Štěpánek, Giuseppe Peano (1851–1632) Logika a teorie dimenze, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 27 (1982) 301–305, kterou cituji i s chybou v letopočtu (rok narození je správně). Axiomatika Robinsonovy aritmetiky byla zavedena v práci [T-M-R]; od původního značení teorie znakem $\boldsymbol{Q}$ se odchylujeme připodobňujíce značení $\boldsymbol{RA}$ běžnému značení Peanovy aritmetiky $\boldsymbol{PA}$.

konstantu $\mathit{1}$ jsme do jazyka aritmetiky nepřijali (možnost zavedení této konstanty je popsána ve cvičení III-1.7 a uvedený vztah $\mathfrak{S}(x) = x + \mathit{1}$ je obsahem cvičení III-1.8). V celém textu jsme pro zvýraznění odlišnosti mezi různými druhy objektů používali pro funkce gotická písmena; teď tedy prosím čtenáře, aby se smířil s gotickým S (od successor) pro funkci následovníka.

V aritmetice užíváme také predikát $\leq$, v našem textu ho však budeme pokládat za pojem definovaný na základě pojmů původního jazyka (viz axiom-definici **RA8** níže a rozbor možnosti obohacovat jazyk přidáváním nových výrazových prostředků, jenž jsme předvedli ve druhém paragrafu předcházející kapitoly).

A teď to nejdůležitější *varování*. Vlastnosti všech predikátů, konstant a funkcí v Peanově aritmetice (a obecněji v každé axiomaticky popsané teorii) jsou popsány axiomy. Nemůžete obecně přijímat nějaký vztah s prostým zdůvodněním, že jste na něj zvyklý nebo že jste se to tak učili ve škole. Jediným prostředkem, jenž umožňuje ten který vztah používat, je dokázat ho z axiomů. Například v axiomech níže sepsaných není komutativita operací $+$ a $\cdot$ explicitně uvedena. Před použitím komutativity je proto třeba ji v Peanově aritmetice dokázat.

Za axiomy ***RA*** přijmeme formule **RA1**–**RA8**. První z nich lze intuitivně vyjádřit jako „$\mathit{0}$ nemá předchůdce“, **RA2** znamená „jsou-li si následovníci rovni, jsou si rovna i původní čísla“, neboli „$x + 1 = y + 1$ implikuje $x = y$“ a dále **RA3** vyjadřuje, že „každé kladné přirozené číslo má předchůdce“. Axiomy **RA4** a **RA6** snad vysvětlení nepotřebují a **RA5** a **RA7** pak vyjadřují vztah „$x+(y+1) = (x+y)+1$“ (speciální případ asociativity sčítání, kde třetí přirozené číslo je 1) a vztah „$x \cdot (y + 1) = (x \cdot y) + x$“ (speciální případ distributivity, kde třetí přirozené číslo je 1). Poslední axiom definuje predikát $\leq$ na základě rovnosti a funkce sčítání.

RA1 $(\forall x)(\mathfrak{S}(x) \neq \mathit{0})$
RA2 $(\forall x, y)(\mathfrak{S}(x) = \mathfrak{S}(y) \to x = y)$
RA3 $(\forall x)[x \neq \mathit{0} \to (\exists y)(x = \mathfrak{S}(y))]$
RA4 $(\forall x)(x + \mathit{0} = x)$
RA5 $(\forall x, y)(x + \mathfrak{S}(y) = \mathfrak{S}(x + y))$
RA6 $(\forall x)(x \cdot \mathit{0} = \mathit{0})$
RA7 $(\forall x, y)(x \cdot \mathfrak{S}(y) = (x \cdot y) + x)$.
RA8 $(\forall x, y)[x \leq y \equiv (\exists u)(u + x = y)]$.

Peanova aritmetika ***PA*** je teorií, kterou dostaneme z aritmetiky Robinsonovy ***RA***, přidáme-li všechny případy (matematické) indukce. Před formulací indukce připomeňme, že znakem $\varphi(x/t)$ označujeme formuli vzniklou z formule φ nahrazením proměnné x termem t. **Axiomem indukce** pro formuli φ rozumíme formuli

$$\big(\varphi(x/\mathit{0})\ \&\ (\forall x)[\varphi \to \varphi(x/\mathfrak{S}(x))]\big) \to (\forall x)\varphi.$$

Doufám, že si uvědomujete, že jsme pouze formálněji zapsali vám běžně známou indukci: uvažujme nějakou formuli φ a jakoukoli proměnnou x; má-li konstanta $\mathit{0}$ vlastnost φ (tj. předpokládáme-li $\varphi(x/\mathit{0})$) a jestliže pro každé číslo x z předpokladu, že číslo x má vlastnost φ, plyne, že tuto vlastnost má i jeho následovník $\mathfrak{S}(x)$ (tzn. předpokládáme-li $(\forall x)[\varphi \rightarrow \varphi(x/\mathfrak{S}(x))]$), pak vlastnost φ mají všechna přirozená čísla (tj. $(\forall x)\varphi$). V souvislosti s použitím indukce je zvykem implikaci $\varphi \rightarrow \varphi(x/\mathfrak{S}(x))$ (nebo formuli $(\forall x)[\varphi \rightarrow \varphi(x/\mathfrak{S}(x))]$) nazývat **indukčním krokem** a formuli φ **indukčním předpokladem.**

Položím-li vám nyní otázku, kolik axiomů mají teorie ***RA*** a ***PA***, jistě budete hledat „chyták“; najděte ho. — Už ho máte? — ***RA*** má skutečně osm axiomů, tzn. osm konkrétních formulí predikátového počtu. Naproti tomu princip indukce nepředstavuje jedinou formuli, ale celé schéma, pro každou konkrétní formuli φ dostáváme jeden konkrétní případ indukce; axiomatika ***PA*** tudíž obsahuje nekonečně mnoho axiomů (má devět principů: osm axiomů a jedno schéma indukce). Automaticky vzniká otázka, zda lze tuto teorii popsat konečným počtem axiomů, tj. zda existuje konečně mnoho formulí jazyka teorie ***PA***, ze kterých jsou dokazatelné přesně všechny formule dokazatelné v teorii ***PA***. Takovýto konečný systém axiomů však neexistuje — při užití běžné terminologie říkáme, že Peanova aritmetika není konečně axiomatizovatelná (viz [RN]).

*

Jako první úkol jsme si vytkli předvést dokazování v matematických teoriích. Naší povinností je tedy předložit důkazy, které se odvolávají *pouze* na axiomy teorie a principy logiky. Každé naše „je jasné, že“ musíme být schopni na požádání nahradit skutečným důkazem ve smyslu definice druhého paragrafu předchozí kapitoly. Téměř každý matematik si při hledání důkazu kreslí „obrázky“ a v nich hledá inspiraci pro konstrukci důkazu, výsledkem práce však musí být důkaz opírající se jen o axiomy a o odvozovací pravidla.

Prokážeme několik základních tvrzení v aritmetice. Množné číslo ve slově „prokážeme“ je teď zcela na místě: část důkazů předvede autor, část bude zadána v úlohách a o důkaz několika tvrzení budete dokonce požádán ve cvičeních. Obsahem tvrzení budou základní vlastnosti funkcí jazyka aritmetiky a predikátu $\leq$; za okamžik je shrneme do dvou seznamů a ukážeme jejich intuitivnost. Ještě jednou však zdůrazněme, že byste si měl zejména osvojit metodu dokazování a konkrétní dokázaná tvrzení jsou pouze „třešinkou na dortu“. Je potřeba si důkladně rozmyslet užívané metody v příkladech 1–4, pak se již bude jevit každá jednotlivá úloha (příp. cvičení) poměrně jednoduchá. Avšak i „třešinka na dortu“ je velmi cenná — ve svém souhrnu pravidla obsažená ve formulích (ra1)–(ra5) a (pa1)–(pa13) pokrývají běžně užívané aritmetické principy. Uvědomte si, že všechna pravidla (pa1)–(pa13) slibujeme dokázat indukcí pouze z axiomů **RA1**–**RA8,** jež představují tak jednoduché principy jako např. $x + \mathit{0} = x$; formule (ra1)–(ra5) se dokonce zavazujeme dokázat pouze z axiomů **RA1**–**RA8,** bez použití indukce.

Za povšimnutí rovněž stojí, že tvrzení v Peanově aritmetice budeme dokazovat v trochu jiném pořadí, než je vyslovíme v intuitivně pojatém seznamu (mimo jiné distributivitu před asociativitou násobení nebo možnost krácení obou stran nerovnosti před možností krácení obou stran rovnosti). Matematik se snaží neopakovat ideje v důkazech, a využívá proto již dokázaných tvrzení. Pokud je účelné v důkaze nějakého tvrzení využít jiné relevantní tvrzení, snaží se nejprve dokázat toto druhé tvrzení a poté je oprávněn ho skutečně v důkazu prvého využít (srovnejte princip „dokázané lze použít k dokazování“, formulovaný v první kapitole).

*

V ***RA*** je dokazatelné, že součet dvou čísel, z nichž *alespoň jedno* je nenulové, nikdy nemůže být nulou. Nenulovost součinu je zaručena, pokud jsou nenuloví *oba* činitelé. Ve vztahu $\leq$ je 0 „menší“ nebo rovna jakémukoli číslu a žádné číslo není (ostře) „menší“ než 0. Slovíčko „menší“ jsme dávali do uvozovek, protože zatím nevíme, zda relace $\leq$ má běžně předpokládané vlastnosti uspořádání. Čísla x, y jsou ve vztahu $\leq$, právě tehdy když ve stejném vztahu jsou jejich následovníci. Formule tvaru uvedeného níže pod znakem (ra5) nám naznačují, že přirozených čísel je nekonečně mnoho. Tyto výsledky jsou formálněji představeny formulemi z následující tabulky; poslední sloupec udává místo, kde je uveden důkaz toho kterého tvrzení:

(ra1)	$(\forall x, y)[x + y = 0 \rightarrow (x = 0 \,\&\, y = 0)]$,	příklad 1,
(ra2)	$(\forall x, y)[x \cdot y = 0 \rightarrow (x = 0 \vee y = 0)]$,	úloha 1,
(ra3)	$(\forall x)(0 \leq x) \,\&\, (\forall y)(y \leq 0 \rightarrow y = 0)$,	úloha 2 a cvičení III-1.4,
(ra4)	$(\forall x, y)(\mathfrak{S}(x) \leq \mathfrak{S}(y) \equiv x \leq y)$,	cvičení III-1.5 a III-1.6,
(ra5)	$\mathfrak{S}(0) \neq 0$, $\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(0)) \neq \mathfrak{S}(0)$, $\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(0))) \neq \mathfrak{S}(\mathfrak{S}(0))$, atd.	úloha 3.

Příklad 1. Dokazujme v Robinsonově aritmetice formuli

(ra1) $$(\forall x, y)[x + y = 0 \rightarrow (x = 0 \,\&\, y = 0)].$$

Zvolme zcela libovolně dvě přirozená čísla x, y a předpokládejme $x + y = 0$. Pro získání sporu předpokládejme $y \neq 0$; za tohoto předpokladu existuje dle **RA3** číslo u takové, že $y = \mathfrak{S}(u)$; užívajíce důkaz fixací konstanty zvolme u s touto vlastností. Pro toto u uvažme rovnosti

(i) $$\mathfrak{S}(x + u) = x + \mathfrak{S}(u) = x + y = 0.$$

První rovnost je důsledkem axiomu **RA5,** druhá plyne z předpokladu učiněného při fixaci konstanty u, třetí je předpokladem učiněným při fixaci x, y. Dokázali jsme tudíž $\mathfrak{S}(x + u) = 0$, naproti tomu nerovnost $\mathfrak{S}(x + u) \neq 0$ plyne z axiomu **RA1**. Obdrželi jsme spor, takže důkazem sporem následně dokážeme negaci našeho druhého předpokladu, tj. dokáže rovnost $y = 0$. Dokázaná rovnost spolu s předpokladem $x + y = 0$ implikuje $x + 0 = 0$. Dále $x + 0 = x$ dle **RA4,** a dvě posledně zmíněné rovnosti spolu zaručují $x = 0$. Pro libovolné x, y jsme dokázali implikaci $x + y = 0 \rightarrow (x = 0 \,\&\, y = 0)$, užití generalizace dokončí důkaz (ra1).

Předvedli jsme obvyklou podobu důkazu v teorii, i když náš důkaz uvádí hodně podrobností; skutečný důkaz v matematickém textu by mnoho podrobností zamlčel a ponechal jejich domyšlení čtenáři. I v dalším textu budou zpočátku důkazy o něco obšírnější, postupně se budeme přibližovat běžné formě. Nicméně jsme již několikrát upozornili, že na žádost oponenta musí být matematik schopen prokázat, že jeho důkaz je převeditelný do důkazu podle definice z druhého paragrafu předcházející kapitoly; přitom můžeme věřit výsledkům logiky a odvolávat se na odvozovací principy uvedené v předcházejícím textu, o těch nám již logika zaručuje, že jejich použití je převeditelné na potřebnou posloupnost formulí. Náš důkaz je sice dosti podrobný, přesto zdaleka není posloupností formulí požadovanou v definici důkazu z předchozí kapitoly. Nyní proto rozeberme v pěti bodech předchozí důkaz a připojme ještě podrobnější komentář (takto podrobný rozbor jiných důkazů již nebudeme opakovat a takto podrobné zdůvodnění ponecháme na čtenáři). Každý z následujících bodů bude uvozen citací části předchozího důkazu, kterou budeme komentovat.

(1) „Zvolme zcela libovolně dvě přirozená čísla x, y a předpokládejme $x + y = 0$."

Prvním dotazem může být, proč důkaz začíná slovy „Zvolme zcela libovolně dvě přirozená čísla x, y". Chceme na závěr použít generalizaci, a je proto naším úkolem dokázat vlastnost $x + y = 0 \rightarrow (x = 0 \,\&\, y = 0)$ pro libovolná přirozená čísla. Nechť jsou nám tedy nějaká dvě čísla dána.

Pak celý důkaz probíhá pro tato *pevně zvolená čísla* až do poslední věty, kde dochází ke zlomu. Ještě v její první části „Pro libovolné x, y jsme dokázali implikaci $x + y = 0 \rightarrow (x = 0 \,\&\, y = 0)$" se mluví o *daných* číslech x, y, avšak v závěru při slovech „užití generalizace dokončí důkaz (ra1)" již jsou znaky x, y míněny jako symboly pro proměnné (jinak by je nebylo možno kvantifikovat). V příslušné části důkazu bychom sice mohli pro *konstanty* x, y používat jiné znaky (abychom zdůraznili, že se nejedná o proměnné), pokud jsme si však schopni, v případě potřeby, vybavit význam těchto symbolů, bylo by zbytečným zesložitěním nové znaky zavádět.

Druhá námitka se může týkat našeho předpokladu $x+y = 0$: oponent se může ptát, jakým právem činíme tento předpoklad. Podle důkazu neutrální formulí k dokázání žádané implikace $x + y = 0 \rightarrow (x = 0 \,\&\, y = 0)$ nám postačí prokázat v teorii $\boldsymbol{RA}$ s fixovanými x, y dvě implikace:

$$x + y = 0 \rightarrow [x + y = 0 \rightarrow (x = 0 \,\&\, y = 0)]$$
$$\neg x + y = 0 \rightarrow [x + y = 0 \rightarrow (x = 0 \,\&\, y = 0)].$$

Dokázat první z nich je totéž jako dokázat formuli $x + y = 0 \rightarrow (x = 0 \,\&\, y = 0)$ v důsledku tvrzení příkladu 4 §2 kap. I a v důsledku cvičení I-2.25, a to právě v předvedeném důkazu činíme. Druhou z nich dostaneme prostým nahrazením proměnných výrokového počtu v zákonu Dunse Scota, tato formule je tudíž dokazatelná v predikátovém počtu (při jedné variantě formulace axiomů predikátového počtu jsme ji — jakožto formuli vzniklou nahrazením z tautologie výrokového počtu — dokonce brali jako axiom).

(2) „Pro získání sporu předpokládejme $y \neq 0$; za tohoto předpokladu existuje dle **RA3** číslo u takové, že $y = \mathfrak{S}(u)$; užívajíce důkaz fixací konstanty zvolme u s touto vlastností.“

Pokud se bude oponent dožadovat zdůvodnění předpokladu $y \neq 0$, budeme argumentovat snahou užít důkaz sporem. Našim cílem je dokázat rovnost $y = 0$, takže stačí z její negace, tzn. z předpokladu $y \neq 0$, vyvodit spor.

K předvedení sporu se v důkazu užívá fixace konstanty u. Je tedy možné, že budeme žádáni o zdůvodnění možnosti potřebné fixace. K tomu, abychom mohli užít důkaz fixací konstanty, musíme vědět, že existence objektu s uvažovanou vlastností je dokazatelná; před fixací konstanty u s vlastností $y = \mathfrak{S}(u)$ musíme mít tedy dokázanou formuli $(\exists u)(y = \mathfrak{S}(u))$. Důkaz této formule je však možno omezit na prostý poukaz na axiom **RA3** (ve kterém nahradíme proměnnou x číslem y a proměnnou y přeznačíme na proměnnou u).

Při slovech „Jestliže $y \neq 0$, existuje dle **RA3** číslo u takové, že $y = \mathfrak{S}(u)$“ máme na mysli proměnnou u (ve formuli $(\exists u)(y = \mathfrak{S}(u))$ je dokonce existenčně kvantifikována); při slovech „užívajíce důkaz fixací konstanty zvolme u s touto vlastností“ začíná znak u označovat konstantu. Role čísla u končí konstatováním „Naproti tomu rovnost $\mathfrak{S}(x+u) \neq 0$ plyne z axiomu **RA1**. Obdrželi jsme spor, ...“, takže znak u se již ani nestačil změnit zpět na proměnnou, jeho role skončila získáním sporu.

(3) „Pro toto u uvažme rovnosti

$$\mathfrak{S}(x+u) = x + \mathfrak{S}(u) = x + y = 0. \tag{i}$$

První rovnost je důsledkem axiomu **RA5,** druhá plyne z předpokladu učiněného při fixaci konstanty u, třetí je předpokladem učiněným při fixaci x, y.“

V případě žádosti o podrobnější odůvodnění první rovnosti v (i), tj. rovnosti $\mathfrak{S}(x+u) = x + \mathfrak{S}(u)$ dodáme, že při aplikaci axiomu **RA5** nahrazujeme proměnnou y číslem u.

Při podrobnějším zdůvodnění druhé rovnosti ve zkoumaném (i), tzn. rovnosti $x + \mathfrak{S}(u) = x + y$, připomeneme axiom rovnosti pro sčítání, tzn. formuli

$$(\forall x_1, x_2, y_1, y_2)[(x_1 = x_2 \ \& \ y_1 = y_2) \rightarrow x_1 + y_1 = x_2 + y_2]. \tag{ii}$$

Při užití této formule nahradíme obě proměnné x_1, x_2 týmž číslem x, proměnnou y_1 nahradíme termem $\mathfrak{S}(u)$ a proměnnou y_2 nahradíme číslem y. Tak získáme $(x = x \ \& \ \mathfrak{S}(u) = y) \rightarrow x + \mathfrak{S}(u) = x + y$. První rovnost v antecedentu, tzn. rovnost $x = x$, je důsledkem axiomu **R1** a druhá je předpokladem učiněným při fixaci konstanty u.

(4) „Dokázali jsme tudíž $\mathfrak{S}(x+u) = \mathit{0}$, naproti tomu nerovnost $\mathfrak{S}(x+u) \neq \mathit{0}$ plyne z axiomu **RA1**. Obdrželi jsme spor, takže důkazem sporem následně dokážeme negaci našeho druhého předpokladu, tj. dokáže rovnost $y = \mathit{0}$."

Rovnost $\mathfrak{S}(x+u) = \mathit{0}$ odůvodníme poukazem na rovnosti v (i) a na možnost dvojnásobného použití tranzitivity rovnosti. Při žádosti o ještě podrobnější odůvodnění nerovnosti $\mathfrak{S}(x+u) \neq \mathit{0}$ doporučíme nahradit v **RA1** proměnnou x termem $x+u$. Při dalších dotazech již zbývá pouze odkázat tazatele na formulaci důkazu sporem obsaženou v prvním paragrafu celého textu.

(5) „Dokázaná rovnost spolu s předpokladem $x + y = \mathit{0}$ implikuje $x + \mathit{0} = \mathit{0}$. Dále $x + \mathit{0} = x$ dle **RA4,** a dvě posledně zmíněné rovnosti spolu zaručují $x = \mathit{0}$. Pro libovolné x, y jsme dokázali implikaci $x + y = \mathit{0} \rightarrow (x = \mathit{0} \mathbin{\&} y = \mathit{0})$, užití generalizace dokončí důkaz (ra1)."

Bude-li oponent požadovat ještě důkladnější popis odůvodnění rovnosti $x = \mathit{0}$ po předvedeném důkazu rovnosti $y = \mathit{0}$, nabídneme soustavu rovností $x = x + \mathit{0} = x + y = \mathit{0}$. Postupně budeme dokazovat jednotlivé rovnosti v této soustavě a začneme druhou rovností. Tu získáme aplikací axiomu rovnosti pro sčítání (ii), při níž nahrazujeme obě proměnné x_1, x_2 týmž číslem x, proměnnou y_1 nahradíme konstantou $\mathit{0}$ a proměnnou y_2 nahradíme číslem y. Tak získáme $(x = x \mathbin{\&} \mathit{0} = y) \rightarrow x + \mathit{0} = x + y$. První rovnost v antecedentu, tj. rovnost $x = x$, je důsledkem axiomu **R1** a druhou rovnost získáme z již dokázané formule $y = \mathit{0}$ užitím symetrie rovnosti. Poslední rovnost v soustavě rovností je předpokladem učiněným při zavádění konstant x, y; že první rovnost plyne z axiomu **RA4,** snad již není třeba výslovně uvádět. Rovnost $x = \mathit{0}$ pak získáme dvojnásobným užitím tranzitivity rovnosti.

Snad se nám podařilo vám ukázat, vážený čtenáři, jak podrobnějším odůvodňováním jednotlivých kroků běžného důkazu odrážet všechny oponentovy námitky převedením na vyvozovací principy, které byly jako přípustné uvedeny v druhém paragrafu druhé kapitoly. Zkuste sám takovéto podrobnější předvedení jednotlivých kroků v některé z následujících úloh, v textu budeme, jak již řečeno, v úlohách a cvičeních předvádět stále méně podrobností a postupně se budeme blížit běžně užívané formě důkazů a budeme předpokládat, že podrobnější zdůvodňování jednotlivých kroků je již možno ponechat v pozadí. Pokud bychom měli shrnout principy, které běžně používáme v důkazech bez podrobnějšího zdůvodňování, jedná se zejména o použití symetrie a tranzitivity rovnosti, obecněji o většinu aplikací důkazu rovností, dále o používání důkazu sporem, důkazu neutrální formulí (včetně užití zákona Dunse Scota), případně obecněji o aplikaci důkazu rozborem případů a velmi často rovněž o využití důkazu fixací konstanty.

Úloha 1. V teorii ***RA*** dokažte formuli

(ra2) $$(\forall x, y)[x \cdot y = \mathit{0} \rightarrow (x = \mathit{0} \vee y = \mathit{0})].$$

Návod: Pro důkaz sporem předpokládejte $x, y \neq 0$, předpoklad užijte k fixaci u, v takových, že $\mathfrak{S}(u) = x$ & $\mathfrak{S}(v) = y$; srdcem důkazu je použití axiomů **RA7, RA5** a **RA1.**

Úloha 2. V Robinsonově aritmetice dokažte formuli $(\forall x)(0 \leq x)$. Návod: užijte axiom **RA8.**

Úloha 3. V ***RA*** dokažte $\mathfrak{S}(0) \neq 0$, $\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(0)) \neq \mathfrak{S}(0)$, $\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(0))) \neq \mathfrak{S}(\mathfrak{S}(0))$, atd. Návod: užijte axiomy **RA1** a **RA2.**

*

Druhý seznam shrnuje formule, které hodláme — opět s vaší pomocí, vážený čtenáři — dokázat v Peanově aritmetice, tzn. za pomoci indukce. Ukážeme, že sčítání a násobení jsou asociativní (tvrzení (pa1) a (pa3)) a komutativní (tvrzení (pa2) a (pa4)) a že platí distributivní zákon (tvrzení (pa5)).

V bodech (pa6)–(pa8) jsou shrnuty běžně kladené požadavky na vlastnost „být menší nebo roven". Zcela určitě má být každý objekt menší nebo roven sám sobě (tvrzení (pa6), tzv. **reflexivita**), je také celkem přirozené požadovat, aby z předpokladu, že první objekt je větší nebo roven druhému a současně druhý objekt je větší nebo roven prvému plynulo, že se jedná o objekt jediný (tvrzení (pa7), tzv. **slabá antisymetrie**) a aby z předpokladu, že první objekt je větší nebo roven druhému a současně druhý objekt je větší nebo roven třetímu plynulo, že první objekt je větší nebo roven třetímu (tvrzení (pa8), tzv. **tranzitivita**). V ***PA*** je dokonce z každých dvou různých objektů jeden větší nebo roven druhému (tvrzení (pa9), tzv. **trichotomie** — název odvozen od *tří* možností: $x < y \vee x = y \vee y < x$).

$^{u1)}$ Předpokládejme $x \cdot y = 0$. Jestliže $x, y \neq 0$, pak dle **RA3** musí existovat u, v tak, že $x = \mathfrak{S}(u)$ & $y = \mathfrak{S}(v)$; užívajíce dvojnásobně důkaz fixací konstanty jsme schopni fixovat u, v s uvedenými vlastnostmi. Pro takto fixovaná čísla dostáváme

$$0 = x \cdot y = \mathfrak{S}(u) \cdot \mathfrak{S}(v) = (\mathfrak{S}(u) \cdot v) + \mathfrak{S}(u) = \mathfrak{S}((\mathfrak{S}(u) \cdot v) + u).$$

První rovnost je předpokladem, druhá jest prostě důsledkem axiomu rovnosti pro násobení užívajícího rovnosti $x = \mathfrak{S}(u)$ a $y = \mathfrak{S}(v)$. Třetí rovnost dostaneme z axiomu **RA7** nahrazením proměnné x termem $\mathfrak{S}(u)$ a nahrazením proměnné y číslem v a závěrečnou rovnost obdržíme z axiomu **RA5** nahrazením proměnné x termem $\mathfrak{S}(z) \cdot v$ a proměnné y číslem u. Uvědomme si však, že nerovnost $\mathfrak{S}((\mathfrak{S}(u) \cdot v) + u) \neq 0$ je důsledkem axiomu **RA1,** ve kterém nahradíme proměnnou x termem $(\mathfrak{S}(u) \cdot v) + u$, takže důkaz sporem vyloučí možnost, že obě čísla x, y jsou různá od nuly.

$^{u2)}$ V důsledku axiomu **RA8** potřebujeme pro zadané číslo x dokázat existenci přirozeného čísla u splňujícího rovnost $u + 0 = x$. Podle **RA4** je $x + 0 = x$, takže za hledané u stačí zvolit přímo číslo x.

$^{u3)}$ Nerovnost $\mathfrak{S}(0) \neq 0$ je zaručena axiomem **RA1.** Důsledkem rovnosti $\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(0)) = \mathfrak{S}(0)$ je podle axiomu **RA2** rovnost $\mathfrak{S}(0) = 0$. Před okamžikem jsme však v teorii ***RA*** dokázali nerovnost $\mathfrak{S}(0) \neq 0$, pročež užitím důkazu sporem dokážeme v Robinsonově aritmetice nerovnost $\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(0)) \neq \mathfrak{S}(0)$. Zcela analogicky odvoláním na právě dokázané dokážeme třetí nerovnost, atd.

Autor přiznává, že váhal, zda příkladů na dokazování tvrzení indukcí nebude pro čtenáře příliš mnoho. Nakonec se rozhodl i důkazy tvrzení o nerovnosti obsažených v bodech (pa6)–(pa9) do textu zahrnout, byť psané petitem, který naznačuje jejich nepovinnost. Jedním z důvodů je, že na konkrétním (třebaže velice jednoduchém) případu může čtenář nahlédnout jeden ze specifických rysů užívání matematických teorií. Ve třetím paragrafu uvidíme, že právě formule (pa6)–(pa8) jsou axiomy tzv. teorie uspořádání. Matematik může pochopitelně zkoumat teorii uspořádání samu o sobě a dokazovat v ní jednotlivá tvrzení. Pokud nějaké tvrzení v teorii uspořádání dokáže, může si být jist, že tvrzení je dokazatelné v každé teorii, ve které predikát $\leq$ vyhovuje požadavkům (pa6)–(pa8), speciálně takovéto tvrzení je dokazatelné v Peanově aritmetice. Tak prokázáním dokazatelnosti tvrzení v jedné teorii obdržíme dokazatelnost uvažovaného tvrzení v mnoha dalších teoriích.

Tvrzení (pa10) a (pa11) zachycují běžně známé „k rovnosti a nerovnosti lze na obou stranách přičíst totéž přirozené číslo a lze od ní na obou stranách totéž přirozené číslo odečíst“, analogicky tvrzení (pa12) a (pa13) formalizují ze školy důvěrně známé „rovnost a (neostrou) nerovnost lze na obou stranách násobit nebo dělit týmž přirozeným číslem“ — pochopitelně za předpokladu, že dělení a odčítání má smysl, tedy speciálně, že nedělíme nulou a že výsledek po odečtení nebo dělení je přirozeným číslem. Závěrečné tvrzení zachycuje intuitivní fakt, že žádné přirozené číslo není svým vlastním následovníkem.

Třetí sloupec následující tabulky uvádí, na kterém místě textu je to které tvrzení dokázáno; význam čtvrtého sloupce bude objasněn později.

(pa1)	$(\forall x, y, z)[(x+y)+z = x+(y+z)]$,	příklad 2,	příklad 9
(pa2)	$(\forall x, y)(x+y = y+x)$,	příklad 4,	příklad 9, III-1.28
(pa3)	$(\forall x, y)[(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)]$,	cvičení III-1.13,	příklad 9
(pa4)	$(\forall x, y)(x\cdot y = y\cdot x)$,	úloha 5,	příklad 9, úloha 8
(pa5)	$(\forall x, y, z)[x\cdot(y+z) = (x\cdot y)+(x\cdot z)]$,	cvičení III-1.12,	příklad 9
(pa6)	$(\forall x)(x \leq x)$,	úloha 7,	cvič. III-1.25
(pa7)	$(\forall x, y)[(x \leq y \;\&\; y \leq x) \rightarrow x = y]$,	příklad 5,	příklad 8
(pa8)	$(\forall x, y, z)[(x \leq y \;\&\; y \leq z) \rightarrow x \leq z]$,	cvičení III-1.14,	cvič. III-1.25
(pa9)	$(\forall x, y)(x \leq y \vee y \leq x)$,	příklad 6,	cvič. III-1.27
(pa10)	$(\forall x, y, z)(x = y \equiv x+z = y+z)$,	úloha 6, cvič. III-1.15,	příklady 7, 8
(pa11)	$(\forall x, y, z)[z \neq \mathit{0} \rightarrow (x = y \equiv x\cdot z = y\cdot z)]$,	cvič. III-1.19 a III-1.20,	příklady 7, 8
(pa12)	$(\forall x, y, z)(x \leq y \equiv x+z \leq y+z)$,	cvič. III-1.16,	příklady 7, 8
(pa13)	$(\forall x, y, z)[z \neq \mathit{0} \rightarrow (x \leq y \equiv x\cdot z \leq y\cdot z)]$,	cvič. III-1.17 a III-1.18,	příklady 7, 8
(pa14)	$(\forall x)(x \neq \mathfrak{S}(x))$,	cvič. III-1.11	příklady 7, 8.

Příklad 2. V Peanově aritmetice dokažme asociativitu sčítání, tzn. formuli

$$(\forall x, y, z)[(x+y)+z = x+(y+z)], \qquad \text{(pa1)}$$

a to indukcí podle proměnné z. Zvolme objekty x, y libovolně, avšak pevně. Pokud jste pochopil význam indukce, je vám zřejmé, že k důkazu formule

$$(\forall z)[(x+y)+z=x+(y+z)]$$

indukcí nám stačí jednak dokázat formuli $(x+y)+z=x+(y+z)$ pro hodnotu $z=\mathit{0}$, tj. dokázat formuli $(x+y)+\mathit{0}=x+(y+\mathit{0})$, a jednak dokázat indukční krok, tzn. formuli

$$(\forall z)[(x+y)+z=x+(y+z)\rightarrow(x+y)+\mathfrak{S}(z)=x+(y+\mathfrak{S}(z))].$$

(Abychom nahlédli, že uvedená formule je opravdu indukčním krokem, postačí ověřit, že její konsekvent vznikne z formule $(x+y)+z=x+(y+z)$ nahrazením proměnné z termem $\mathfrak{S}(z)$.)

Pro důkaz první požadované formule uvažujme rovnosti

$$(x+y)+\mathit{0}=x+y=x+(y+\mathit{0}).$$

První rovnost je triviálním důsledkem axiomu **RA4,** ve kterém nahradíme proměnnou x termem $x+y$. Druhou rovnost získáme z axiomu rovnosti pro sčítání užitím rovnosti $y=y+\mathit{0}$ (kterážto rovnost je dokazatelná v ***RA***, protože ji získáme z axiomu **RA4** nahrazením proměnné x číslem y). Užitím tranzitivity rovnosti získáme žádanou rovnost $(x+y)+\mathit{0}=x+(y+\mathit{0})$.

Pro důkaz indukčního kroku fixujme ještě objekt z splňující rovnost $(x+y)+z=x+(y+z)$, jinak však vybraný zcela libovolně. Uvažme rovnosti

$$(iii)\quad (x+y)+\mathfrak{S}(z)=\mathfrak{S}((x+y)+z)=\mathfrak{S}(x+(y+z))=x+\mathfrak{S}(y+z)=x+(y+\mathfrak{S}(z)).$$

První rovnost je důsledkem axiomu **RA5,** ve kterém nahradíme proměnnou x termem $x+y$ a proměnnou y číslem z. Druhou rovnost obdržíme aplikací axiomu rovnosti pro unární funkci $\mathfrak{S}$ a užitím námi předpokládané rovnosti $(x+y)+z=x+(y+z)$; třetí rovnost získáme užitím axiomu **RA5,** ve kterém nahradíme proměnnou y termem $y+z$. Závěrečnou rovnost dostaneme aplikací axiomu rovnosti pro sčítání využívajíce rovnost $\mathfrak{S}(y+z)=y+\mathfrak{S}(z)$, kterou obdržíme z axiomu **RA5** nahrazením proměnné x číslem y a nahrazením proměnné y číslem z. Prostým využitím tranzitivity rovnosti obdržíme z (iii) rovnost $(x+y)+\mathfrak{S}(z)=x+(y+\mathfrak{S}(z))$. Dokázali jsme tedy implikaci

$$(x+y)+z=x+(y+z)\rightarrow(x+y)+\mathfrak{S}(z)=x+(y+\mathfrak{S}(z))$$

a užitím generalizace proto dostaneme

$$(\forall z)[(x+y)+z=x+(y+z)\rightarrow(x+y)+\mathfrak{S}(z)=x+(y+\mathfrak{S}(z))].$$

Axiom indukce pro formuli $(x+y)+z=x+(y+z)$ (vzhledem k proměnné z) je formule

$$(x+y)+\mathit{0}=x+(y+\mathit{0})\rightarrow\big((\forall z)[(x+y)+z=x+(y+z)\rightarrow(x+y)+\mathfrak{S}(z)=x+(y+\mathfrak{S}(z))]\rightarrow \\ \rightarrow(\forall z)[(x+y)+z=x+(y+z)]\big).$$

V Peanově aritmetice jsme dokázali jak antecedent celé poslední formule, tak i antecedent jejího konsekventu. Dvojí aplikace modus ponens tudíž dokáže konsekvent konsekventu, tj. formuli $(\forall z)[(x+y)+z = x+(y+z)]$. Na závěr důkazu použijeme dvojnásobně odvozovací pravidlo generalizace (vzhledem k proměnným x, y) a získáme formuli (pa1).

Při dokazování používáme často pomocná tvrzení, která se obvykle v matematickém textu nazývají lemmata. Používají se hlavně pro zpřehlednění důkazu nebo pokud se chceme na pomocné tvrzení odvolat později znovu. Je-li důkaz příliš dlouhý nebo je-li nepřehledný, umožní totiž použití lemmat čtenáři snazší orientaci. V matematickém textu se nepokládá za slušné se příliš odvolávat dovnitř předchozích důkazů, neboť taková odvolání ztěžují čtení. Lemma bývá přehledně formulováno a odvolat se na něj (tj. aplikovat výsledek lemmatu znovu) je zcela běžnou praxí. Ukázkami takovýchto pomocných tvrzení budou v našem textu příklad 3 a úloha 4; obě ukázky použité z obou uvedených důvodů.

Příklad 3. V teorii ***PA*** dokažme pomocné tvrzení

$$(\forall x, y)(\mathfrak{S}(x) + y = \mathfrak{S}(x+y)). \tag{iv}$$

(Srovnejte dokazovanou rovnost s rovností z axiomu **RA5** — na levé straně rovnosti (iv) je funkce $\mathfrak{S}$ aplikována na prvého sčítance a v axiomu **RA5** na druhého). Důkaz provedeme indukcí podle proměnné y (při libovolně, avšak pevně fixovaném x), pročež stačí jednak dokázat formuli $\mathfrak{S}(x) + y = \mathfrak{S}(x+y)$ pro hodnotu $y = \mathit{0}$, tzn. dokázat formuli $\mathfrak{S}(x) + \mathit{0} = \mathfrak{S}(x+\mathit{0})$, a jednak dokázat indukční krok, tzn. formuli

$$(\forall y)[\mathfrak{S}(x) + y = \mathfrak{S}(x+y) \to \mathfrak{S}(x) + \mathfrak{S}(y) = \mathfrak{S}(x + \mathfrak{S}(y))].$$

(Pro ověření, že poslední implikace je skutečně indukčním krokem, postačí nahlédnout, že její konsekvent vznikne z formule $\mathfrak{S}(x) + y = \mathfrak{S}(x+y)$ nahrazením proměnné y termem $\mathfrak{S}(y)$.)

K dokázání první rovnosti uvažme rovnosti

$$\mathfrak{S}(x) + \mathit{0} = \mathfrak{S}(x) = \mathfrak{S}(x + \mathit{0}).$$

První rovnost získáme aplikací axiomu **RA4,** ve kterém proměnnou x nahradíme termem $\mathfrak{S}(x)$; druhá rovnost je důsledkem axiomu rovnosti pro funkci následovníka, protože rovnost $x = x + \mathit{0}$ je zaručena axiomem **RA4.** K získání $\mathfrak{S}(x) + \mathit{0} = \mathfrak{S}(x + \mathit{0})$ užijeme na závěr tranzitivitu rovnosti.

Pro důkaz indukčního kroku předpokládejme pro libovolně, avšak pevně, zvolené y rovnost $\mathfrak{S}(x) + y = \mathfrak{S}(x+y)$ (indukční předpoklad) a snažme se z ní vyvodit rovnost $\mathfrak{S}(x) + \mathfrak{S}(y) = \mathfrak{S}(x + \mathfrak{S}(y))$. K tomu účelu uvažme rovnosti

$$\mathfrak{S}(x) + \mathfrak{S}(y) = \mathfrak{S}(\mathfrak{S}(x) + y) = \mathfrak{S}(\mathfrak{S}(x+y)) = \mathfrak{S}(x + \mathfrak{S}(y)).$$

První rovnost získáme aplikací axiomu **RA5,** ve kterém proměnnou x nahradíme termem $\mathfrak{S}(x)$. Druhá rovnost je triviálním důsledkem axiomu rovnosti pro funkci $\mathfrak{S}$ a indukčního předpokladu. Třetí rovnost obdržíme opět aplikací axiomu rovnosti pro funkci následovníka, ve kterém tentokrát užijeme rovnost zaručenou axiomem **RA5.** Žádanou rovnost získáme dvojnásobným užitím tranzitivity rovnosti. Protože y bylo voleno pouze s předpokladem $\mathfrak{S}(x)+y = \mathfrak{S}(x+y)$, dokázali jsme pro libovolné y implikaci $\mathfrak{S}(x)+y = \mathfrak{S}(x+y) \to \mathfrak{S}(x)+\mathfrak{S}(y) = \mathfrak{S}(x+\mathfrak{S}(y))$; generalizací dokážeme formuli

$$(\forall y)[\mathfrak{S}(x) + y = \mathfrak{S}(x + y) \to \mathfrak{S}(x) + \mathfrak{S}(y) = \mathfrak{S}(x + \mathfrak{S}(y))].$$

Axiom indukce pro formuli $\mathfrak{S}(x) + y = \mathfrak{S}(x + y)$ (vzhledem k proměnné y) je formule

$$\mathfrak{S}(x) + 0 = \mathfrak{S}(x + 0) \to$$
$$\to \big((\forall y)[\mathfrak{S}(x)+y=\mathfrak{S}(x+y)\to\mathfrak{S}(x)+\mathfrak{S}(y)=\mathfrak{S}(x+\mathfrak{S}(y))]\to(\forall y)(\mathfrak{S}(x)+y=\mathfrak{S}(x+y))\big).$$

V Peanově aritmetice jsme dokázali jak antecedent celé poslední formule, tak i antecedent jejího konsekventu. Dvojí aplikace modus ponens tudíž dokáže konsekvent konsekventu, tj. formuli $(\forall y)(\mathfrak{S}(x) + y = \mathfrak{S}(x + y))$. Na závěr použijeme odvozovací pravidlo generalizace (vzhledem k proměnné x) a dokážeme formuli (iv).

Následující příklad je pravděpodobně nejtěžší aplikace indukce v celém textu. Když ho překonáte a budete mít k dalším úlohám a cvičením dost trpělivosti, zvládnete již dokazování v celém paragrafu.

Příklad 4. V Peanově aritmetice dokažme komutativitu sčítání, tzn. formuli

(pa2) $$(\forall x, y)(x + y = y + x).$$

Důkaz provedeme indukcí vzhledem k proměnné y. Před započetím uvedené indukce však dokážeme formuli $(\forall x)(x + 0 = 0 + x)$, a to opět indukcí, tentokrát (pochopitelně) vzhledem k proměnné x. Celý důkaz tvrzení (pa2) tudíž provádíme *dvojí indukcí* (a kdybychom započítali rovněž indukci z předchozího příkladu, který je pomocným tvrzením pro (pa2), jednalo by se docela o indukci trojí).

Pro důkaz formule $(\forall x)(x+0 = 0+x)$ indukcí podle proměnné x potřebujeme prokázat jednak formuli $x + 0 = 0 + x$ pro $x = 0$, tj. formuli $0 + 0 = 0 + 0$ (zde však není co dokazovat), a jednak indukční krok, tzn. formuli

$$(\forall x)(x + 0 = 0 + x \to \mathfrak{S}(x) + 0 = 0 + \mathfrak{S}(x)).$$

Pro libovolně, avšak pevně zvolené x předpokládejme rovnost $x + 0 = 0 + x$ (indukční předpoklad) a snažme se z ní vyvodit rovnost $\mathfrak{S}(x) + 0 = 0 + \mathfrak{S}(x)$, což je formule vzniklá z indukčního předpokladu nahrazením proměnné x termem $\mathfrak{S}(x)$. K tomu účelu uvažme rovnosti

$$\mathfrak{S}(x) + 0 = \mathfrak{S}(x) = \mathfrak{S}(x + 0) = \mathfrak{S}(0 + x) = 0 + \mathfrak{S}(x).$$

První rovnost získáme z axiomu **RA4** nahrazujíce proměnnou x termem $\mathfrak{S}(x)$. Druhá rovnost je důsledkem axiomu rovnosti pro funkci následovníka, při kterém užijeme rovnost $x + 0 = x$ zaručenou axiomem **RA4.** Třetí rovnost obdržíme opět z axiomu rovnosti pro funkci $\mathfrak{S}$, tentokrát na základě rovnosti $x + 0 = 0 + x$, což je indukční předpoklad. Poslední rovnost získáme aplikací **RA5** (nahrazujíce proměnnou x konstantou 0 a proměnnou y číslem x). Trojnásobnou aplikací tranzitivity rovnosti dostaneme $\mathfrak{S}(x) + 0 = 0 + \mathfrak{S}(x)$. Pro libovolně fixované x jsme dokázali implikaci $x + 0 = 0 + x \to \mathfrak{S}(x) + 0 = 0 + \mathfrak{S}(x)$, generalizací tudíž obdržíme $(\forall x)(x + 0 = 0 + x \to \mathfrak{S}(x) + 0 = 0 + \mathfrak{S}(x))$, což je indukční krok. Pročež indukce dokazuje formuli $(\forall x)(x + 0 = 0 + x)$.

Pro indukci vzhledem k proměnné y fixujme x zcela libovolně, avšak pevně. Pro tuto indukci potřebuje prokázat jednak formuli $x + y = y + x$ pro hodnotu $y = 0$, tj. formuli $x + 0 = 0 + x$, a jednak indukční krok, tzn. formuli $(\forall y)(x + y = y + x \to x + \mathfrak{S}(y) = \mathfrak{S}(y) + x)$. Pro naše zcela libovolně zvolené x užijme specifikaci již dokázané formule $(\forall x)(x + 0 = 0 + x)$ a získáme $x + 0 = 0 + x$.

Pro indukci podle proměnné y přikročme nyní k dokazování indukčního kroku, a k tomu účelu fixujme y s vlastností $x + y = y + x$, avšak jinak zcela libovolně. Uvažme rovnosti

$$x + \mathfrak{S}(y) = \mathfrak{S}(x + y) = \mathfrak{S}(y + x) = \mathfrak{S}(y) + x.$$

První rovnost je zaručena axiomem **RA5;** druhá rovnost je důsledkem axiomu rovnosti pro funkci následovníka a indukčního předpokladu $x + y = y + x$. Poslední rovnost je zaručena výsledkem předchozího příkladu. Dvojnásobným užitím tranzitivity rovnosti získáme následně rovnost $x + \mathfrak{S}(y) = \mathfrak{S}(y) + x$. Objekt y byl fixován zcela libovolně pouze s předpokladem $x + y = y + x$, dokázali jsme tedy pro zcela libovolný objekt y implikaci $x + y = y + x \to x + \mathfrak{S}(y) = \mathfrak{S}(y) + x$. Generalizací obdržíme $(\forall y)(x + y = y + x \to x + \mathfrak{S}(y) = \mathfrak{S}(y) + x)$, což je indukční krok pro právě probíhající indukci. Takže indukce zaručí formuli $(\forall y)(x + y = y + x)$ pro zcela libovolně fixovaný objekt x. Užitím generalizace vzhledem k proměnné x získáme formuli $(\forall x)(\forall y)(x + y = y + x)$.

Úloha 4. V ***PA*** dokažte pomocné tvrzení

$$(v) \qquad (\forall x, y)(\mathfrak{S}(x) \cdot y = (x \cdot y) + y),$$

a to indukcí podle proměnné y. Návod: Pro libovolně fixované x potřebujeme dokázat jednak rovnost $\mathfrak{S}(x) \cdot 0 = (x \cdot 0) + 0$ a jednak formuli

$$(\forall y)(\mathfrak{S}(x) \cdot y = (x \cdot y) + y \to \mathfrak{S}(x) \cdot \mathfrak{S}(y) = (x \cdot \mathfrak{S}(y)) + \mathfrak{S}(y)).$$

Pro sestrojení důkazu druhého tvrzení je vhodné užít již dokázané asociativity a komutativity sčítání, tzn. formulí (pa1) a (pa2), a dvojnásobně axiomy **RA5** a **RA7**.

(Srovnejte dokazovanou rovnost s rovností z axiomu **RA7** — na levé straně rovnosti (v) je funkce $\mathfrak{S}$ aplikována na prvého činitele a v axiomu **RA7** na druhého).

Úloha 5. V Peanově aritmetice dokažte komutativitu násobení, tj. formuli

$$(\forall x, y)(x \cdot y = y \cdot x). \tag{pa4}$$

Návod: Při fixovaném x potřebujete pro indukci podle proměnné y dokázat jednak rovnost $0 \cdot x = x \cdot 0$ a jednak formuli $(\forall y)(x \cdot y = y \cdot x \to \mathfrak{S}(y) \cdot x = x \cdot \mathfrak{S}(y))$. První rovnost dokažte indukcí podle proměnné x, pro důkaz druhé formule použijte výsledek předchozí úlohy.

Úloha 6. V ***PA*** dokažte formuli

$$(\forall x, y, z)[(x + z = y + z) \to x = y],$$

---

u4) Pro fixované x uvažme rovnosti $\mathfrak{S}(x) \cdot 0 = 0 = 0 + 0 = (x \cdot 0) + 0$. První rovnost je důsledkem **RA6,** ve kterém nahradíme proměnnou x termem $\mathfrak{S}(x)$, druhou obdržíme z axiomu **RA4** (v němž nahradíme proměnnou x konstantou 0) a třetí rovnost získáme z axiomu rovnosti pro sčítání, při jehož aplikaci využijeme rovnost $x \cdot 0 = 0$ (viz **RA6**). Pro fixované y splňující indukční předpoklad $\mathfrak{S}(x) \cdot y = (x \cdot y) + y$ prozkoumejme rovnosti

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}(x) \cdot \mathfrak{S}(y) &= (\mathfrak{S}(x) \cdot y) + \mathfrak{S}(x) = [(x \cdot y) + y] + \mathfrak{S}(x) = (x \cdot y) + (y + \mathfrak{S}(x)) = (x \cdot y) + \mathfrak{S}(y + x) = \\ &= (x \cdot y) + \mathfrak{S}(x + y) = (x \cdot y) + (x + \mathfrak{S}(y)) = [(x \cdot y) + x] + \mathfrak{S}(y) = (x \cdot \mathfrak{S}(y)) + \mathfrak{S}(y).\end{aligned}$$

Prvá rovnost je důsledkem axiomu **RA7,** ve kterém nahradíme proměnnou x termem $\mathfrak{S}(x)$. Druhá rovnost je zaručena axiomem rovnosti pro sčítání užívajícím indukční předpoklad a třetí rovnost plyne z již dokázané asociativity sčítání, tzn. z formule (pa1). Čtvrtou rovnost získáme z axiomu rovnosti pro sčítání využívajíce axiom **RA5** (ve kterém nahradíme proměnnou x číslem y a současně nahradíme proměnnou y číslem x). Další rovnost dostaneme z axiomů rovnosti pro sčítání a pro následovníka užívajíce komutativitu sčítání, tj. vlastnost (pa2), a šestou rovnost z axiomu rovnosti pro sčítání užívajíce **RA5.** Předposlední rovnost je znovu důsledkem asociativity sčítání a poslední získáme aplikací axiomu rovnosti pro sčítání užívajícího **RA7.**

u5) Dokažme nejprve formuli $(\forall x)(0 \cdot x = x \cdot 0)$ indukcí podle x. Rovnost $0 \cdot 0 = 0 \cdot 0$ je zcela evidentní. Nadto pro fixované x s vlastností $0 \cdot x = x \cdot 0$ uvažme rovnosti

$$0 \cdot \mathfrak{S}(x) = (0 \cdot x) + 0 = (x \cdot 0) + 0 = 0 + 0 = 0 = \mathfrak{S}(x) \cdot 0.$$

První rovnost obdržíme užitím **RA7,** ve kterém nahradíme proměnnou x konstantou 0 a proměnnou y nahradíme číslem x, druhou a třetí rovnost získáme užitím axiomu rovnosti pro sčítání a indukčního předpokladu v prvém případě a axiomu **RA6** v případě druhém, předposlední rovnost plyne z **RA4** a poslední dostaneme podle axiomu **RA6,** ve kterém proměnnou x nahradíme termem $\mathfrak{S}(x)$. Dokázali jsme indukční krok, a proto indukce dokončuje důkaz formule $(\forall x)(0 \cdot x = x \cdot 0)$.
Navíc jsme schopni triviálně dokázat indukční krok (pro indukci podle proměnné y) potřebný pro ukázání (pa4), neboť pro fixované y vyhovující indukčnímu předpokladu $x \cdot y = y \cdot x$ máme

$$\mathfrak{S}(y) \cdot x = (y \cdot x) + x = (x \cdot y) + x = x \cdot \mathfrak{S}(y).$$

První rovnost získáme specifikací tvrzení (v), druhou v důsledku axiomu rovnosti pro sčítání využívajícího indukční předpoklad a poslední rovnost je zaručena axiomem **RA7.**

která je součástí tvrzení (pa10). Návod: Prokazujte indukcí podle proměnné z; pro prokázání indukčního kroku předpokládejte $x+\mathfrak{S}(z) = y+\mathfrak{S}(z)$ a užijte postupně **RA5, RA2** a indukční předpoklad k dokázání potřebné rovnosti $x = y$.

Úloha 7. V teorii ***PA*** dokažte reflexivitu predikátu $\leq$, tj. formuli

(pa6) $$(\forall x)(x \leq x).$$

Návod: V důsledku **RA8** potřebujeme dokázat existenci u takového, že $u+x = x$; užijte (pa2).

Příklad 5. V Peanově aritmetice dokažme slabou antisymetrii predikátu $\leq$, tzn. formuli

(pa7) $$(\forall x, y)[(x \leq y \ \& \ y \leq x) \rightarrow x = y].$$

Jestliže předpokládáme $x \leq y \ \& \ y \leq x$, pak existují (podle **RA8**) přirozená čísla u, v tak, že $u + x = y \ \& \ v + y = x$, za použití asociativity sčítání (pa1) a axiomu rovnosti pro sčítání dostáváme tedy

$$(v + u) + x = v + (u + x) = v + y = x.$$

Na základě už dokázané komutativity sčítání a axiomu **RA4** získáme za našich předpokladů dále $\mathit{0} + x = x = (u + v) + x$, pročež v důsledku tvrzení z úlohy 6 je $\mathit{0} = u + v$. Využívajíce dále tvrzení (ra1) z prvního příkladu, obdržíme $u = \mathit{0}$, a tudíž komutativita sčítání spolu s axiomem **RA4** implikují $x = y$.

Příklad 6. V teorii ***PA*** dokážeme trichotomii predikátu $\leq$, tj. formuli

(pa9) $$(\forall x, y)(x \leq y \vee y \leq x).$$

Důkaz provedeme indukcí podle proměnné y pro fixované x. Nejprve užijeme specifikaci na formuli (ra3) a triviálně získáme potřebné $\mathit{0} \leq x$. Dokazujme proto indukční krok, tzn. formuli

$$(\forall y)[(x \leq y \vee y \leq x) \rightarrow (x \leq \mathfrak{S}(y) \vee \mathfrak{S}(y) \leq x)].$$

K tomu účelu fixujme zcela libovolně y. Chceme užít důkaz rozborem případů, pročež nám postačuje dokázat dvě implikace: implikaci $y \leq x \rightarrow (y \leq \mathfrak{S}(x) \vee \mathfrak{S}(y) \leq x)$ a implikaci $x \leq y \rightarrow (y \leq \mathfrak{S}(x) \vee \mathfrak{S}(y) \leq x)$.

V prvém případě předpokládáme $y \leq x$, neboli podle **RA8** předpokládáme existenci u s vlastností $u + y = x$. Pro toto u však nahlédneme rovnosti

$$\mathfrak{S}(u) + y = \mathfrak{S}(u + y) = \mathfrak{S}(x).$$

První rovnost je specifikací formule (iv) (viz příklad 3), druhou obdržíme z axiomu rovnosti pro následovníka užívajíce rovnost $u + y = x$. Na závěr aplikujeme **RA8,** ve kterém teď za hledané u zvolíme $\mathfrak{S}(u)$, a získáme $y \leq \mathfrak{S}(x)$.

[u6] Pro fixovaná x, y dokažte formuli $(\forall z)(x + z = y + z \rightarrow x = y)$ indukcí podle proměnné z. Pro $\mathit{0}$ není co dokazovat v důsledku **RA4.** Předpokládejme tedy $x + z = y + z \rightarrow x = y$ (indukční předpoklad) a $x + \mathfrak{S}(z) = y + \mathfrak{S}(z)$ (tato rovnost je antecedentem dokazované implikace $x + \mathfrak{S}(z) = y + \mathfrak{S}(z) \rightarrow x = y$). Pak

$$\mathfrak{S}(x + z) = x + \mathfrak{S}(z) = y + \mathfrak{S}(z) = \mathfrak{S}(y + z)$$

v důsledku **RA5;** užití **RA2** tedy zaručí $x + z = y + z$, a prostá aplikace modus ponens na indukční předpoklad přinese tudíž $x = y$.

[u7] Jest $\mathit{0} + x = x + \mathit{0} = x$ podle (pa2) a **RA4.**

Za předpokladu $x \leq y$ můžeme (opět na základě **RA8**) fixovat u tak, že $u+x=y$. Je-li $u=\mathit{0}$, je $x=y$ na základě již dokázané formule (pa2) a axiomu **RA4,** takže stačí prostě užít (pa6) a již dokázaný první případ. Předpokládejme tudíž navíc $u \neq \mathit{0}$. Pak nám axiom **RA3** dovoluje fixovat v s vlastností $\mathfrak{S}(v)=u$; po této fixaci dostáváme rovnosti

$$y = u + x = \mathfrak{S}(v) + x = \mathfrak{S}(v + x) = v + \mathfrak{S}(x).$$

Přitom první dvě rovnosti jsou zaručeny volbou u, v (při prokazování druhé použijeme navíc axiom rovnosti pro sčítání). Třetí rovnost je důsledkem již dokázané formule (iv) (proměnnou x nahraďme fixovaným přirozeným číslem v a proměnnou y nahraďme číslem x) a poslední rovnost získáme z axiomu **RA4** nahrazením proměnné x termem v a proměnné y číslem x. Za našeho předpokladu jsme dokázali nerovnost $\mathfrak{S}(x) \leq y$. (Uvědomujete si, že jsme implicitně využívali důkaz neutrální formulí vzhledem k formuli $u=\mathit{0}$?)

* * *

Formule $\mathfrak{S}(x) \neq x$ je navýsost intuitivní a je tak jednoduchá, že okamžitě vzniká otázka, proč jsme ji zařadili až do seznamu formulí dokazatelných v Peanově aritmetice a nikoli již do seznamu formulí dokazatelných v aritmetice Robinsonově. Pravděpodobně každý, kdo připouští, že kniha je trochu rozumně sestavena, si odpoví, že v Robinsonově aritmetice autor neuměl tuto formuli dokázat. Odpověď je však mnohem lepší a silnější[2]: v Robinsonově aritmetice formuli $\mathfrak{S}(x) \neq x$ vůbec dokázat nelze! Jak je možno takto silnou výpověď vůbec obhájit, nám ukáží následující stránky. Zachovejme však alespoň trochu historické souvislosti a popišme, jak matematici vůbec k myšlence prokázání nedokazatelnosti dospěli.

Již při motivování pojmu teorie v §2 předcházející kapitoly jsme zmínili veliký vliv geometrie pro rozvoj deduktivního přístupu, a to zejména při vytváření tohoto pojetí. Geometrie však i později ovlivňovala rozvoj logiky, a to zejména v souvislosti s pátým Eukleidovým postulátem[3]. Tento postulát (dnes formulovávaný: „Daným bodem lze vést právě jednu rovnoběžku s danou přímkou".) byl v jistém smyslu výjimečný, neboť mnoho tvrzení bylo možno dokázat bez tohoto předpokladu, a navíc pátý postulát vypovídá — na rozdíl od ostatních — o „vzdálených" bodech, tzn. o bodech na *jakkoli velkém* papíru[4]. Pravděpodobně díky této výjimečnosti se ho matematici začali pokoušet dokázat ze zbývajících předpokladů a teprve po mnoha staletích neúspěšných pokusů přijali možnost, že takový důkaz neexistuje (zejména N.I. Lobačevskij 1793–1856 a János Bolyai 1802–1860, ale jsou náznaky, že již před nimi totéž učinil Girolamo Saccheri a velmi pravděpodobně — podle korespondence, avšak bez výslovného zveřejnění — K.F. Gauss). Ukázat, že takovýto důkaz *opravdu neexistuje* se podařilo jako

[2] Pochopitelně za předpokladu, že ***RA*** je teorií bezespornou.

[3] Historie pátého postulátu je popsaná podrobněji např. v práci [V2].

[4] Rovnoběžky jsou definovány jako ty přímky, které se nikdy — tedy ani ve „vzdálených" bodech — neprotnou.

prvnímu Eugenisovi Beltramimu (viz [Be]), níže uváděná konstrukce Felixe Kleina je v některých aspektech poněkud jednodušší a pochází rovněž z r. 1868.

Předvedeme ideu konstrukce modelu neeuklidovské geometrie (tzn. euklidovské geometrie, ve které je pátý postulát nahrazen svojí negací) na základě modelu geometrie euklidovské. V modelu euklidovské geometrie zvolíme libovolný kruh (bez obvodové kružnice) a základní predikáty geometrie „být bodem“ a „být přímkou“ „přeložíme“ jakožto „být bodem kruhu“ a „být tětivou kruhu“. Nyní je třeba ověřit v euklidovské geometrii dokazatelnost *všech* „překladů“ axiomů neeuklidovské geometrie, my se omezíme na zkoumání pouze „překladu“ jediného axiomu jako příkladu: „překladem“ postulátu „každými dvěma body lze vést právě jednu přímku“ je „každými dvěma body v kruhu lze vést právě jednu tětivu“, což je evidentně v euklidovské geometrii dokazatelné. Nadto „překlad“ negace pátého postulátu plyne z tvrzení, že existuje tětiva p a bod A v kruhu, kterým procházejí alespoň dvě různé tětivy, které se s původní tětivou neprotínají *uvnitř kruhu* (viz diagram 1; „nikdy neprotnou“ totiž „překládáme“: „neprotnou uvnitř kruhu“). Je tedy možno uzavřít (po prozkoumání dokazatelnosti „překladů“ ostatních axiomů), že je-li euklidovská geometrie bezesporná, pak pátý postulát není dokazatelný ze zbývajících axiomů euklidovské geometrie (neboli řečeno jinými slovy, je-li euklidovská geometrie bezesporná, je bezesporná i neeuklidovská geometrie). Je však nutno upozornit, že ověřování dokazatelnosti „překladů“ některých axiomů je podstatně složitější; např. predikát „být kružnicí“ *nelze* „překládat“ jednoduše pomocí „býti kružnicí uvnitř kruhu“.

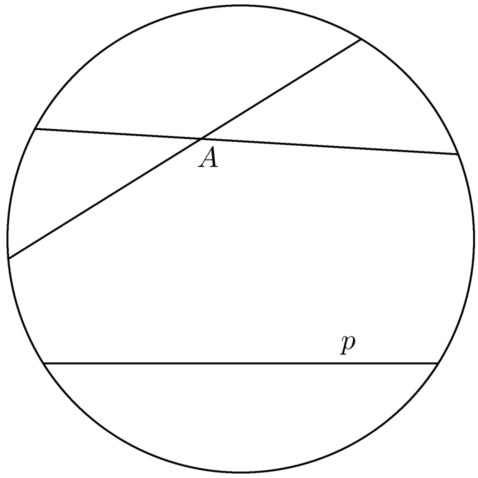

Diagram 1

*

Axiomy Peanovy aritmetiky jsou voleny tak, aby popisovaly naše představy o přirozených číslech; předpokládejme tedy, že systém intuitivních přirozených čísel spolu s intuitivními funkcemi následovníka, sčítání a násobení vytváří model *Peanovy* aritmetiky. Tento model je zvykem označovat $\mathbb{N}$ a nazývat **přirozený** (nebo také *standardní*) **model;** protože Robinsonova aritmetika je slabší než Peanova, je $\mathbb{N}$ také modelem $\boldsymbol{RA}$. Předpoklad, že $\mathbb{N}$ je modelem Peanovy aritmetiky, zaručuje, že Peanova aritmetika je bezesporná. (V bezespornost $\boldsymbol{PA}$ věří téměř všichni matematici.)

K prokázání nedokazatelnosti formule φ v nějaké teorii $\boldsymbol{T}$ postačuje sestrojit model teorie $\boldsymbol{T}$, ve kterém není pravdivá formule φ (viz tzv. korektnost popsanou v §2 kap. II). Velmi často budeme hledaný model sestrojovat úpravou nějakého předpokládaného modelu teorie $\boldsymbol{T}$. Na počátku našeho zkoumání se budeme snažit vytvořit model Robinsonovy aritmetiky, ve kterém je pravdivá formule $(\exists x)(x = \mathfrak{S}(x))$ (tj. není pravdivá formule (pa14)). Doufám, že znáte odpověď na otázku, proč se nesnažíme sestrojit model *Peanovy* aritmetiky, ve kterém je uvedená formule pravdivá. — Opravdu znáte odpověď? — V Peanově aritmetice je dokazatelná formule (pa14), která je negací formule $(\exists x)(x = \mathfrak{S}(x))$, takže Peanova aritmetika s dodatečným axiomem $(\exists x)(x = \mathfrak{S}(x))$ je sporná, pročež nemůže mít model. Víme proto, že naše snažení o model Peanovy aritmetiky s negací (pa14) jakožto dodatečným axiomem je již předem odsouzeno k nezdaru.

Zadat strukturu $\mathbb{M}$ pro jazyk aritmetiky znamená zadat její univerzum (které budeme značit M), zadat jedno individuum, které budeme chápat jako $\mathit{0}$ ve smyslu struktury (znak $\mathit{0}_{\mathbb{M}}$) a zadat realizace aritmetických funkcí (tj. $\mathfrak{S}_{\mathbb{M}}, +_{\mathbb{M}}$ a $\cdot_{\mathbb{M}}$). (Predikát $\leq$ je definován axiomem **RA8**, pročež je jeho realizace v jakékoli struktuře pro jazyk aritmetiky jednoznačně určena realizací sčítání.) V následujících třech příkladech, dvou úlohách a osmi cvičeních se budeme zabývat třinácti strukturami $\mathbb{O}_1$–$\mathbb{O}_{13}$ a pro zjednodušení zápisu budeme psát $\mathfrak{S}_i, +_i, \cdot_i$ místo $\mathfrak{S}_{\mathbb{O}_i}, +_{\mathbb{O}_i}, \cdot_{\mathbb{O}_i}$; pro další zjednodušení zápisu budeme předpokládat, že ve všech strukturách je individuum $\mathit{0}_{\mathbb{M}}$ číslem 0. Při rozšiřování zadané struktury $\mathbb{M}$ (speciálně při rozšiřování modelu $\mathbb{N}$) do struktury $\mathbb{O}_i$ zachováváme nejen původní realizace konstanty $\mathit{0}$, avšak také původní realizace funkcí následovníka, sčítání a násobení — podrobněji $\mathit{0}_i = \mathit{0}_{\mathbb{M}} = 0$ a pro každá „stará individua“ $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ (prvky množiny M) položíme $\mathfrak{S}_i(\mathbf{x}) = \mathfrak{S}_{\mathbb{M}}(\mathbf{x}), \mathbf{x} +_i \mathbf{y} = \mathbf{x} +_{\mathbb{M}} \mathbf{y}$ a $\mathbf{x} \cdot_i \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot_{\mathbb{M}} \mathbf{y}$).

Výše jsme uvedli tabulku formulí dokazatelných v Peanově aritmetice a ponechali jsme otevřený význam posledního sloupce v této tabulce. Do něho jsme zaznamenali místo konstrukce struktury prokazující *nedokazatelnost* té které formule v Robinsonově aritmetice[5)].

Příklad 7. Rozšiřme jakýkoli výchozí model $\mathbb{M}$ Robinsonovy aritmetiky přidáním jednoho individua $\mathbf{a}$ (neboli univerzum struktury $\mathbb{O}_1$ bude univerzum struktury $\mathbb{M}$ s jedním nově přidaným individuem $\mathbf{a}$) a to tak, že individuum $\mathbf{a}$ bude svým vlastním následovníkem (tj. položíme $\mathfrak{S}_1(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$). Buďte $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ individua výchozího modelu $\mathbb{M}$ Robinsonovy aritmetiky.

Realizaci následovníka ve struktuře $\mathbb{O}_1$ budeme tedy definovat rovnostmi $\mathfrak{S}_1(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$ a $\mathfrak{S}_1(\mathbf{x}) = \mathfrak{S}_{\mathbb{M}}(\mathbf{x})$ a realizace součtu a součinu v této struktuře

5) Do tabulky jsme vyznačili jen některé z níže vyšetřovaných modelů $\boldsymbol{RA}$, ve kterých není ta která formule z našeho seznamu splněna; tzn. v některých modelech nejsou určité formule ze seznamu (pa1)–(pa14) splněny, aniž je to v textu výslovně zmíněno.

budeme definovat nejprve rovnostmi a ekvivalentně (snad přehledněji) tabulkami pod nimi:

$\mathfrak{x} +_1 \mathfrak{a} = \mathfrak{a} +_1 \mathfrak{x} = \mathfrak{a} +_1 \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, $\quad 0 \cdot_1 \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \cdot_1 0 = 0$,

$\mathfrak{x} +_1 \mathfrak{y} = \mathfrak{x} +_{\mathbb{M}} \mathfrak{y}$, $\quad \mathfrak{x} \cdot_1 \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \cdot_1 \mathfrak{x} = \mathfrak{a} \cdot_1 \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ pro $\mathfrak{x} \neq 0$,

$\mathfrak{x} \cdot_1 \mathfrak{y} = \mathfrak{x} \cdot_{\mathbb{M}} \mathfrak{y}$;

$+_1$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{y}$
$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{a}$
$\mathfrak{x}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{x} +_{\mathbb{M}} \mathfrak{y}$

$\cdot_1$	$\mathfrak{a}$	0	$\mathfrak{y} \neq 0$
$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{a}$	0	$\mathfrak{a}$
0	0	0	$0 \cdot_{\mathbb{M}} \mathfrak{y}$
$\mathfrak{x} \neq 0$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{x} \cdot_{\mathbb{M}} 0$	$\mathfrak{x} \cdot_{\mathbb{M}} \mathfrak{y}$.

Naším prvním úkolem je prokázat, že struktura $\mathbb{O}_1$ je skutečně modelem Robinsonovy aritmetiky, tzn. ukázat, že ve struktuře jsou pravdivé všechny axiomy ***RA***. Nechť $\mathfrak{b}$ označuje jakékoli individuum struktury $\mathbb{O}_1$, tj. je buďto individuem struktury $\mathbb{M}$ nebo individuem $\mathfrak{a}$. Prověřit pravdivost axiomů **RA1**–**RA4** a **RA6** bude ve všech uváděných strukturách snadné; srdcem ověření, že skutečně jde o model ***RA***, bude prověřování axiomů **RA5** a **RA7;** připomeňme, že axiom **RA8** je pouhou definicí predikátu $\leq$. Ve strukturách $\mathbb{O}_3$–$\mathbb{O}_{13}$ budeme zdůvodňovat jen pravdivost axiomů **RA5** a **RA7,** avšak v případě prvních dvou struktur ztraťme pár slov i o ostatních axiomech.

RA1 V modelu $\mathbb{M}$ nemá 0 předchůdce, protože $\mathbb{M}$ je modelem Robinsonovy aritmetiky, takže pro každé $\mathfrak{x}$ je $\mathfrak{S}_1(\mathfrak{x}) = \mathfrak{S}_{\mathbb{M}}(\mathfrak{x}) \neq 0$. Nadto předchůdcem 0 nemůže být ani nově přidávané individuum v důsledku volby $\mathfrak{S}_1(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$.

RA2 Pro žádné „staré individuum“ $\mathfrak{x}$ nemůže nastat $\mathfrak{S}_1(\mathfrak{x}) = \mathfrak{S}_1(\mathfrak{a})$, neboť $\mathfrak{S}_1(\mathfrak{x})$ je prvkem M a $\mathfrak{a} = \mathfrak{S}_1(\mathfrak{a})$ nikoli. Pro „stará individua“ je axiom **RA2** pravdivý ve struktuře $\mathbb{O}_1$ v důsledku předpokladu jeho pravdivosti ve struktuře $\mathbb{M}$ (a v důsledku $\mathfrak{S}_1(\mathfrak{x}) = \mathfrak{S}_{\mathbb{M}}(\mathfrak{x})$).

RA3 Každé nenulové individuum $\mathfrak{x}$ modelu $\mathbb{M}$ má předchůdce (tj. existuje $\mathfrak{y}$ tak, že $\mathfrak{S}_1(\mathfrak{y}) = \mathfrak{S}_{\mathbb{M}}(\mathfrak{y}) = \mathfrak{x}$) v důsledku předpokládané pravdivosti axiomu **RA3** ve struktuře $\mathbb{M}$. Předchůdcem individua $\mathfrak{a}$ je ono samo (neboť $\mathfrak{S}_1(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$), pročež je pravdivost **RA3** ve struktuře $\mathbb{O}_1$ triviální.

RA4,6 Axiomy **RA4** a **RA6** pro individuum $\mathfrak{a}$ nahlédneme přímo ze zadání, neboť $\mathfrak{a} +_1 0 = \mathfrak{a}$ a $\mathfrak{a} \cdot_1 0 = 0$; pro individua modelu $\mathbb{M}$ si stačí uvědomit, že $\mathbb{M}$ je modelem ***RA***, v důsledku čehož $\mathfrak{x} +_1 0 = \mathfrak{x} +_{\mathbb{M}} 0 = \mathfrak{x}$ a současně $\mathfrak{x} \cdot_1 0 = \mathfrak{x} \cdot_{\mathbb{M}} 0 = 0$.

Pro vyšetření pravdivosti axiomů **RA5,7** uvažme rovnosti

RA5 $\mathfrak{b} +_1 \mathfrak{S}_1(\mathfrak{a}) = \mathfrak{b} +_1 \mathfrak{a} = \mathfrak{a} = \mathfrak{S}_1(\mathfrak{a}) = \mathfrak{S}_1(\mathfrak{b} +_1 \mathfrak{a})$,
$\mathfrak{a} +_1 \mathfrak{S}_1(\mathfrak{x}) = \mathfrak{a} = \mathfrak{S}_1(\mathfrak{a}) = \mathfrak{S}_1(\mathfrak{a} +_1 \mathfrak{x})$,

RA7 $0 \cdot_1 \mathfrak{S}_1(\mathfrak{a}) = 0 \cdot_1 \mathfrak{a} = 0 \cdot_1 \mathfrak{a} +_1 0$,
$\mathfrak{b} \cdot_1 \mathfrak{S}_1(\mathfrak{a}) = \mathfrak{b} \cdot_1 \mathfrak{a} = \mathfrak{a} = \mathfrak{a} +_1 \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cdot_1 \mathfrak{a} +_1 \mathfrak{b}$ pro $\mathfrak{b} \neq 0$,
$\mathfrak{a} \cdot_1 \mathfrak{S}_1(\mathfrak{x}) = \mathfrak{a} = \mathfrak{a} +_1 \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \cdot_1 \mathfrak{x} +_1 \mathfrak{a}$

a uvědomme si, že poslední rovnost je v pořádku i pro $\mathfrak{x} = 0$, protože

$$\mathfrak{a} +_1 \mathfrak{a} = \mathfrak{a} = 0 +_1 \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \cdot_1 \mathfrak{x} +_1 \mathfrak{a}.$$

Navíc je třeba nahlédnout, že v předchozích řádcích jsme prozkoumali všechny potřebné případy, protože pro individua modelu $\mathbb{M}$ plyne pravdivost axiomů **RA5,7** ve struktuře $\mathbb{O}_1$ z jejich pravdivosti ve struktuře $\mathbb{M}$.

Model $\mathbb{O}_1$ *zachovává* z výchozího modelu $\mathbb{M}$ pravdivost komutativity, a to jak sčítání, tak i násobení. Uvedené plyne z konstrukce, protože jak součet, tak i součin, jehož alespoň jedním sčítancem/činitelem je nově přidávaný prvek, je komutativní.

Diagram 2

Ve smyslu modelu $\mathbb{O}_1$ jsme nový prvek přidali „dozadu“ (viz diagram 2), což je formálněji vyjádřeno vztahy:
(a) $\mathbb{O}_1 \models \mathfrak{b} \leq_1 \mathfrak{a}$, protože $\mathfrak{a} +_1 \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ pro každé individuum $\mathfrak{b}$ modelu $\mathbb{O}_1$;
(b) $\mathbb{O}_1 \models \neg\mathfrak{a} \leq_1 \mathfrak{x}$, neboť $\mathfrak{b} +_1 \mathfrak{a} \neq \mathfrak{x}$ pro každé individuum $\mathfrak{b}$ modelu $\mathbb{O}_1$,
takže diagram vpravo zaznamenává uspořádání v modelu $\mathbb{O}_1$.

V modelu $\mathbb{O}_1$ *nejsou pravdivé* formule:
(pa14), tzn. $(\forall x)(\mathfrak{S}(x) \neq x)$, neboť $\mathfrak{a} = \mathfrak{S}_1(\mathfrak{a})$;
(pa10), tj. $(\forall x, y, z)(x + z = y + z \to x = y)$, protože $\mathfrak{S}_1(0) +_1 \mathfrak{a} = \mathfrak{a} = 0 +_1 \mathfrak{a}$ a současně formule $\mathfrak{S}(\mathit{0}) \neq \mathit{0}$ je dokazatelná (viz (ra5)) v Robinsonově aritmetice, a následně je proto pravdivá v každém modelu ***RA***;
(pa12), tzn. $(\forall x, y, z)(x + z \leq y + z \to x \leq y)$, neboť

$$\mathfrak{S}_1(0) +_1 \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \leq_1 \mathfrak{a} = 0 +_1 \mathfrak{a}$$

a současně ve struktuře není pravdivá formule $\mathfrak{S}(\mathit{0}) \leq \mathit{0}$ v důsledku dokazatelnosti formulí (ra3) a (ra5) v ***RA*** (a následné jejich pravdivosti v každém modelu teorie ***RA***);
(pa11), tzn. $(\forall x, y, z)[z \neq \mathit{0} \to (x = y \equiv x \cdot z = y \cdot z)]$, neboť $\mathfrak{a} \cdot_1 \mathfrak{a} = \mathfrak{a} = \mathfrak{S}(0) \cdot_1 \mathfrak{a}$;
(pa13), tj. $(\forall x, y, z)[z \neq \mathit{0} \to (x \leq y \equiv x \cdot z \leq y \cdot z)]$ — stačí užít stejná individua jako v předchozím případě a navíc použít výše uvedené body (a) a (b).

Na závěr to nejdůležitější poučení z konstrukce struktury $\mathbb{O}_1$. V modelu $\mathbb{O}_1$ Robinsonovy aritmetiky není pravdivá například formule $(\forall x)(\mathfrak{S}(x) \neq x)$. Takže tato formule *není dokazatelná* v Robinsonově aritmetice, na druhé straně jsme ji zařadili do seznamu formulí dokazatelných v aritmetice Peanově (a slíbili dokázat ve cvičení III-1.11). Následně v Peanově aritmetice jsme schopni dokázat určitě více formulí než v ***RA***.

Ve cvičeních III-1.21 a III-1.22 se ještě budeme zabývat možností přidání jednoho nového individua. Navíc ve cvičeních III-1.23, III-1.25–III-1.28 ukážeme více možností, jak přidat přesně *dvě* nová individua.

Teď přejděme k popisu tří modelů vzniklých přidáním nekonečně mnoha individuí. První dva z nich umožní prokázat nedokazatelnost většiny z formulí (pa1)–(pa13) v Robinsonově aritmetice s dodatečným axiomem (pa14).

Přirozená čísla se běžně chápou jako část čísel celých Z. Strukturu intuitivních celých čísel (pro jazyk obsahující konstantu $\mathit{0}$ a funkce sčítání, násobení a následovníka) budeme značit $\mathbb{Z}$. V následujících dvou příkladech a úlohách potřebujeme, aby žádné přirozené číslo nebylo celým číslem, jistě si však dovedete představit, jak by se vhodným kódováním tohoto dosáhlo. Nicméně každému přirozenému číslu n odpovídá zřejmým způsobem celé číslo, jež budeme značit $n_{\mathbb{Z}}$. Speciálně $0_{\mathbb{Z}}$ označuje nulu v celých číslech a znak $1_{\mathbb{Z}}$ užíváme pro jedničku v celých číslech, atd. Pro sčítání jak přirozených, tak také celých čísel budeme používat stejný znak $+$, analogicky pro násobení užíváme stejný znak $\cdot$ (zda pracujeme v tom kterém okamžiku v celých nebo přirozených číslech pozná zvídavý čtenář z druhu čísel, která znak funkce obklopují).

Příklad 8. Univerzum našeho modelu $\mathbb{O}_2$ se bude skládat jak z intuitivních přirozených čísel (značených n, m), tak z intuitivních čísel celých (pro ně budeme užívat znaky z, q). Pokud máme v sestrojované struktuře sečíst dvě přirozená čísla, sečteme je tak, jak se sečítají přirozená čísla. Máme-li sečíst dvě celá čísla, sečteme je jako celá čísla. Jestliže sčítáme jedno přirozené číslo a jedno celé číslo (v jakémkoli pořadí), představíme si přirozené číslo jako číslo celé (neboli uvažujeme jemu odpovídající číslo, jež je individuem modelu celých čísel $\mathbb{Z}$) a sečteme tato dvě celá čísla. Přesně stejně postupujeme při násobení (speciálně součin přirozeného a celého čísla v jakémkoli pořadí je součin tohoto celého čísla a celého čísla odpovídajícího přirozenému číslu) s jedinou výjimkou: součin jakéhokoli čísla a v jakémkoli pořadí s 0 je přirozené číslo 0. Funkce následovníka je unární, pročež problém nevzniká — následovník přirozeného čísla bude prostě následovník v přirozených číslech a následovník celého čísla z bude jeho následovník v celých číslech (tj. celé číslo $z + 1_{\mathbb{Z}}$). Doufám, že popis realizace funkcí ve struktuře $\mathbb{O}_2$ je zcela jasný, přesto připojuji formální zápis definice, a to jak rovnostmi, tak také tabulkami:

$$
\begin{array}{lll}
\mathfrak{S}_2(n) = n + 1, & n \cdot_2 m = n \cdot m, & \\
\mathfrak{S}_2(z) = z + 1_{\mathbb{Z}}, & z \cdot_2 q = z \cdot q, & \\
n +_2 m = n + m, & 0 \cdot_2 z = z \cdot_2 0 = 0, & \\
z +_2 q = z + q, & n \cdot_2 z = n_{\mathbb{Z}} \cdot z & \text{pro } n \neq 0, \\
n +_2 z = n_{\mathbb{Z}} + z, & z \cdot_2 n = z \cdot n_{\mathbb{Z}} & \text{pro } n \neq 0\,; \\
z +_2 n = z + n_{\mathbb{Z}}, & &
\end{array}
$$

$+_2$	m	q
n	$n + m$	$n_{\mathbb{Z}} + q$
z	$z + m_{\mathbb{Z}}$	$z + q$

$\cdot_2$	0	$m \neq 0$	q
0	0	0	0
$n \neq 0$	0	$n \cdot m$	$n_{\mathbb{Z}} \cdot q$
z	0	$z \cdot m_{\mathbb{Z}}$	$z \cdot q.$

Ověřme, že struktura $\mathbb{O}_2$ je modelem Robinsonovy aritmetiky; přitom podruhé (a naposledy) připojme odůvodnění pravdivosti ve struktuře i pro jiné axiomy než **RA5,7:**

RA1 Žádné celé číslo není předchůdcem 0 podle zadání struktury a na intuitivních přirozených číslech jsme hodnotu funkce následovníka neměnili.

RA2 Následovník přirozeného čísla není nikdy číslem celým — na přirozených číslech jsme hodnotu funkce následovníka neměnili. Předchůdcem celého čísla z je číslo $z - 1_{\mathbb{Z}}$ a implikace $z \neq q \to z - 1_{\mathbb{Z}} \neq q - 1_{\mathbb{Z}}$ je triviální.

RA3 Axiom plyne jednoduše z faktů uvedených v předchozím bodě.

RA4,6 Zkoumané axiomy plynou zcela evidentně ze zadání struktury $\mathbb{O}_2$.

RA5
$$\begin{aligned}
z +_2 \mathfrak{S}_2(n) &= z + (n+1)_{\mathbb{Z}} = z + (n_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}}) = (z + n_{\mathbb{Z}}) + 1_{\mathbb{Z}} = \\
&= \mathfrak{S}_2(z + n_{\mathbb{Z}}) = \mathfrak{S}_2(z +_2 n), \\
n +_2 \mathfrak{S}_2(z) &= n_{\mathbb{Z}} + (z + 1_{\mathbb{Z}}) = (n_{\mathbb{Z}} + z) + 1_{\mathbb{Z}} = \mathfrak{S}_2(n +_2 z), \\
q +_2 \mathfrak{S}_2(z) &= q + (z + 1_{\mathbb{Z}}) = (q + z) + 1_{\mathbb{Z}} = \mathfrak{S}_2(q +_2 z),
\end{aligned}$$

RA7
$$\begin{aligned}
z \cdot_2 \mathfrak{S}_2(n) &= z \cdot (n+1)_{\mathbb{Z}} = z \cdot (n_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}}) = (z \cdot n_{\mathbb{Z}}) + z = (z \cdot_2 n) +_2 z, \\
0 \cdot_2 \mathfrak{S}_2(z) &= 0 = 0 + 0 = 0 \cdot_2 z +_2 0, \\
n \cdot_2 \mathfrak{S}_2(z) &= n_{\mathbb{Z}} \cdot (z + 1_{\mathbb{Z}}) = n_{\mathbb{Z}} \cdot z + n_{\mathbb{Z}} = n \cdot_2 z +_2 n \qquad \text{pro } n \neq 0, \\
q \cdot_2 \mathfrak{S}_2(z) &= q \cdot (z + 1_{\mathbb{Z}}) = q \cdot z + q = q \cdot_2 z +_2 q.
\end{aligned}$$

(Uvědomme si, že poslední rovnost v prostředním řádku výše uvedeného seznamu je v pořádku i pro $n = 0$, neboť $(z \cdot 0_{\mathbb{Z}}) + z = 0_{\mathbb{Z}} +_2 z = 0 +_2 z = (z \cdot_2 0) +_2 z$.) K prokázání axiomů **RA5,7** je zapotřebí navíc nahlédnout, že jsme skutečně prozkoumali všechny potřebné případy, v nichž alespoň jedno individuum není přirozeným číslem — v případě, kdy jsou obě vyšetřovaná individua struktury $\mathbb{O}_2$ přirozenými čísly, postačí užít pravdivost obou axiomů v přirozeném modelu.

V sestrojeném modelu je pravdivá formule (pa14), tj. formule $(\forall x)(\mathfrak{S}(x) \neq x)$. Dále je pravdivá jak komutativita sčítání, tak i násobení.

V modelu $\mathbb{O}_2$ je každé přirozené číslo menší než každé číslo celé (v symbolech $\mathbb{O}_2 \models n \leq z$), neboť pro celé číslo $(z - n_{\mathbb{Z}})$ jest $(z - n_{\mathbb{Z}}) +_2 n = z$ a žádné celé číslo není menší než žádné přirozené číslo (pro žádná n, z není pravda $\mathbb{O}_2 \models z \leq n$), protože součet dvou čísel z nichž alespoň jedno je celé, je vždy číslo celé. Naproti tomu v modelu je každé celé číslo menší nebo rovno kterémukoli celému číslu (v symbolech $\mathbb{O}_2 \models z \leq q$), neboť $(z - q) + q = z$. Zcela zřejmě tedy v modelu $\mathbb{O}_2$ není pravdivá slabá antisymetrie, tj. tvrzení (pa7). Uvedená fakta o realizaci predikátu $\leq$ se snažíme zaznamenat na diagramu vpravo tím, že model $\mathbb{N}$ klademe před model $\mathbb{Z}$, druhý z modelů však neznázorňujeme úsečkou, abychom naznačili, že uspořádá-

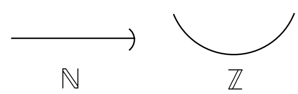

Diagram 3

ní individuí modelu $\mathbb{O}_2$, jež odpovídají celým číslům, se liší od běžného uspořádání celých čísel.

V modelu $\mathbb{O}_2$ *není pravdivých* dokonce mnohem víc tvrzení ze seznamu formulí dokazatelných v Peanově aritmetice než pouze formule (pa7):

(pa10), neboť $1_\mathbb{Z} +_2 0_\mathbb{Z} = 1_\mathbb{Z} + 0_\mathbb{Z} = 1 +_2 0_\mathbb{Z}$ a současně není $1_\mathbb{Z} = 1$, protože 1 chápeme jako číslo přirozené a $1_\mathbb{Z}$ jako číslo celé;

(pa12), protože $1_\mathbb{Z} +_2 0_\mathbb{Z} = 1_\mathbb{Z} \leq 1_\mathbb{Z} = 1_\mathbb{Z} + 0_\mathbb{Z} = 1 +_2 0_\mathbb{Z}$ a protože není $\mathbb{O}_2 \models 1_\mathbb{Z} \leq 1$;

(pa11), protože $0_\mathbb{Z} \cdot_2 0_\mathbb{Z} = 0_\mathbb{Z} \cdot 0_\mathbb{Z} = 0_\mathbb{Z} = 1_\mathbb{Z} \cdot 0_\mathbb{Z} = 1 \cdot_2 0_\mathbb{Z}$ a protože jest $\mathbb{O}_2 \models 0_\mathbb{Z} \neq 0 \; \& \; 0_\mathbb{Z} \neq 1$;

(pa13), neboť $0_\mathbb{Z} \cdot_2 0_\mathbb{Z} = 0_\mathbb{Z} \cdot 0_\mathbb{Z} = 0_\mathbb{Z} \leq 0_\mathbb{Z} = 1_\mathbb{Z} \cdot 0_\mathbb{Z} = 1 \cdot_2 0_\mathbb{Z}$ a protože je $\mathbb{O}_2 \models 0_\mathbb{Z} \neq 0$, avšak není $\mathbb{O}_2 \models 0_\mathbb{Z} \leq 1$.

Nepravdivost formulí (pa10)–(pa13) jsme prokázali jak ve struktuře $\mathbb{O}_1$, tak i ve struktuře $\mathbb{O}_2$. Pročež kterákoli z těchto struktur zaručuje nedokazatelnost formulí (pa10)–(pa13) v Robinsonově aritmetice. První struktura je však docela modelem $\boldsymbol{RA}$, $\neg$(pa14) a druhá je dokonce modelem $\boldsymbol{RA}$, (pa14). Takže formule (pa10)–(pa13) nejsou dokazatelné ani v teorii $\boldsymbol{RA}$, $\neg$(pa14) a ani v teorii $\boldsymbol{RA}$, (pa14).

Příklad 9. Univerzum našeho dalšího modelu $\mathbb{O}_3$ se bude opět skládat přesně ze všech intuitivních přirozených čísel a všech intuitivních celých čísel. Funkce následovníka zachováme z minulého příkladu, tzn. následovník přirozeného čísla bude prostě následovník v přirozených číslech a následovník celého čísla bude jeho následovník v celých číslech. V některých případech však změníme význam sčítání a násobení. Máme-li v sestrojované struktuře sečíst dvě přirozená čísla, sečteme je opět tak, jak se sečítají přirozená čísla; jestliže máme sečíst dvě celá čísla, sečteme je zase jako celá čísla. Přičítáme-li k celému číslu číslo přirozené, opět si představíme přirozené číslo jako číslo celé a sečteme tato dvě celá čísla. Avšak v případě, že máme sečíst přirozené číslo s číslem celým, postupujeme odlišně od předchozího příkladu. Opět si představíme přirozené číslo jako číslo celé a sečteme tato dvě čísla, nyní však navíc *přičteme celé číslo* $1_\mathbb{Z}$. I v případě násobení provedeme jednu změnu. Násobení dvou celých čísel (a rovněž násobení dvou přirozených čísel) ponecháme beze změny, dokonce nebudeme ani měnit význam součinu, ve kterém je prvním činitelem přirozené číslo nebo druhým činitelem přirozené číslo 0. Máme-li však znásobit celé číslo *nenulovým* přirozeným číslem představíme si přirozené číslo jako číslo celé, obě celá čísla vynásobíme *a přičteme celé číslo* $1_\mathbb{Z}$. Takto definované sčítání a násobení shrnují následující rovnosti a jinou formou rovněž následující tabulky:

$$\begin{aligned}
&n +_3 m = n + m, && n \cdot_3 m = n \cdot m, \\
&z +_3 q = z + q, && z \cdot_3 q = z \cdot q, \\
&n +_3 z = n_{\mathbb{Z}} + z + 1_{\mathbb{Z}}, && 0 \cdot_3 z = z \cdot_3 0 = 0, \\
&z +_3 n = z + n_{\mathbb{Z}}, && n \cdot_3 z = n_{\mathbb{Z}} \cdot z \qquad \text{pro } n \neq 0, \\
& && z \cdot_3 n = z \cdot n_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}} \qquad \text{pro } n \neq 0\,;
\end{aligned}$$

$+_3$	m	q
n	$n + m$	$n_{\mathbb{Z}} + q + 1_{\mathbb{Z}}$
z	$z + m_{\mathbb{Z}}$	$z + q$

$\cdot_3$	0	$m \neq 0$	q
0	0	0	0
$n \neq 0$	0	$n \cdot m$	$n_{\mathbb{Z}} \cdot q$
z	0	$z \cdot m_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}}$	$z \cdot q.$

Prověřme, že struktura $\mathbb{O}_3$ je modelem Robinsonovy aritmetiky (případy, které jsou stejné jako v předchozím příkladu již neopakujeme):

RA5 $n +_3 \mathfrak{S}_3(z) = n_{\mathbb{Z}} + (z + 1_{\mathbb{Z}}) + 1_{\mathbb{Z}} = (n_{\mathbb{Z}} + z) + 1_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}} = (n +_3 z) + 1_{\mathbb{Z}} = \mathfrak{S}_3(n +_3 z)$

RA7 $z \cdot_3 \mathfrak{S}_3(0) = z \cdot_3 1 = z \cdot 1_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}} = z + 1_{\mathbb{Z}} = 0_{\mathbb{Z}} + z + 1_{\mathbb{Z}} = 0 +_3 z = z \cdot_3 0 +_3 z$

$z \cdot_3 \mathfrak{S}_3(n) = z \cdot_3 (n + 1) = z \cdot (n + 1)_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}} = z \cdot (n_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}}) + 1_{\mathbb{Z}} = (z \cdot n_{\mathbb{Z}}) + 1_{\mathbb{Z}} + z = (z \cdot_3 n) +_3 z \qquad \text{pro } n \neq 0.$

Již podle zadání je jasné, že v modelu $\mathbb{O}_3$ není ani sčítání ani násobení komutativní (tj. jsou pravdivé formule $\neg$(pa2) a $\neg$(pa4)). V modelu $\mathbb{O}_3$ však není pravdivá ani asociativita pro sčítání, ani asociativita pro násobení a dokonce ani distributivita, tzn. *nejsou pravdivé* formule:

(pa1), neboť $(0 +_3 0) +_3 z = 0 +_3 z = 0_{\mathbb{Z}} + z + 1_{\mathbb{Z}} \neq 0_{\mathbb{Z}} + z + 1_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}} = 0_{\mathbb{Z}} + 0_{\mathbb{Z}} + z + 1_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}} = 0 +_3 (0 +_3 z)$;

(pa3), protože $z \cdot_3 (1 \cdot_3 1) = z \cdot_3 1 = z \cdot 1_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}} \neq z \cdot 1_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}} = (z \cdot 1_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}}) \cdot 1_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}} = (z \cdot_3 1) \cdot_3 1$;

(pa5), protože $z \cdot_3 (1 +_3 1) = z \cdot_3 2 = z \cdot 2_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}} \neq z \cdot 2_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}} = z \cdot 1_{\mathbb{Z}} + z \cdot 1_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}} = (z \cdot 1_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}}) + (z \cdot 1_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}}) = (z \cdot 1_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}}) +_3 (z \cdot 1_{\mathbb{Z}} + 1_{\mathbb{Z}}) = z \cdot_3 1_{\mathbb{Z}} +_3 z \cdot_3 1_{\mathbb{Z}}$.

a nadto není ani $\mathbb{O}_3 \models z \cdot \mathfrak{S}(0) = z$, neboť $z \cdot_3 1 = z + 1_{\mathbb{Z}}$.

Otázek týkajících se vztahu teorie a nějakých daných formulí jejího jazyka je však možno formulovat mnohem více než pouhé otázky po bezespornosti teorie s každou jednotlivou danou formulí. Můžeme se např. ptát zda ve zkoumané teorii jedna daná formule implikuje druhou z uvažované skupiny. Nejeví se vám smysluplnou příklad otázka zda v Robinsonově aritmetice komutativita sčítání implikuje komutativitu násobení? Přímo na tuto otázku si v následující úloze a ve cvičení III-1.22 odpovíte záporně, sám si však můžete postavit takovýchto otázek celou řadu.

Otázky tohoto typu žádají rozhodnout, zda jistá implikace je dokazatelná v dané teorii. K prokázání záporné odpovědi se obvykle sestrojí model zkoumané teorie, ve kterém je antecedent implikace pravdivý a konsekvent nikoli. K prokázání kladné odpovědi je zapotřebí předvést důkaz implikace v uvažované teorii. Například si uvědomte, že v úloze 7 jsme jako vedlejší důsledek dokázali, že komutativita sčítání (pa2) implikuje v Robinsonově aritmetice reflexivitu relace $\leq$, tj. formuli (pa6).

Úloha 8. Uvažujte strukturu zadanou v příkladu 8, vypusťte však výjimku pro násobení zleva individuem 0 (tj. položme $0 \cdot_4 q = 0_{\mathbb{Z}} \neq 0$), neboli prozkoumávejte vlastnosti struktury zadané tabulkami:

$+_4$	m	q
n	$n+m$	$n_{\mathbb{Z}}+q$
z	$z+m_{\mathbb{Z}}$	$z+q$

$\cdot_4$	0	$m \neq 0$	q
n	0	$n \cdot m$	$n_{\mathbb{Z}} \cdot q$
z	0	$z \cdot m_{\mathbb{Z}}$	$z \cdot q.$

Prokažte, že struktura je modelem Robinsonovy aritmetiky, ve kterém je sčítání komutativní, avšak násobení komutativní není (a nadto je pravdivá formule $(\forall x)(\mathfrak{S}(x) \neq x)$). Tím nahlédněte, že v Robinsonově aritmetice (a dokonce ani v teorii $\boldsymbol{RA}$, $(\forall x)(\mathfrak{S}(x) \neq x)$) komutativita sčítání *neimplikuje* komutativitu násobení.

Úloha 9. Nyní bude vaším úkolem prozkoumat strukturu $\mathbb{O}_5$ vzniklou kombinací sčítání z příkladu 9 a násobení z příkladu 8, tzn. strukturu zadanou tabulkami:

$+_5$	m	q
n	$n+m$	$n_{\mathbb{Z}}+q+1_{\mathbb{Z}}$
z	$z+m_{\mathbb{Z}}$	$z+q$

$\cdot_5$	0	$m \neq 0$	q
0	0	0	0
$n \neq 0$	0	$n \cdot m$	$n_{\mathbb{Z}} \cdot q$
z	0	$z \cdot m_{\mathbb{Z}}$	$z \cdot q.$

Ukažte, že tato struktura *není* modelem Robinsonovy aritmetiky.

Zatím jsme předváděli jen formule nedokazatelné v Robinsonově aritmetice (a dokazatelné v aritmetice Peanově). Mohl by tedy vzniknout zcela falešný dojem, že každá formule aritmetiky je v Peanově aritmetice buďto dokazatelná nebo vyvratitelná. V následujícím paragrafu se budeme tomuto problému podrobně věnovat a sestrojíme formule, jež nejsou v Peanově aritmetice ani dokazatelné, ani vyvratitelné. Tyto formule jsou vysoce zajímavé z hlediska *logiky,* naproti tomu z hlediska *Peanovy aritmetiky samotné* jsou tyto formule zcela umělé. Přirozeně se proto matematici začali v sedmdesátých letech minulého století zajímat o to, zda

---

u8) Musíme se zabývat pouze případem násobení přirozeného čísla 0 celým číslem, tzn. musíme prozkoumat jenom potřebnou rovnost pro $0 \cdot \mathfrak{S}(z)$, ve všech ostatních případech pouze upravíme výpočty z příkladu 8 nahrazením indexu 2 indexem 4. Relevantní výpočet je však velice jednoduchý:

$$0 \cdot_4 \mathfrak{S}_4(z) = 0_{\mathbb{Z}} \cdot \mathfrak{S}_4(z) = 0_{\mathbb{Z}} = 0_{\mathbb{Z}} + 0_{\mathbb{Z}} = 0_{\mathbb{Z}} \cdot z + 0_{\mathbb{Z}} = 0 \cdot_4 z +_4 0.$$

Násobení není komutativní, neboť $z \cdot_4 0 = 0 \neq 0_{\mathbb{Z}} = 0_{\mathbb{Z}} \cdot z = 0 \cdot_4 z$.

u9) $z \cdot_5 \mathfrak{S}_5(0) = z \cdot 1_{\mathbb{Z}} = z = 0_{\mathbb{Z}} + z \neq 0_{\mathbb{Z}} + z + 1_{\mathbb{Z}} = 0 +_5 z = z \cdot_5 0 +_5 z$

existují formule zajímavé z hlediska aritmetiky, které nejsou v ***PA*** ani dokazatelné, ani vyvratitelné. Požadavek pravdivosti indukce činí konstrukci potřebných modelů aritmetiky podstatně obtížnější než byly výše předvedené konstrukce modelů Robinsonovy aritmetiky. Navíc i formule samotné jsou složitější než formule v našem paragrafu, avšak jejich aritmetický význam je přehledný (viz [Pa] a zejména [K-P], s druhým výsledkem je možno se podrobněji seznámit v dodatku k šesté kapitole [So]).

CVIČENÍ

III-1.1 Zjistěte, zda lze dokazatelnost formule (ra2) v Robinsonově aritmetice zesílit na dokazatelnost formule $(\forall x, y)[x \cdot y = \mathit{0} \rightarrow (x = \mathit{0} \,\&\, y = \mathit{0})]$.

III-1.2 Je v Peanově nebo dokonce v Robinsonově aritmetice dokazatelné obrácení implikace ve formuli (ra1), tzn. formule

$$(\forall x, y)[(x = \mathit{0} \,\&\, y = \mathit{0}) \rightarrow x + y = \mathit{0}]?$$

III-1.3 Je v ***PA*** nebo dokonce v ***RA*** dokazatelné obrácení implikace ve formuli (ra2), tzn. formule $(\forall x, y)[(x = \mathit{0} \vee y = \mathit{0}) \rightarrow x \cdot y = \mathit{0}]$?

III-1.4 V Robinsonově aritmetice dokažte $(\forall y)(y \leq \mathit{0} \rightarrow y = \mathit{0})$. Návod: užijte (ra1).

III-1.5 V teorii ***RA*** dokažte formuli $(\forall x, y)(\mathfrak{S}(x) \leq \mathfrak{S}(y) \rightarrow x \leq y)$. Návod: užijte **RA5,** a **RA2.**

III-1.6 V ***RA*** dokažte formuli $(\forall x, y)(x \leq y \rightarrow \mathfrak{S}(x) \leq \mathfrak{S}(y))$, a užívajíce výsledek předchozího cvičení dokažte tak formuli (ra4) v Robinsonově aritmetice. Návod: užijte **RA5.**

III-1.7 Dokažte, že rovností $z = \mathfrak{S}(\mathit{0})$ můžeme v Robinsonově aritmetice definovat konstantu *1*. Návod: podle §2 kap. II potřebujeme v teorii ***RA*** dokázat formuli $(\exists! z)(z = \mathfrak{S}(\mathit{0}))$.

III-1.8 V teorii ***RA*** obohacené o konstantu *1* podle předchozího cvičení dokažte formuli $(\forall x)(x + \mathit{1} = \mathfrak{S}(x))$. Návod: užijte **RA4** a **RA5.**

III-1.9 V Peanově aritmetice obohacené o konstantu *1* podle cvičení III-1.7 dokažte rovnost $x \cdot \mathit{1} = x$ a implikaci $x \leq \mathit{1} \rightarrow (x = \mathit{0} \vee x = \mathit{1})$. Jsou zkoumané formule dokazatelné v ***RA***?

III-1.10 V Peanově aritmetice obohacené o konstantu *1* podle cvičení III-1.7 dokažte implikaci $x \cdot y = \mathit{1} \rightarrow (x = \mathit{1} \,\&\, y = \mathit{1})$.

III-1.11 V ***PA*** dokažte (pa14), tj. formuli $(\forall x)(\mathfrak{S}(x) \neq x)$. Návod: dokažte $\mathfrak{S}(\mathit{0}) + x = \mathit{0} + \mathfrak{S}(x)$; předpokládejte $x = \mathfrak{S}(x)$ a vyvoďte spor užívajíce jeden axiom a tvrzení (pa10), které již bylo dokázáno v úloze 6.

III-1.12 V Peanově aritmetice dokažte distributivitu, tzn. formuli

(pa5) $$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + x \cdot z.$$

Návod: důkaz indukcí; pro důkaz indukčního kroku užijte asociativitu sčítání, tj. již dokázanou formuli (pa1) a axiomy **RA5** a **RA7.**

III-1.13 V teorii ***PA*** dokažte asociativitu násobení, tj. formuli

(pa3) $$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

Návod: užijte několikanásobně jak axiom **RA6,** tak i axiom **RA7** a navíc také distributivitu dokázanou v předchozím cvičení.

III-1.14 V teorii ***PA*** dokažte tranzitivitu predikátu $\leq$, tzn. formuli

(pa8) $$(\forall x, y, z)[(x \leq y \;\&\; y \leq z) \rightarrow x \leq z].$$

Návod: užijte (pa1).

III-1.15 V Peanově aritmetice dokažte formuli

$$(\forall x, y, z)(x = y \rightarrow x + z = y + z)$$

zaručující z formule (pa10) opačnou implikaci k té, již zabezpečuje úloha 6.

III-1.16 V **PA** dokažte (pa12), tzn. formuli $(\forall x, y, z)(x \leq y \equiv x + z \leq y + z)$. Návod: užijte asociativitu sčítání, formuli (pa10) a axiom **RA8.**

III-1.17 V teorii ***PA*** dokažte formuli $(\forall x, y, z)[z \neq \mathit{0} \rightarrow (x \leq y \rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z)]$, která spoluvytváří formuli (pa13). Návod: užijte distributivitu zprava, pochopitelně potřebujete také axiom **RA8.**

III-1.18 V **PA** dokažte formuli $(\forall x, y, z)[(z \neq \mathit{0} \;\&\; x \cdot z \leq y \cdot z) \rightarrow x \leq y]$, která spolu s výsledkem předchozího cvičení implikuje formuli (pa13). Návod je poměrně podrobný, neboť cvičení patří mezi nejobtížnější v tomto paragrafu: pro důkaz sporem předpokládejte $z \neq \mathit{0} \;\&\; x \cdot z \leq y \cdot z \;\&\; \neg x \leq y$, uvažte důsledek posledního konjunktu a formule (pa9), dokázané v příkladu 6, dvojnásobně aplikujte **RA8** a užijte distributivitu pro násobení číslem z zprava. Získáte existenci u, v takových, že $v + (u \cdot z) + (y \cdot z) = y \cdot z \;\&\; u + y = x$. Dokažte rovnost $\mathit{0} + (y \cdot z) = y \cdot z$. Srdcem důkazu je však následné užití formulí (pa10), (ra1) a (ra2). Z rovnosti $x = y$ a formule (pa6) získáme kýžený spor.

III-1.19 V teorii ***PA*** dokažte (pa11), tzn. formuli

$$(\forall x, y, z)[z \neq \mathit{0} \rightarrow (x = y \equiv x \cdot z = y \cdot z)],$$

Návod: formule je triviálním důsledkem některých z již dokázaných bodů (pa1)–(pa10), (pa12) a (pa13) — určete kterých.

III-1.20 Ve formuli (pa11) se nachází formule $z \neq \mathit{0}$ jako antecedent implikace. Je možno v Peanově aritmetice dokázat formuli

$$(\forall x, y, z)(x = y \rightarrow x \cdot z = y \cdot z),$$

tj. lze tento antecedent pro jednu implikaci z ekvivalence vynechat? Lze tento antecedent vynechat pro obrácenou implikaci, tzn. dokázat v ***PA*** formuli $(\forall x, y, z)(x \cdot z = y \cdot z \rightarrow x = y)$?

Je možno předpoklad $z \neq \mathit{0}$ vypustit v implikacích ze cvičení III-1.17 a III-1.18?

III-1.21 V příkladu 7 jsme předvedli jednu konkrétní konstrukci modelu Robinsonovy aritmetiky vznikajícího přidáním jednoho nového individua k zadanému modelu Robinsonovy aritmetiky. Uvažujme obecně model $\mathbb{O}_6$ Robinsonovy aritmetiky vzniklý přidáním jediného individuum $\mathfrak{a}$ *k přirozenému modelu* $\mathbb{N}$. Řada vztahů realizací aritmetických funkcí v takovémto modelu je vynucena požadavkem, že $\mathbb{O}_6$ je modelem ***RA*** (např. rovnost $\mathfrak{a}\cdot_6 0 = 0$ je plyne z požadavku pravdivosti axiomu **RA6** ve struktuře $\mathbb{O}_6$). Prokažte, že realizace následovníka a sčítání jsou již jednoznačně určeny uvedenými vlastnostmi struktury $\mathbb{O}_6$. Pro násobení máte určit všechny hodnoty maximálně s jednou výjimkou. Návod: Pro prokázání jednoznačnosti hodnoty $\mathfrak{S}_6(\mathfrak{a})$ použijte požadavek pravdivosti axiomů **RA1, RA2** v sestrojované struktuře; hodnotu $\mathfrak{a}+_6 n$ určete indukcí; pro libovolné individuum $\mathfrak{b}$ sestrojovaného modelu prokažte $\mathfrak{b} +_6 \mathfrak{a} = \mathfrak{S}_6(\mathfrak{b} +_6 \mathfrak{a})$ a následně ukažte $\mathfrak{b} +_6 \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$; pro libovolné nenulové individuum $\mathfrak{b}$ sestrojovaného modelu prokažte $\mathfrak{b} \cdot_6 \mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cdot_6 \mathfrak{a} +_6 \mathfrak{b}$ a na základě této rovnosti určete hodnotu $\mathfrak{b} \cdot_6 \mathfrak{a}$.

III-1.22 Ověřte, že rovněž vztahy (oproti tabulkám z příkladu 7 je změněna pouze hodnota $0 \cdot \mathfrak{a}$, důvod malé obměny objasňuje předcházející cvičení)

$+_7$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{y}$
$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{a}$
$\mathfrak{x}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{x} +_{\mathbb{M}} \mathfrak{y}$

$\cdot_7$	$\mathfrak{a}$	0	$\mathfrak{y} \neq 0$
$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{a}$	0	$\mathfrak{a}$
0	$\mathfrak{a}$	0	$0 \cdot_{\mathbb{M}} \mathfrak{y}$
$\mathfrak{x} \neq 0$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{x} \cdot_{\mathbb{M}} 0$	$\mathfrak{x} \cdot_{\mathbb{M}} \mathfrak{y}$

spolu s požadavkem $\mathfrak{S}_7(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$ popisují rozšíření modelu $\mathbb{M}$ Robinsonovy aritmetiky do modelu $\mathbb{O}_7$ téže teorie, ve kterém je právě jedno individuum navíc. Prověřte pravdivost komutativity sčítání a nepravdivost komutativity násobení.

III-1.23 Dvojnásobným použitím konstrukce z příkladu 7 přidáme k zadanému modelu $\mathbb{M}$ Robinsonovy aritmetiky nejprve nové individuum $\mathfrak{a}_0$ a za něj další individuum $\mathfrak{a}_1$.

Popište explicitně definice realizace aritmetických funkcí v uvažované struktuře. Najděte (naprosto jednoduché) zdůvodnění, že se jedná o model Robinsonovy aritmetiky.

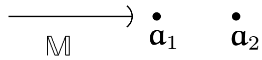

Diagram 4

Popisuje diagram vpravo realizaci relace $\leq$ v sestrojeného modelu? Je v takto získané struktuře $\mathbb{O}_8$ pravdivá komutativita sčítání a/nebo komutativita násobení za předpokladu, že výchozím modelem $\mathbb{M}$ je přirozený model?

III-1.24 Strukturu $\mathbb{O}_9$ popíšeme vztahy $\mathfrak{S}_9(\mathfrak{a}_0) = \mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{S}_9(\mathfrak{a}_1) = \mathfrak{a}_0$ a tabulkami, které jste získal v předchozím cvičení (tzn. zachováváme sčítání i násobení z předchozího cvičení a měníme pouze realizaci funkce následovníka). Je tato struktura modelem Robinsonovy aritmetiky?

V následujících čtyřech strukturách $\mathbb{O}_{10}$–$\mathbb{O}_{13}$ budeme opět přidávat dva nové prvky $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1$ za přirozený model $\mathbb{N}$. Ukázat, tyto struktury jsou modely Robinsonovy aritmetiky probíráním každého jednotlivého případu je značně zdlouhavé, doporučuji vám proto nalézt algoritmy, které umožní vyšetřit řadu případů najednou (např. součet $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{S}(\mathfrak{a}_j)$ lze vyšetřovat v první struktuře pro všechny možné dvojice i, j nul a jedniček jedním výpočtem). Ve strukturách $\mathbb{O}_{12}$ a $\mathbb{O}_{13}$ je navíc pravdivá formule $(\forall x)(\mathfrak{S}(x) \neq x)$), tento fakt si však vynutí rozdílnost součtu individuí $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1$ s přirozeným číslem sudým a s číslem lichým (neboť požadujeme např. $\mathfrak{a}_i +_{12} \mathfrak{S}_{12}(n) = \mathfrak{S}_{12}(\mathfrak{a}_i + n)$).

III-1.25 Prokažte, že struktura $\mathbb{O}_{10}$, jež vznikne přidáním dvou nových prvků $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1$ k přirozenému modelu $\mathbb{N}$ a ve které se realizace následovníka definuje vztahy $\mathfrak{S}_{10}(\mathfrak{a}_0) = \mathfrak{a}_0$ a $\mathfrak{S}_{10}(\mathfrak{a}_1) = \mathfrak{a}_1$ a realizaci sčítání a násobení popisují tabulky

$+_{10}$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_1$	m
$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$
$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$
n	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$n+m$

$\cdot_{10}$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_1$	0	$m \neq 0$
$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	0	$\mathfrak{a}_1$
$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	0	$\mathfrak{a}_1$
n	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	0	$n \cdot m,$

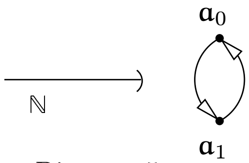

Diagram 5

je modelem Robinsonovy aritmetiky. Diagram vpravo od zadávacích tabulek má vyjadřovat, že v modelu $\mathbb{O}_{10}$ je každé intuitivní přirozené číslo jak před individuem $\mathfrak{a}_0$, tak také před individuem $\mathfrak{a}_1$ a současně že individua $\mathfrak{a}_0$ a $\mathfrak{a}_1$ jsou jedno před druhým — avšak není $\mathfrak{a}_0 \leq_{10} \mathfrak{a}_0$; prověřte tato tvrzení. Na jejich základě nahlédněte, že ve struktuře není pravdivá ani reflexivita (pa6), ani slabá antisymetrie (pa7) a dokonce ani tranzitivita relace $\leq$ (pa8), tj. že jedna každá z formulí $(\exists x)(\neg x \leq x)$, $(\exists x, y)(x \leq y \;\&\; y \leq x \;\&\; x \neq y)$ a $(\exists x, y, z)(x \leq y \;\&\; y \leq z \;\&\; \neg x \leq z)$ je pravdivá v modelu $\mathbb{O}_{10}$.

Ověřte nepravdivost komutativity jak sčítání, tak i násobení. Nadto prokažte, že v modelu je pravdivá formule $(\exists x)(\mathfrak{S}(x) = x)$, tj. $\neg$(pa14).

III-1.26 Strukturu $\mathbb{O}_{11}$ získáme úpravou struktury z předchozí úlohy změnou definice násobení nulou zleva:

$+_{11}$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_1$	m
$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$
$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$
n	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$n+m$

$\cdot_{11}$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_1$	0	$m \neq 0$
$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	0	$\mathfrak{a}_1$
$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	0	$\mathfrak{a}_1$
0	0	0	0	0
$n \neq 0$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	0	$n \cdot m.$

Ukažte, že struktura $\mathbb{O}_{11}$ je modelem Robinsonovy aritmetiky, ve kterém je pravdivá komutativita násobení, není však pravdivá komutativita sčítání. Nahlédněte pravdivost formule $(\exists x)(\mathfrak{S}(x) = x)$, tj. $\neg$(pa14).

III-1.27 Ověřte, že struktura $\mathbb{O}_{12}$ vzniklá přidáním dvou nových objektů $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1$ k přirozenému modelu $\mathbb{N}$ a zadaná vztahy $\mathfrak{S}_{12}(\mathfrak{a}_0) = \mathfrak{a}_1$ a $\mathfrak{S}_{12}(\mathfrak{a}_1) = \mathfrak{a}_0$ a vztahy

$+_{12}$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_1$	$2m$	$2m+1$
$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_1$
$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_0$
n	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_1$	$n+2m$	$n+2m+1$

$\cdot_{12}$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_1$	0	$m \neq 0$
$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$	0	$\mathfrak{a}_0$
$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	0	$\mathfrak{a}_1$
$2n$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$	0	$2n \cdot m$
$2n+1$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_1$	0	$(2n+1) \cdot m,$

je modelem Robinsonovy aritmetiky, ve kterém není pravdivá trichotomie relace $\leq$, tj. formule (pa9). Jsou v modelu pravdivé formule (pa6)—(pa8) (tzn. je relace $\leq$ uspořádáním ve smyslu §3 této kapitoly)? Diagramem vpravo se snažíme popsat, že každé intuitivní přirozené číslo je jak před individuem $\mathfrak{a}_0$, tak také před individuem $\mathfrak{a}_1$ a současně že individua $\mathfrak{a}_0$ a $\mathfrak{a}_1$ jsou nesrovnatelná; prokažte tato tvrzení.

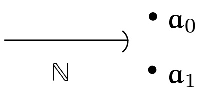

Diagram 6

Vztah komutativity sčítání a komutativity násobení v Robinsonově aritmetice byl dosud vyšetřován v několika modelech. Shrňme dosud dosažené výsledky: možnost současné pravdivosti komutativity sčítání i násobení ukazují jednak přirozený model a jednak vhodné rozšíření přirozeného modelu o jedno individuum (viz konstrukce $\mathbb{O}_1$ v příkladu 7, v níž za výchozí model $\mathbb{M}$ vezmeme přirozený model); možnost nepravdivosti komutativity jak sčítání, tak i násobení předvádějí modely $\mathbb{O}_3$ a $\mathbb{O}_{10}$ z příkladu 9 a ze cvičení III-1.25; modely $\boldsymbol{RA}$, ve kterých je sčítání komutativní a násobení nikoli reprezentují struktury $\mathbb{O}_4$ a $\mathbb{O}_7$ z úlohy 8 a ze cvičení III-1.22; ve struktuře $\mathbb{O}_{11}$ zadané ve cvičení III-1.26 je pravdivá komutativita násobení a není pravdivá komutativita sčítání. V případech, kdy jsou uvedeny dva odkazy, je v prvním modelu pravdivá formule $(\forall x)(\mathfrak{S}(x) \neq x)$, tj. formule (pa14) a ve druhém modelu je pravdivá negace formule (pa14). Speciálně model $\mathbb{O}_4$ prokazuje, že v teorii $\boldsymbol{RA}$, (pa14) není dokazatelné, že komutativita sčítání implikuje komutativitu násobení a struktura $\mathbb{O}_7$ ukazuje že uvedená implikace není dokazatelná ani v teorii $\boldsymbol{RA}$, $\neg$(pa14). Ve struktuře $\mathbb{O}_{11}$ je pravdivá negace formule (pa14). Aby byl obraz úplný, potřebujeme ještě sestrojit model teorie $\boldsymbol{RA}$, (pa14), ve kterém je pravdivá komutativita násobení a nikoli sčítání. Pak budeme vědět, že komutativita násobení neimplikuje komutativitu sčítání ani v teorii $\boldsymbol{RA}$, (pa14).

III-1.28 Prokažte, že struktura $\mathbb{O}_{13}$ vzniklá přidáním dvou nových objektů $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1$ k přirozenému modelu $\mathbb{N}$ a zadaná vztahy $\mathfrak{S}_{13}(\mathfrak{a}_0) = \mathfrak{a}_1$ a $\mathfrak{S}_{13}(\mathfrak{a}_1) = \mathfrak{a}_0$ a vztahy

$+_{13}$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_1$	$2m$	$2m + 1$
$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_1$
$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_0$
n	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_1$	$n+2m$	$n+2m+1$

$\cdot_{13}$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_1$	0	$2m \neq 0$	$2m+1$
$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$	0	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$
$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_1$	0	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_1$
0	0	0	0	0	0
$2n \neq 0$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$	0	$2n \cdot 2m$	$2n \cdot (2m+1)$
$2n+1$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_1$	0	$(2n+1) \cdot 2m$	$(2n+1) \cdot (2m+1)$,

je modelem Robinsonovy aritmetiky, ve kterém jsou pravdivé formule (pa14) a komutativita násobení a není pravdivá komutativita sčítání. Ověřte reflexivitu a tranzitivitu predikátu $\leq$ a ukažte, že ve zkoumané struktuře tento predikát není slabě antisymetrický.

III-1.29 Ukažte, že v $\boldsymbol{RA}$ není dokazatelná implikace $x \leq y \rightarrow x \leq \mathfrak{S}(x)$. Návod: mezi sestrojenými modely Robinsonovy aritmetiky najděte strukturu, v níž není implikace splněna.

§2

VĚTY O NEÚPLNOSTI

V první kapitole jsme se zabývali otázkou, zda může stroj nahradit matematika při dokazování ve výrokovém počtu — podrobněji řečeno: jestli *člověk* může napsat program, *na jehož základě* následně bude *stroj* schopen zastoupit matematika při rozhodování o dokazatelnosti formulí výrokového počtu. Na základě věty o úplnosti výrokového počtu jsme tuto otázku zodpověděli kladně, naznačili jsme algoritmus, který o každé konkrétní formuli výrokového počtu umožní rozhodnout, zda je, či není dokazatelná ve výrokovém počtu[1)]. Pro případ predikátového počtu jsme ve druhé kapitole pouze ukázali důvod, proč kladná odpověď na položenou otázku není důsledkem úplnosti predikátového počtu. Vraťme se tudíž k tomuto problému a zabývejme se jím podrobněji.

Zkoumejme nejprve, zda stroj umí rozhodnout, je-li předložená konečná posloupnost formulí predikátového počtu důkazem v určité teorii. Podle definice důkazu z §2 předchozí kapitoly k prokázání, že se jedná o důkaz v teorii $\boldsymbol{T}$, stačí krok za krokem ověřit, že každá formule v důkazu je axiomem predikátového počtu nebo uvažované teorie $\boldsymbol{T}$ nebo vznikla podle některého z odvozovacích pravidel aplikovaného na formule, které se vyskytují v posloupnosti dříve. Takže k řešení úlohy, jestli se jedná důkaz v teorii $\boldsymbol{T}$, postačí konečněkrát rozhodovat tři typy „jednodušších“ úloh — potřebujeme umět rozhodnout, je-li zadaná formule axiomem predikátového počtu, je-li ji možno vyvodit z nějakého konečného počtu formulí podle některého z odvozovacích pravidel a je-li axiomem teorie $\boldsymbol{T}$.

V tomto okamžiku snad zcela jasně vynikne, proč jsme při formulaci vyvozovacích principů tolik dbali o přehlednost a intuitivnost minimální verze. Ke zjištění, jestli zadaná formule je axiomem predikátového počtu, totiž stačí vyšetřovat osm případů, protože v minimální verzi jsme přijali osm typů axiomů predikátového počtu. Například jistě uvěříte, že stroj je schopen provést následující výpočty, aby zjistil zda zadaná formule je typu axiomu **PP1,** tzn. jestli je tvaru $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ pro nějaké formule φ, ψ. Nejprve stroj rozhodne, je-li daná formule implikací, pokud není, již automaticky vyhodnotí, že zkoumaná formule není axiomem typu **PP1.** Pak stroj vyšetřuje konsekvent implikace; pokud konsekvent není implikací, opět stroj vyhodnotí, že zkoumaná formule není axiomem typu **PP1.** Pokud konsekvent dané formule je implikací, začne stroj krok za krokem srovnávat znaky v antecedentu zadané formule a v konsekventu jejího konsekventu ve snaze rozhodnout, jsou-li tyto dvě formule totožné. Jestliže

[1)] Rozpracováním idejí §1 kap. I jsme dokonce schopni sestrojit algoritmus, jenž ke každé formuli dokazatelné ve výrokovém počtu sestrojí její důkaz. Je tedy vyloučena možnost, že bychom sice věděli, že formule je ve výrokovém počtu dokazatelná, přesto však nebyli schopni nalézt její důkaz.

se formule v některém znaku liší, stroj opětovně vyhodnotí, že daná formule není typu axiomu **PP1.** Antecedent zadané formule je zase formulí, tady konečnou posloupností; v důsledku toho musí stroj po konečné době ukončit své srovnávání a pokud nenalezne žádný rozdíl mezi antecedentem dané formule a konsekventem jejího konsekventu, vyhodnotí, že zadaná formule je typu axiomu **PP1.** Velice podobně lze uvažovat i ve zbývajících sedmi případech. Přesvědčte se o tom na vámi zvoleném typu axiomu predikátového počtu.

Podobně jednoduše může stroj postupovat při vyhodnocování, zda je možno zadanou formuli φ vyvodit např. pomocí modus ponens ze zadaného *konečného* souboru formulí. Pro každou jednotlivou formuli ze zadaného konečného souboru stroj totiž nejprve prozkoumá, je-li implikací, jejíž konsekvent je formulí φ. Pokud u některé formule ze zadaného souboru je odpověď „ano“, prozkoumá stroj ještě antecedent ϑ této formule a porovná ho postupně s formulemi ze zadaného konečného souboru formulí. Nachází-li se antecedent ϑ v souboru, ubezpečí se stroj, že formuli φ lze vyvodit pomocí modus ponens ze zadaného konečného souboru formulí; pokud byla dříve odpověď „ne“ nebo pokud antecedent ϑ není totožný se žádnou formulí ze zadaného souboru, vyhodnotí stroj, že formuli φ není možno vyvodit pomocí modus ponens ze zadaného konečného souboru formulí. Přesvědčte se již sami analogickou úvahou, že stroj je schopen rozhodovat, je-li možno vyvodit danou formuli pomocí generalizace ze zadaného *konečného* souboru formulí.

A teď se dostáváme ke klíčovému místu. Ukázali jsme, že stroj jednoduše vyhodnotí, zda ta která formule v zadané posloupnosti je axiomem logiky nebo zda je ji možno vyvodit pomocí některého odvozovacího pravidla z *konečného* systému formulí, které vyšetřovanou formuli předcházejí v zadané posloupnosti. Takže stroj je schopen vyhodnotit, zda zadaná posloupnost formulí je důkazem v nějaké teorii $\boldsymbol{T}$, přesně tehdy, když je schopen o libovolné formuli rozhodnout jestli je, či není axiomem teorie $\boldsymbol{T}$. Jinými slovy schopnost stroje vyhodnotit, je-li posloupnost důkazem v teorii $\boldsymbol{T}$, závisí na tom, zda existuje algoritmus, který umožní stroji rozhodnout o libovolné formuli, jestli je axiomem teorie $\boldsymbol{T}$. Teorie $\boldsymbol{T}$, pro kterou takový algoritmus existuje, se nazývá **rekurzivní**. Užívajíce tuto terminologii konstatujme, že stroj umí rozhodnout o každé posloupnosti formulí, zda je, či není důkazem v teorii $\boldsymbol{T}$, právě když teorie $\boldsymbol{T}$ je rekurzivní.

Všechny běžně užívané matematické teorie jsou rekurzivní. Při seznámení s pojmem teorie jsme v §2 předchozí kapitoly uvedli, že tvůrčí práci teoretického matematika můžeme popsat jako hledání dokazatelných tvrzení v matematických teoriích. Kdyby se matematik zabýval teorií, která není rekurzivní, nemohl by nikdo rozhodnout ve všech případech, jestli jeho důkaz je, či není v pořádku, a v důsledku toho by si nikdo jeho práce příliš necenil. Matematické teorie mívají konečně mnoho axiomů (příkladem je Robinsonova aritmetika), nebo maximálně mají konečně mnoho jednotlivých axiomů a konečně mnoho schémat (např. Peanova aritmetika má konečně mnoho axiomů a jediné schéma, totiž indukci); teorie s takto popsaným systémem axiomů jsou rekurzivní.

*

V předchozí části jsme poznali jednu z podstatných (a žádoucích) vlastností teorií. Shrňme a motivujme ještě dvě jiné (opět vítané) vlastnosti teorií.

Jedním z prvořadých požadavků na teorii je požadavek **bezespornosti** teorie formulovaný v předchozí kapitole, jenž je analogický bezespornosti ve výrokovém počtu a znamená, že v takovéto teorii nesmíme být schopni dokázat „cokoli" (tzn. i jakýkoli nesmysl). Jestliže o nějaké teorii ukážeme, že je sporná, může to být velice zajímavý a překvapující výsledek, ale určitě má za následek, že již v takovéto teorii nebudeme dále pracovat — nemá přece cenu dokazovat speciální větu, když již víme, že lze dokázat jakékoli tvrzení formulovatelné ve zkoumané teorii. Nechceme tedy být schopni dokázat v teorii „cokoli", ale naproti tomu v převážné většině případů matematik volí teorii, která je dost „silná", aby v ní bylo možno dokázat netriviální věty.

Aby matematická teorie popisovala jistou oblast ideálním způsobem, museli bychom být schopni každé tvrzení, které v uvedené oblasti platí, dokázat z axiomů této teorie. Běžnou představou je dále, že jakékoli tvrzení buďto platí, nebo platí jeho negace (srovnej pojem výroku z první kapitoly a také zákon vyloučeného třetího). Pročež představa ideálního popisu vymezené oblasti nějakou teorií vede k požadavku, aby v příslušné teorii jakákoli uzavřená[2] formule byla buďto dokazatelná, nebo vyvratitelná, a tato představa je matematizována pojmem **úplné** teorie. Matematičtěji: *bezespornou* teorii $\boldsymbol{T}$ nazýváme úplnou, jestliže pro každou uzavřenou formuli φ jejího jazyka je buďto $\boldsymbol{T} \vdash \varphi$, nebo $\boldsymbol{T} \vdash \neg\varphi$. (Požadavek bezespornosti zabezpečuje, že nemůže být současně $\boldsymbol{T} \vdash \varphi$ a $\boldsymbol{T} \vdash \neg\varphi$.)

Ve svých přednáškách z let 1921–22 formuloval David Hilbert myšlenky, které bývají nazývány Hilbertovým programem[3]. Hilbertův program můžeme v dnešní terminologii chápat jako hledání rekurzivních a úplných[4] teorií (v té době se předpokládalo, že se podaří tyto vlastnosti prokázat téměř pro všechny matematické

2) Jen *uzavřené* formule jsou výroky.

3) Citovat lze zejména práci [Hi2], kde D. Hilbert mimo jiné formuluje axiomy a odvozovací pravidla. Dle mého názoru je však možno vysledovat základní myšlenky Hilbertova programu již v práci [Hi1].

4) D. Hilbert píše v práci [Hi1] (druhý problém): „Jestliže se zabýváme zkoumáním základů nějaké vědy, musíme sestavit systém axiomů, který obsahuje přesný a *úplný* popis vztahů mezi základními pojmy této vědy. Axiomy takto stanovené jsou současně definicemi těchto základních pojmů; žádné tvrzení uvnitř oblasti té vědy, jejíž základy zkoumáme, není považováno za správné, *pokud nemůže být odvozeno z oněch axiomů konečně mnoha logickými kroky*".
Při matematizaci pojmu úplné teorie připouštíme jakožto úplné teorie pouze teorie bezesporné. Z rozsáhlého Hilbertova programu je možno zdůrazňovat různé aspekty; například v [D-M] 4.2 jsou citovány stejné aspekty jako výše, v knize [Šv] 4.5.5 je zdůrazňována snaha o vnitřní prokázání konzistence (viz druhou větu o neúplnosti).

teorie anebo alespoň se zdaří matematické teorie zesílit do teorií s uvedenými vlastnostmi).

Jednou z nejdůležitějších matematických teorií je aritmetika[5]. V předchozím paragrafu jsme uvedli dvě její možné axiomatizace a nahlédli jsme snad dost důkladně, že je mnoho formulí, které nejsou dokazatelné ve slabší Robinsonově aritmetice a jsou dokazatelné v Peanově aritmetice. Podobně se situace opakuje i pro Peanovu aritmetiku, zase nějaká formule nemusí být v ní dokazatelná, ale v nějaké vhodné silnější *bezesporné* teorii již dokazatelná je. Takováto „vhodná silnější bezesporná teorie“ může být teorie přidávající nějaký intuitivní princip (tak jako dodatečným principem zesilujícím Robinsonovu aritmetiku byla indukce) nebo prostě přidávající přímo tu formuli, kterou jsme sice nebyli schopni dokázat, kterou však pokládáme intuitivně za správnou. Jsme tedy ochotni postupně Peanovu aritmetiku zesilovat přidáváním vhodných dodatečných axiomů. Problém spočívá v otázce, zda takovýmto přidáváním axiomů, či případně celých schémat najednou, můžeme dojít k úplné teorii po *konečném* počtu kroků. Takže vztáhneme-li Hilbertův program na aritmetiku, potřebujeme k uspokojivému řešení nalézt konečně mnoho axiomů nebo schémat tak, abychom jejich přidáním k Peanově aritmetice získali úplnou teorii.

K naplnění Hilbertova programu pro aritmetiku by tedy bylo zapotřebí „jen“ ukázat úplnost Peanovy aritmetiky nebo alespoň nalézt vhodné úplné rekurzivní rozšíření Peanovy aritmetiky. V tomto směru dochází koncem dvacátých let minulého století k obrovskému pokroku, zejména když M. Presburger ukazuje (1929), že aritmetika s operacemi sčítání a následovníka a s běžnými axiomy (podrobněji: s axiomy Peanovy aritmetiky, ve kterých se nevyskytuje násobení) je úplná teorie (viz [Pr]; předvedení Presburgerova výsledku lze nalézt také např. v §1 kap. VI [So]; uveďme výslovně, že k systému axiomů Peanovy aritmetiky, ve kterých se nevyskytuje násobení, již není potřeba přidávat dodatečné axiomy, teorie je úplná sama o sobě). Ve své době byl tento výsledek nedoceněn, protože všichni očekávali, že se musí co nejdříve podařit udělat poslední „krůček“ a dokázat analogické tvrzení pro aritmetiku i s operací násobení. Tím větší šok způsobuje matematikům za dva roky slavný Gödelův výsledek o neúplnosti (1931, v původním znění viz [G2]), prokazující, že tento „krůček“ již není možno učinit[6]. Hilbertův program se tedy ukázal jako nerealizovatelný — ale přesto přispěl obrovskou měrou k rozvoji matematické logiky.

5) Aritmetika bývá pokládána za „nejslabší“ teorii nekonečna.

6) Propastnost rozdílu mezi aritmetikou s následovníkem, součtem a součinem a aritmetikou s pouhým následovníkem a součtem spočívá v tom, že v prvé teorii jsme schopni kódovat konečné posloupnosti a ve druhé nikoli (jakkoli se tento fakt jeví na první pohled maličkostí).

K. Gödel a jeho následovníci ukázali, že *neexistuje vůbec žádné rekurzivní rozšíření Peanovy*[7] *aritmetiky, které by bylo úplné.* Tento výsledek je zvykem nazývat **první větou o neúplnosti** a jinými slovy tvrdí, že je-li teorie $\boldsymbol{T}$ bezesporné a rekurzivní rozšíření Peanovy aritmetiky, pak vždy existuje (v jazyce teorie $\boldsymbol{T}$ formulovatelná) uzavřená formule, která v $\boldsymbol{T}$ není ani dokazatelná ani vyvratitelná.

Před malou chvílí jsme poukázali na potřebnost rekurzivity a rovněž jsme odůvodňovali přirozenost požadavku úplnosti aritmetiky. V obou případech jsme však zkoumali tu kterou vlastnost *samu o sobě*. První věta o neúplnosti ukazuje, že pro rozšíření aritmetiky nemohou platit vlastnosti rekurzivity a úplnosti *najednou*[8]. Při podrobnějším rozboru skutečně musíme přiznat, že předpoklad, že přesně popsané pojetí aritmetiky má obě tyto vlastnosti, je neodůvodněný.

Bylo by obtížné něco namítat proti předpokladu úplnosti aritmetiky *intuitivních přirozených čísel*, neboli teorie axiomatizované systémem formulí, které jsou pravdivé v přirozeném modelu (neboť v každé struktuře je jakákoli uzavřená formule buď pravdivá, nebo nepravdivá). Avšak na základě nekontrolovaných a hlouběji nezdůvodněných intuitivních představ se s tím nespokojíme, ale navíc předpokládáme, že celý systém takovýchto „správných aritmetických vlastností“ jsme *my* schopni poznat naráz. Tato poznatelnost celého systému najednou by pochopitelně znamenala, že jsme schopni celý systém „správných aritmetických vlastností“ vydělit, tzn. popsat algoritmem, neboli že systém „správných aritmetických vlastností“ je rekurzivní.

Na druhé straně, při pohledu popisujícím práci matematika, musíme vyžadovat současně bezespornost a rekurzivitu *matematické* teorie popisující aritmetiku — opakuji, že bez předpokladu rekurzivity nejsme schopni ověřovat, zda předložená posloupnost formulí je důkazem v uvažované teorii. Avšak i při tomto přístupu nás nepodložené sebevědomí vede k přehnaně optimistickému předpokladu — tentokrát k předpokladu, že takováto teorie je schopna popsat *celou* aritmetiku intuitivních přirozených čísel.

První věta o neúplnosti zaručuje v každé bezesporné rekurzivní teorii, zesilující aritmetiku, existenci formule aritmetiky, která není ani dokazatelná, ani

[7] Větu je možno vyslovit podstatně silněji — pro rekurzivní rozšíření Robinsonovy aritmetiky. Později uvedeme druhou větu o neúplnosti, pro ni je již potřeba nějaká forma indukce, ale zdaleka ne tak silná, jako je požadována ve formulaci Peanovy aritmetiky. Tato možná zesílení zcela pomineme v našem textu (je možné je nalézt např. v [So]), protože vyžadují podstatně podrobnější zkoumání a zejména mnohem větší opatrnost a představivost při formulacích.

[8] Trochu to připomíná několik desítek let starý vtip: Svatý Václav prosí Boha o nějaký další dar pro Čechy a dostane se mu tří vlastností: čestnosti, inteligence a víry v komunismus. Již spokojen odchází, když slyší Boží příkaz: „Vymiňuji si však, že tyto tři vlastnosti nikdy nesmíš dát jednomu člověku současně.“.

vyvratitelná[9]. Jestliže ve snaze po zúplnění přidáme tuto formuli jako dodatečný axiom, opět bude existovat (tentokrát *jiná*) formule, která není ani dokazatelná, ani vyvratitelná v obohacené teorii (protože obohacená teorie by opět byla bezesporná a rekurzivní). První věta o neúplnosti tvrdí, že takovéto postupné zesilování Peanovy aritmetiky nemůže být po konečném počtu kroků ukončeno dosažením úplné teorie.

*

Nástrojem pro prokázání neúplnosti aritmetiky se kupodivu stalo to, co logiky po mnoho století trápilo — logické paradoxy. V naší ne-předmluvě jsme uvedli paradox holiče a paradox Sancho Panzy, avšak logické paradoxy jsou známy už od antiky (a vás, milý čtenáři, připravovaly na úvahy, které budou jádrem tohoto paragrafu, již úlohy o bratřích pravdomluvných a lhářích v první kapitole našeho textu).

Nejznámější je **paradox lháře** (chápaného jako člověka, který nikdy nemluví pravdu) připisovaný[10] Eubúlidu z Mílétu (4. stol. př. Kr.). Paradox je tradován ve dvou verzích: *„V tomto okamžiku lžu.“* nebo *„Kréťan Epimenidés řekl, že všichni Kréťané jsou lháři.“* — první verze je citována Ciceronem (106–43 př. Kr): „Jestliže po pravdě řekneš, že lžeš, lžeš?“; ozvěnou druhé verze je pravděpodobně i verš 1, 12 listu apoštola Pavla Titovi: „Jeden z nich, jejich vlastní prorok, řekl: ‚Kréťané jsou samí lháři. . . ‘ “.

Ukažme podrobně, že v první verzi se v každém případě dostaneme do neřešitelných rozporů. Jestliže mluvím pravdu, když říkám „V tomto okamžiku lžu.“, pak je pravda, že v tomto okamžiku lžu. Nemohu současně mluvit pravdu i lhát, takže není možné, abych při vyřčení zkoumané věty mluvil pravdu. Pročež nezbývá než, že lžu v okamžiku, když říkám „V tomto okamžiku lžu.“. Protože lžu, musí být výrok „V tomto okamžiku lžu.“ nepravdivý, tedy výrok „V tomto okamžiku mluvím pravdu.“ je pravdivý. V takovém případě však opět lžu a současně mluvím pravdu, což je vyloučeno. Jak předpoklad, že mluvím pravdu při pronášení vyšetřované věty, tak i předpoklad, že lžu, jsou zcela vyloučeny. Avšak alespoň jedno z toho musí nastat (podle zákona vyloučeného třetího — polopravdy

[9] Pro Peanovu aritmetiku samu zaručuje první věta o neúplnosti sice existenci nedokazatelné a nevyvratitelné formule, ale tato formule je z hlediska aritmetiky dosti umělá. Jsou však známy „přirozené“ formule nedokazatelné a nevyvratitelné v Peanově aritmetice. Prokázání nedokazatelnosti jedné takové formule je možno nalézt v dodatku k šesté kapitole [So] popisujícím výsledek [P-K], nedokazatelnost jiné formule viz [P-H].

[10] Připsání se děje podle zprávy Diogéna Laërtia (3.stol. po Kr.). Podobný paradoxu lháře je také stoický paradox krokodýla (připisovaný Chrýsippovi ze Soloi; asi 281–208 př. Kr.), který je obsahem cvičení III-2.2. Do souvislosti s antickými paradoxy se sluší zasadit rovněž známý Sókratův výrok „Vím, že nic nevím.“. Řadu dalších paradoxů je možno nalézt v roztomilé knize [Sm1]. Snaha o řešení se výrazně objevuje již v antice, např. Aristotelés uvažuje některé věty jako pravdivé, ale lživé v nějakých aspektech. Filítás z Kou (340–285) se *prý* paradoxem tak zabýval, až „lhář ho zabil“.

teď nepřipouštíme). V prvé verzi se tedy dostáváme do neřešitelných rozporů v obou případech zcela stejně, jako se do sporů dostali holič a Sancho Panza v ne-předmluvě.

Uvědomme si naproti tomu, že druhá verze není neřešitelným paradoxem: pokud Epimenidés mluví pravdu, pak každý Kréťan (a tedy i on sám) lže — spor; jestliže však Epimenidés lže, pak neplatí, že všichni Kréťané jsou lháři; za negaci výroku „Všichni Kréťané jsou lháři.“ však považujeme výrok, že existuje alespoň jeden Kréťan, který mluví pravdu (alespoň někdy), a tedy spor nedostáváme.

Paradox lháře i paradoxy z ne-předmluvy jsou založeny na tom, že výpověď se vztahuje sama na sebe — např. fakt, že lžu, aplikujeme na větu „V tomto okamžiku lžu.“ a z toho vyvozujeme nepravdivost faktu, že lžu, tj. vyvozujeme, že mluvím pravdu. Analogicky fakt, že mluvím pravdu, aplikujeme na větu „V tomto okamžiku lžu.“ a z toho vyvozujeme, že lžu. Jinak řečeno: ve výpovědi o pravdivosti výroku „V tomto okamžiku lžu.“ se vztahuji k významu samotného výroku; a ještě jednou totéž jinými slovy: fakt, že lžu, konfrontuji s obsahem výroku, kterým je oznámení, že lžu.

Z novějších paradoxů uveďme ještě **Berryho paradox**[11], a to zejména z důvodu, že by vám, milý čtenáři, mohl napomoci k pochopení tvrzení, že v paradoxech se využívá aplikace výroku na sebe sama: Určitě existuje přirozené číslo, které nelze v češtině popsat pomocí méně než třiceti slabik, neboť všech slabik, a tedy i všech jejich (uspořádaných) třicetic je jen konečně mnoho. Naproti tomu popis čísla *Nejmenší přirozené číslo, které nelze popsat pomocí méně než třiceti slabik,* je vyjádřen dokonce méně než dvaceti sedmi slabikami. Číslo, které nemá mít popis uvažovaného tvaru, ho zcela určitě má — spor. V češtině se nadto podstata Berryho paradoxu krásně projevuje již při jeho formulaci, protože na straně jedné je uvažované číslo popsáno 26 slabikami, na druhé straně kdybychom v popisu čísla nahradili slovo „třiceti“ slovy „dvaceti sedmi“, tak by počet slabik v popisu vzrostl na 28, bylo by třeba tedy slova „dvaceti sedmi“ nahradit slovy „dvaceti devíti“, ale při tomto popisu počet slabik opět vzroste — na 29.

Ve snaze odstranit paradoxy navrhl Bertrand Russell (1872–1970) rozdělovat usuzování do různých hladin (viz [Ru] a [W-R]), neboť tak se vyloučí vlastnosti, které lze aplikovat na sebe. Popisovat výpovědi z nějaké hladiny a rozhodovat o jejich pravdivosti je totiž v Russellově pojetí povoleno pouze z hladiny „vyšší“. Běžně není zapotřebí uvažovat mnoho hladin myšlení, k odstranění paradoxů obvykle vystačíme se dvěma hladinami.

Na hladině „vyšší“, kterou nazýváme **metamatematikou,** provádíme intuitivní úvahy a používáme běžného jazyka. Z této hladiny přesně definujeme pojmy „nižší“ — matematické — hladiny (hladiny predikátového počtu a matematických teorií), např. syntaktické pojmy jazyka, formule, důkazu a dokazatelnosti a sémantické pojmy modelu, pravdivosti a splnitelnosti. Rozlišování hladin umož-

---

[11] Paradox byl publikován v knize [W-R].

ňuje myslet o myšlení, přesněji řečeno usuzovat o *matematicky popsané představě* o usuzování. Podstatné je, že obě hladiny by měly zachycovat náš způsob usuzování, každá ale v jiné podobě: intuitivní usuzování na metamatematické hladině je použito pro zkoumání představy o našem usuzování. Právě *matematicky přesný popis* usuzování na matematické hladině umožňuje formulovat a ukazovat hluboké věty o takto vymezeném usuzování. Těžko bychom mohli takové věty prokazovat o nepřesně vymezeném intuitivním usuzování. Zejména je obtížně představitelné, že by někdo mohl prokázat tvrzení o nemožnosti dokázat určité tvrzení, pokud by neměl podrobnou a přesnou představu o tom, co se důkazem rozumí.

Rozdělení usuzování do dvou hladin zamezuje aplikacím výroků na sebe samé — ve formuli je znemožněno vyjadřovat se například o její pravdivosti, protože zkoumání pravdivosti formule patří do metamatematické hladiny a sama formule náleží do hladiny predikátového počtu. Takže idea rozlišení hladin usuzování odstraňuje paradoxy výše uvedeného typu[12)]. V mnoha případech skutečného života se někdo snaží využít ne dost přesnou formulaci nějakého zákona a získat prospěch činem ležícím na hranici zákona. Je pochopitelně velice obtížné (ve skutečném světě je to často spíše nemožné) nalézt formulaci zákona, která by dopředu zamezovala všem pokusům o jeho obejití. Ukázalo se, že ani rozdělení usuzování do dvou hladin zcela nezamezí uplatnění ideje aplikace vlastnosti na sebe samu — místo aplikace na sebe samu lze vlastnost aplikovat na něco ji samé velmi podobného. Avšak zbytky možnosti aplikovat vlastnost na sebe samu již v žádném případě — naštěstí — nevedly (a pravděpodobně nikdy nepovedou) k paradoxům. Navíc se právě tyto zbytky možnosti aplikovat vlastnost na sebe samu staly klíčem k prokazování vět o neúplnosti a tak zkoumání „na hraně zákona“ nepřineslo zlo, ale matematický objev.

*

[12)] Někteří autoři uvádějí jako příklad paradoxu neodstraněného zákazem aplikovat vlastnost na sebe samu paradox, ve kterém si představíme dvě tabulky — modrou a červenou. Na modré je napsáno „Nápis na červené tabulce je nepravdivý.“ a na červené tabulce je nápis „Nápis na modré je pravdivý.“.
O paradox se jedná zcela evidentně: (a) Je-li nápis na modré tabulce znějící „Nápis na červené tabulce je nepravdivý.“ pravdivý, je pravdivý výrok „Nápis na modré tabulce je nepravdivý.“, což je ve sporu s naším předpokladem, že nápis na modré tabulce je pravdivý. (b) Jestliže nápis na modré tabulce vypovídající „Nápis na červené tabulce je nepravdivý.“ je nepravdivý, musí být pravdivý výrok „Nápis na červené tabulce je pravdivý.“, na červené tabulce však stojí „Nápis na modré tabulce je pravdivý.“ a protože jsme začínali s předpokladem, že nápis na modré tabulce je nepravdivý, dostáváme se opět do sporu.
Žádný ze zápisů se sice nevztahuje na sebe sama, tzn. paradox skutečně není odstraněn zákazem aplikovat vlastnost na sebe samu, avšak přesto Russellovo kriterium tuto dvojici zápisů vylučuje. Kdyby totiž obsah jedné libovolně zvolené tabulky (např. modré) se nacházel na nějaké hladině myšlení, musel by se nápis zbývající tabulky (červené) nacházet na hladině „vyšší“, protože vypovídá o pravdivosti modré tabulky. Ovšem nápis na modré tabulce rovněž pojednává o pravdivosti obsahu zbývající (červené) tabulky a musí se proto nalézat na ještě „vyšší“ hladině, což je absurdní.

Na následujících jednadvaceti stránkách vás, milý čtenáři, čeká to nejtěžší, ale také to nejkrásnější z celého textu. Pokuste se, moc vás prosím, tyto stránky pochopit i za cenu, že některé odstavce (pravděpodobně zejména ty závěrečné) budete muset číst vícekrát. Úvahy, které na počátku třicátých let minulého století zaskočily celý matematický svět, se mi už nepodařilo vyjádřit jednodušeji.

Úkolem následujícího textu není podat přesné prokázání vět o neúplnosti, podrobné zdůvodnění vyžaduje provedení řady netriviálních úvah[13)]. Budeme se však snažit *naznačit* všechny základní ideje plného a přesného prokázání vět o neúplnosti — v tomto ohledu se náš text podstatně liší od běžných popularizací Gödelových výsledků, které se většinou ani nepokusí o přesnější formulaci vět o neúplnosti, o náznaku prokazování ani nemluvě.

Ve snaze text zpřehlednit a vyzvednout jednotlivé ideje rozdělíme náš výklad do několika bodů, z nichž každý vyzdvihuje jednu myšlenku. Rozsah bodů bude zcela rozdílný a závisí také na míře *hloubky popisu* myšlenky, o kterou jde — např. jednou z nejdůležitějších myšlenek je diagonalizace, pátý bod je však poměrně krátký, myšlenku můžeme pouze zformulovat, její podrobnější předvedení naprosto přesahuje možnosti našeho textu. První čtyři body jsou přípravné, podstatu idejí o neúplnosti přináší až poslední čtveřice:

1) kódování posloupností přirozených čísel přirozenými čísly;
2) formalizace metamatematických přirozených čísel;
3) formální logika;
4) aritmetizace logiky;
5) diagonalizace jako zbytek možnosti aplikovat formuli na sebe samu;
6) neúplnost a Gödelova formule;
7) neúplnost a Rosserova formule;
8) nedokazatelnost formální bezespornosti.

1) kódování posloupností přirozených čísel přirozenými čísly

Uvedli jsme, že si klademe za cíl pouze ukázat na milníky v prokazování vět o neúplnosti a naznačit cesty, které vedou k jejich prokázání. Konkrétně nyní budeme jen konstatovat, že je možno najednou přirozenými čísly zakódovat všechny posloupnosti přirozených čísel, které mají konečnou délku, a podrobnější prokazování omezíme jen na ukázání kódování *dvojic* přirozených čísel. Kódování dvojic přirozených čísel bývá totiž prvním postupným cílem pro kódování posloupností konečné délky a již na tomto jednodušším případu jsme si schopni ukázat, jak ke kódování napomůže souhra funkcí sčítání a násobení.

Způsobů kódování dvojic přirozených čísel je pochopitelně mnoho; dále probíraný způsob je volen tak, aby byl poměrně jednoduše vyjádřitelný pomocí „pou-

13) Prokázat všechny potřebné kroky, tzn. ukázat, že všechny úvahy v tomto paragrafu jsou korektní, vyžaduje poměrně tvrdou práci a zabralo by řadu hodin vysokoškolské přednášky.

ného" sčítání a násobení[14].

Dvojici přirozených čísel m, n hodláme kódovat přirozeným číslem

$$\frac{(m+n)\cdot(m+n+1)}{2}+m.$$

Nejprve je však potřeba si uvědomit, že uvedený výraz má smysl, tzn. že číslo $(m+n)\cdot(m+n+1)$ je sudé. Připomeňme proto příklad 14 z prvního paragrafu první kapitoly, ve kterém jsme podali ideu důkazu tvrzení, že pro každé přirozené číslo m' je $m'\cdot(m'+1)$ sudé.

Dvojici čísel z následujícího horního diagramu kóduje to číslo, které je v dolním diagramu na odpovídajícím místě.

	n							
	0	1	2	3	4	$\dots$	i	$\dots$
m 0	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(0,3)$	$(0,4)$	$\dots$	$(0,i)$	$\dots$
1	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$\dots$	$(1,i-1)$	$\dots$	
2	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$\dots$	$(2,i-2)$	$\dots$		
3	$(3,0)$	$(3,1)$	$\dots$	$\dots$	$\dots$			
4	$(4,0)$	$\dots$	$(i-2,2)$	$\dots$				
$\dots$	$\dots$	$(i-1,1)$	$\dots$					
i	$(i,0)$	$\dots$						
$\dots$	$\dots$							

	n							
	0	1	2	3	4	$\dots$	i	$\dots$
m 0	0	1	3	6	10	$\dots$	$\frac{i\cdot(i+1)}{2}$	$\dots$
1	2	4	7	11	$\dots$	$\frac{i\cdot(i+1)}{2}+1$	$\dots$	
2	5	8	12	$\dots$	$\frac{i\cdot(i+1)}{2}+2$	$\dots$		
3	9	13	$\dots$	$\dots$	$\dots$			
4	14	$\dots$	$\frac{i\cdot(i+1)}{2}+(i-2)$	$\dots$				
$\dots$	$\dots$	$\frac{i\cdot(i+1)}{2}+(i-1)$	$\dots$					
i	$\frac{i\cdot(i+1)}{2}+i$	$\dots$						
$\dots$	$\dots$							

V „trojúhelníku" určeném dvojicemi $(0,0), (i,0)$ a $(0,i)$ se nacházejí právě všechny dvojice přirozených čísel, pro které je $m+n$ menší nejvýše rovno i. Speciálně ta čísla, pro něž je $n+m=i$, jsou přesně na „přeponě" popsané dvojicemi $(i,0)$ a $(0,i)$. Ukážeme, že dvě různé dvojice m, n a m', n' na této „přeponě" musí mít různé kódy. Pro získání sporu předpokládejme rovnost

$$\frac{(m+n)\cdot(m+n+1)}{2}+m=\frac{(m'+n')\cdot(m'+n'+1)}{2}+m'$$

[14] Často se navrhuje kódovat dvojici m, n číslem $2^n\cdot 3^m$; bohužel tímto zdánlivě snadným kódováním se problem podstatně nezjednoduší, protože samo zavedení mocnění na základě sčítání a násobení opět vyžaduje rekurzi.

a současně rovnost $m+n = i = m' + n'$. Za našich předpokladů po vynásobení číslem 2 (a při užití distributivity) dostaneme

$$i \cdot (i+1) + 2 \cdot m = i \cdot (i+1) + 2 \cdot m',$$

a následně po odečtení čísla $i \cdot (i+1)$ od obou stran rovnosti získáme $2 \cdot m = 2 \cdot m'$. Každý nahlédne, že nyní je vhodné zkrátit číslem 2 obě strany poslední rovnice, protože tak získáme $m = m'$. Následně z rovnosti $m + n = i = m + n'$ vyvodíme $n = n'$ znovu prostým odečtením čísla m od obou stran rovnosti; rovnosti $m = m'$ a $n = n'$ však odporují předpokladu různosti zkoumaných dvojic.

K prokázání, že každý kód odpovídá jediné dvojici (tj. že jsme schopni z kódu dvojice tuto dvojici odkódovat), je již nutné uvažovat pouze dvojice, jejichž součty jsou různé. Číslo

$$\frac{i \cdot (i+1)}{2} + i$$

je největší přirozené číslo kódující některou z dvojic nacházejících se na „přeponě“ určené dvojicemi $(i, 0)$ a $(0, i)$. Nejmenší číslo kódující některou dvojici nalézající se na „přeponě“ zadané dvojicemi $(i+1, 0)$ a $(0, i+1)$ je číslo $\frac{(i+1)\cdot(i+2)}{2}$; k různosti kódů proto postačuje (při užití běžných vlastností vztahu „menší než“) ukázat nerovnost

$$\frac{i \cdot (i+1)}{2} + i < \frac{(i+1) \cdot (i+2)}{2}.$$

Požadovaná nerovnost přechází ekvivalentně na nerovnost $i \cdot (i+1) + 2 \cdot i < (i+1) \cdot (i+2)$ prostým užitím distributivity a neměnnosti nerovnosti při násobení nenulovým přirozeným číslem (násobíme číslem 2). Abychom ukázali, že posledně zmíněná nerovnost je v pořádku, uvažme soustavu jedné nerovnosti a tří rovností

$$i \cdot (i+1) + 2 \cdot i < i \cdot (i+1) + 2 \cdot i + 2 = (i+1) \cdot i + 2 \cdot i + 2 = (i+1) \cdot i + (i+1) \cdot 2 = (i+1) \cdot (i+2).$$

Nerovnost získáme na základě nerovnosti $0 < 2$ a na základě možnosti přičíst k oběma stranám nerovnosti totéž číslo beze změny nerovnosti, rovnosti jsou důsledkem distributivity a komutativity násobení.

2) formalizace metamatematických přirozených čísel

Začněme se zabývat vztahem metamatematických přirozených čísel a matematických přirozených čísel jakožto objektů nějaké teorie zesilující Peanovu aritmetiku. Současně mi dovolte tyto myšlenky poněkud odlehčit tím, že budu uvažovat „hobity“, kteří žijí na matematické hladině, tzn. pro které je metamatematickou hladinou ta hladina, která je z našeho pohledu hladinou matematickou.

Budeme si představovat, že přirozená čísla každého hobita splňují Peanovu aritmetiku, tzn. že přirozená čísla, jež jsou metamatematická z pohledu hobita, tvoří z našeho pohledu model Peanovy aritmetiky. Takže každá formule dokazatelná v Peanově aritmetice je splněna i pro metamatematická čísla kteréhokoli hobita (korektnost Peanovy aritmetiky). Na druhé straně budeme také předpokládat, že každý model Peanovy aritmetiky vytváří metamatematická přirozená čísla některého hobita. Následně formule, která bude pravdivá pro metamatematická čísla *kteréhokoli* hobita, bude dokazatelná v Peanově aritmetice (úplnost predikátového počtu, viz druhý paragraf kap. II). Takže nějaká formule je dokazatelná v Peanově aritmetice, právě když se na ní shodnu s každým hobitem.

Každému jednotlivému metamatematickému přirozenému číslu můžeme přiřazovat jemu odpovídající uzavřený term, který je n-násobným následovníkem konstanty nula. Term přiřazený metamatematickému číslu n bývá nazýván FORMALIZACÍ čísla n a značen $\overline{n}$; jeho definici můžeme podrobněji popsat metamatematickou indukcí: metamatematickému číslu 0 přiřadíme konstantu $\mathit{0}$ jazyka aritmetiky a je-li metamatematickému číslu n přiřazen term $\overline{n}$, pak přirozenému číslu $n+1$ přiřadíme term $\mathfrak{S}(\overline{n})$. Pro každé metamatematické n je $\overline{n}$ uzavřený term jazyka Robinsonovy aritmetiky; např. $\overline{2}$ je termem $\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathit{0}))$.

Z hlediska každého hobita popisuje term $\overline{n}$ přesně určený objekt, neboť realizace termu $\overline{n}$ je individuem v každém modelu $\boldsymbol{PA}$, tedy nějakým metamatematickým přirozeným číslem z hobitova pohledu; při vyprávění příběhu o hobitech budeme mluvit o PŘEKLADU čísla n místo o realizaci FORMALIZACE tohoto čísla.

Milovníky Tolkienových knih zarazí, že vůbec uvažujeme o nutnosti překladu lidské řeči do řeči hobitů. Během našeho zkoumání skutečně ukážeme, že v jednotlivých případech jsou běžná slova natolik jasná, že člověk s hobitem si opravdu rozumějí v jednoduchých případech. Hrdinové Tolkienových knih jsou natolik zaměstnáni bojem proti konkrétnímu zlu, že jim nezbývá čas na hlubokomyslné filozofické rozbory, např. o tom, co je zlo. Při takových rozhovorech by se mohla ukázat různost pohledů a potřeba překladu z jedné řeči do druhé minimálně ve smyslu vysvětlování lidských a hobitích zkušeností a chápání skutečnosti odrážející prožitky uložené v podvědomí té nebo oné skupiny.

Jako ilustraci předchozího tvrzení, že běžná slova jsou dostatečně jasná si zkusme uvědomit, co je překladem metamatematických přirozených čísel 0 a 2. Číslu 0 je přiřazena konstanta $\mathit{0}$ a podle dohody učiněné v §1 každý model (Robinsonovy) aritmetiky „začíná“ metamatematickými přirozenými čísly; realizací konstanty $\mathit{0}$ je tedy metamatematické přirozené číslo 0. Zcela analogicky metamatematickému přirozenému číslu 2 je přiřazen tem $\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathit{0}))$ a tento term je v modelu aritmetiky podle uvedené dohody realizován metamatematickým číslem 2. „Překlady“ metamatematických přirozených čísel 0 a 2 jsou tedy tato čísla sama.

Naše rozmluva s hobitem o PŘEKLADU čísla bude zcela smysluplná, můžeme si například vyměňovat názory, zda tento objekt má tu nebo onu vlastnost. Jestli se shodneme na vlastnosti připisované metamatematickému přirozenému číslu n, bude v mnoha případech velmi záležet na povaze té vlastnosti.

V dalším textu bude popsána řada vlastností, o nichž bude panovat shoda, nyní zkoumejme jednu vlastnost predikátu $\leq$ jako příklad a použijme již trochu matematičtější formulace. Přirozené číslo 0 je nejmenším metamatematickým přirozeným číslem; vlastnost FORMALIZACE přirozeného čísla 0 „být nejmenším přirozeným číslem“ vyjádříme formulí $(\forall x)(\mathit{0} \leq x)$. S *každým* hobitem se shodneme na zkoumané vlastnosti čísla 0 (neboli zkoumaná vlastnost je pravdivá v *každém* modelu $\boldsymbol{PA}$) přesně tehdy, když v Peanově aritmetice je dokazatelné, že $\mathit{0}$ je nejmenší přirozené číslo (symbolicky $\boldsymbol{PA} \vdash (\forall x)(\mathit{0} \leq x)$). Formuli $(\forall x)(\mathit{0} \leq x)$ jsme dokázali dokonce již v Robinsonově aritmetice (viz formuli (ra3) předcházejícího paragrafu), odpověď je tudíž kladná: s každým hobitem se dohodneme, že nejmenším číslem je 0 (pro přesnost uveďme, že s hobitem mluvíme o čísle 0 jakožto realizaci konstanty $\mathit{0}$ v příslušném modelu).

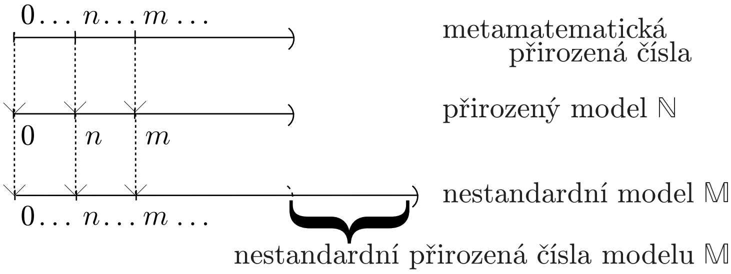

Diagram 1

Na podobě *systému* všech přirozených čísel však nebude s každým hobitem shoda. Nelze totiž vyloučit, že uvnitř Peanovy aritmetiky (přesněji v nějakém jejím modelu) existují přirozená čísla, která *nerealizují* žádnou FORMALIZACI našeho metamatematického přirozeného čísla. Situace je dokonce mnohem vyhraněnější: přirozený model je jediný model $\boldsymbol{PA}$, jehož individua tvoří přesně všechny realizace FORMALIZACÍ našich metamatematických přirozených čísel, v každém jiném modelu $\boldsymbol{PA}$ existuje individuum, jež není realizací FORMALIZACE našeho metamatematického přirozeného čísla. Modely Peanovy aritmetiky různé od přirozeného modelu nazveme **nestandardní.** Za okamžik ukážeme existenci nestandardního modelu Peanovy aritmetiky, jenž je od přirozeného modelu vnitřně k nerozeznání (v obou modelech jsou pravdivé tytéž uzavřené formule). Nadto jako důsledek vět o neúplnosti dostaneme existenci modelů Peanovy aritmetiky, které se dokonce rozcházejí s přirozeným modelem v pravdivosti nějaké uzavřené formule.

Protože myšlenka z předchozího odstavce je pro další vyprávění zcela klíčová, přeříkejme ji ještě jednou poněkud jinými slovy. Uvažujeme-li jakékoli metamatematické přirozené číslo, pak jeho PŘEKLAD přijme vždy hobit jako své metamatematické číslo. Pokud však hobit chce rozprávět o nějakém svém metamatematickém čísle, pak buďto je toto číslo PŘEKLADEM nějakého našeho metamatematického čísla a pak se o tomto čísle můžeme s hobitem smysluplně bavit, nebo není hobitovo metamatematické číslo žádným PŘEKLADEM našeho metamatematického čísla a pak nám nezbude než rozhovor o něm — slušně, ale důrazně — odmítnout. Hobit bude nespokojen a bude tvrdit, že je to metamatematické číslo jako každé jiné. My však musíme stát pevně na svém: neumíme ti sice vysvětlit proč, avšak my toto číslo nepovažujeme za vhodné a diskusi o něm prostě odmítáme.

Protože metamatematická přirozená čísla nějakého hobita mohou být „delší“ než naše lidská[15)], může se stát, že mezi nimi je číslo, které má odlišnou vlastnost od všech našich metamatematických přirozených čísel. Pak ovšem vlastnost „Existuje metamatematické přirozené číslo s touto vlastností.“ bude z hlediska hobita, o němž je řeč, pravdivá a z lidského pohledu pravdivá nebude. Následující příklad si však naopak klade za cíl sestrojit nestandardní model, který taková „divná“ přirozená čísla nemá: jestliže existuje hobitovo metamatematické přirozené číslo s nějakou vlastností, pak vždy existuje i lidské metamatematické přirozené číslo s tou samou vlastností.

Příklad 1. Pro sestrojení modelu Peanovy aritmetiky různého od přirozeného modelu aritmetiky, avšak vnitřně co nejvíce podobného přirozenému modelu, je vhodné uvažovat dvě teorie $\boldsymbol{S}$ a $\boldsymbol{T}$. Jazyk teorie $\boldsymbol{S}$ budiž normální jazyk aritmetiky a za axiomy přijměme všechny uzavřené formule pravdivé v přirozeném modelu. Je velmi jednoduché ukázat, že v každém modelu $\mathbb{M}$ teorie $\boldsymbol{S}$ jsou pravdivé právě tytéž uzavřené formule jako v přirozeném modelu aritmetiky: je-li uzavřená formule φ pravdivá v přirozeném modelu, je axiomem teorie $\boldsymbol{S}$, a proto musí být φ pravdivá v každém modelu teorie $\boldsymbol{S}$, takže i v modelu $\mathbb{M}$; předpokládejme naopak, že uzavřená formule φ není pravdivá v přirozeném modelu, pak je v přirozeném modelu pravdivá její negace $\neg\varphi$ (přímo z definice splňování ve strukturách plyne, že není-li pravdivá *uzavřená* formule, musí být pravdivá její negace), ta musí být pravdivá v každém modelu teorie $\boldsymbol{S}$, pročež nemůže být v modelu $\mathbb{M}$ pravdivá formule φ (v žádné struktuře nemohou být současně pravdivá uzavřená formule i její negace prostě v důsledku definice splňování negace formule ve struktuře). Ještě jednodušší je nahlédnout, že $\boldsymbol{S}$ je rozšířením Peanovy aritmetiky, protože o přirozeném modelu aritmetiky předpokládáme, že je modelem Peanovy aritmetiky.

Jako teorii $\boldsymbol{T}$ zvolíme rozšíření teorie $\boldsymbol{S}$ vzniklé obohacením jazyka o novou konstantu c a přidáním všech axiomů tvaru $\overline{n} < \mathsf{c}$, kde n je metamatematickým přirozeným číslem. Chceme sestrojit alespoň jeden model teorie $\boldsymbol{T}$. To se zdá být poměrně obtížný úkol, uvidíme však, že to není tak těžké (pokud jsme přijali výsledky shrnuté v druhém paragrafu předcházející kapitoly). Každá bezesporná teorie má model, pročež postačí prokázat bezespornost teorie $\boldsymbol{T}$. V tomto okamžiku si musíme uvědomit, že teorie je sporná, právě když je sporná jakási její *konečná* část (viz druhý paragraf předchozí kapitoly — připomeňme, že toto je důsledkem faktu, že v každém důkazu je použito jen konečně mnoho axiomů). Není docela zapotřebí vynechávat nějaké axiomy teorie $\boldsymbol{S}$, jsme schopni ukázat, že $\boldsymbol{S}$ a *konečně* mnoho axiomů tvaru $\overline{n} < \mathsf{c}$ je bezespornou teorií. Zapišme si těchto konečně mnoho axiomů: $\overline{n_1} < \mathsf{c}, \ldots, \overline{n_i} < \mathsf{c}$. Z konečně mnoha metamatematických čísel $n_1, \ldots, n_i$ je jedno největší, budiž to číslo n_j. Uvažme přirozený model a realizujme v něm konstantu c číslem $n_j + 1$. Vzniká nám struktura $\mathbb{O}'$ pro jazyk aritmetiky s dodanou konstantou c. Zanedbáme-li konstantu c, je model $\mathbb{O}'$ totožný s přirozeným modelem, model $\mathbb{O}'$ je proto modelem teorie $\boldsymbol{S}$. Volba realizace konstanty c zajišťuje, že pro libovolné číslo $n < n_j + 1$ je $\mathbb{O}' \models \overline{n} < \mathsf{c}$ (neboť n je realizací termu $\overline{n}$, takže $\mathbb{O}' \models \overline{n} < \overline{m}$, právě když n je menší než m). Pročež ve struktuře $\mathbb{O}'$ jsou pravdivé všechny formule $\overline{n_1} < \mathsf{c}, \ldots, \overline{n_i} < \mathsf{c}$; zjistili jsme, že $\mathbb{O}'$ je modelem teorie $\boldsymbol{S}$ a rovněž

15) Pro jednoduchost se vyjadřujeme, jako by metamatematická přirozená čísla všech lidí byla stejná, avšak i tento pohled by bylo možno podrobit diskusi.

axiomů $\overline{n_1} < \mathsf{c}, \ldots, \overline{n_i} < \mathsf{c}$. V důsledku toho pro libovolný konečný systém metamatematických přirozených čísel $n_1, \ldots, n_i$ je teorie $\boldsymbol{S}$ s dodatečnými axiomy $\overline{n_1} < \mathsf{c}, \ldots, \overline{n_i} < \mathsf{c}$ bezesporná; následně je tudíž bezesporná celá teorie $\boldsymbol{T}$, a má proto nějaký model $\mathbb{O}$.

Každé individuum přirozeného modelu je metamatematickým přirozeným číslem. Naproti tomu realizace konstanty c *nemůže* být realizací žádného termu tvaru $\overline{n}$, protože ve struktuře $\mathbb{O}$ je pravdivá každá z formulí $\overline{n} < \mathsf{c}$ (což jsou axiomy teorie $\boldsymbol{T}$). Pročež individuí struktury $\mathbb{O}$ je více než individuí přirozeného modelu $\mathbb{N}$ (přesněji: realizace termů tvaru $\overline{n}$ tvoří pouze část univerza modelu $\mathbb{O}$). Nechť model $\mathbb{M}$ vznikne z modelu $\mathbb{O}$ vypuštěním realizace konstanty c (tzn. model $\mathbb{M}$ je totožný s modelem $\mathbb{O}$, jen přestaneme uvádět předpis, jak realizovat konstantu c); pak je $\mathbb{M}$ modelem pro jazyk aritmetiky a protože jsme realizace aritmetických funkcí neměnili, je modelem teorie $\boldsymbol{S}$ přesně stejně jako modelem této teorie byl model $\mathbb{O}$.

Individua, která nejsou realizacemi termů tvaru $\overline{n}$ pro žádné metamatematické přirozené číslo n, je zvykem nazývat nestandardní; zopakujme, že strukturu, která obsahuje nestandardní přirozená čísla, nazýváme nestandardní. Užívajíce tuto terminologii konstatujme, že v prvním příkladu jsme sestrojili nestandardní model Peanovy aritmetiky, ve kterém jsou pravdivé přesně tytéž uzavřené formule jako v přirozeném modelu.

V předchozím příkladu jsme nahlédli, že metamatematická přirozená čísla hobita mohou být „delší“ než naše. Při zdůraznění některých aspektů je na tom lépe hobit, protože umí rozeznat i vzdálenosti $1/\mathfrak{n}$, kde $\mathfrak{n}$ je hobitovo metamatematické přirozené číslo. Pokud $\mathfrak{n}$ není PŘEKLADEM lidského metamatematického čísla, nejsme my schopni tuto vzdálenost rozlišit — je pro nás „nekonečně malá“. Z hlediska myšlenek tohoto paragrafu však budeme dávat přednost „kratším“ metamatematickým číslům a fakt, že hobitova metamatematická přirozená čísla mohou být „delší“, budeme interpretovat jako jeho neschopnost uvidět možnost jejich zkrácení. (Pokud půjdeme v příběhu inspirovaném Tolkienem ještě o krok dále, musíme připustit, že elfové nahlížejí možnost dalšího zkrácení metamatematických přirozených čísel a se shovívavostí se dívají na lidskou neschopnost uvidět tuto možnost.)

Míru shody mezi našimi a hobitovými metamatematickými přirozenými čísly si ukážeme ještě na příkladu kódování dvojic přirozených čísel. Shrňme principy výslovně užité v předchozím bodu při kódování dvojic přirozených čísel a současně ke každému z nich uveďme formuli, která zachycuje ten který princip: distributivita (pa5), možnost přičíst nebo odečíst od každé strany nerovnosti totéž číslo beze změny nerovnosti (pa11), možnost násobit nebo krátit každou stranu nerovnosti týmž nenulovým číslem beze změny nerovnosti (pa12), komutativita násobení (pa4); navíc jsme uvedli, že užíváme běžné vlastnosti nerovnosti, ty jsou zachyceny formulemi (pa6)–(pa8). Formule uvedené v předchozím seznamu jsou všechny dokazatelné v Peanově aritmetice (viz předchozí paragraf). Právě dokazatelnost příslušných formulí v Peanově aritmetice zajišťuje, že hobit může provádět přesně stejné úvahy na své metamatematické hladině, jako provádíme my na své. Takže speciálně hobit může kódovat dvojice svých metamatematických přirozených čísel na základě těch principů, na jejichž základě jsme kódování dvojic našich metamatematických přirozených čísel provedli v prvním bodě my.

Pokračujme však ještě dále v popisu vztahu kódování přirozených čísel na metamatematické a matematické hladině rozvíjením příběhu o hobitech. Představme si, že vezmeme dvojici metamatematických přirozených čísel a zakódujeme ji. V tom okamžiku máme tři metamatematická přirozená čísla; každé z nich jednotlivě PŘELOŽÍME, a tak hobitovi dáme tři PŘEKLADY čísel s dotazem, zda poslední číslo je kódem dvojice těch prvních dvou. Hobit se na tyto překlady podívá a za okamžik už se usměje a řekne: „No to je jasné, samozřejmě je.“ (Uvědomte si, že kdyby ve způsobu kódování nebyla mezi námi a hobity shoda, nesouhlasil by *každý* hobit, že poslední číslo je kódem dvojice těch předchozích.)

Představme si však opačnou situaci. Hobit zakóduje dvojici *svých* metamatematických čísel a pak nám všechna tři čísla nabídne. Nyní jsou dvě možnosti. Jsou-li všechna tři čísla PŘEKLADY metamatematických čísel, potěšíme hobita sdělením, že i pro nás kóduje poslední číslo dvojici čísel předchozích. Jestliže naopak alespoň jedno z hobitových čísel není PŘEKLADEM metamatematického přirozeného čísla, zklameme hobita a další debatu o těchto číslech odmítneme.

Hobitovu nespokojenost, že se o některých jeho metamatematických přirozených číslech odmítáme bavit, nemůžeme odstranit (viz Příklad 1). Můžeme se ji však snažit poněkud zmírnit závazkem, že budeme-li ochotni se bavit o nějakém jeho čísle, budeme ochotni již debatovat i o všech menších. (Prohlašujeme, že číslo menší než PŘEKLAD nějakého metamatematického čísla je samo také PŘEKLADEM; přesná formulace spolu s návodem důkazu je podána ve cvičení III-2.22.) Můžeme také hobita uklidňovat slibem, že pokud přijmeme rozpravu o dvou číslech, budeme se také ochotni bavit o jejich kódu a naopak přistoupíme-li na diskusi o kódu dvojice čísel, budeme určitě souhlasit také s debatou o každém z nich[16].

3) formální logika

Výstavbu formulí predikátového počtu, kterou jsme předvedli v předchozí kapitole na metamatematické hladině, můžeme doslova zopakovat na matematické hladině, tzn. uvnitř uvažované aritmetické teorie (jinak řečeno můžeme přirozená čísla původně chápaná pouze jako přirozená čísla aritmetické teorie začít považovat za metamatematická přirozená čísla a vzhledem k nim — uvnitř teorie — vybudovat logiku). Ještě jinými slovy: hobit může vybudovat predikátový počet přesně stejně, jako jsme ho vybudovali v předchozí kapitole my. Takto dostaneme objekty, které se běžně nazývají formálními formulemi, formálními důkazy,

[16] Kód dvojice je přirozené číslo větší nebo rovno oběma číslům z dvojice. Je-li tedy kód PŘEKLADEM metamatematického přirozeného čísla, musí být jedno každé číslo z dvojice také PŘEKLADEM nějakého metamatematického přirozeného čísla. Na druhé straně jsou-li obě čísla z dvojice PŘEKLADEM metamatematických přirozených čísel, existuje metamatematické přirozené číslo, které je kódem této dvojice metamatematických přirozených čísel a následně PŘEKLAD tohoto kódu je (hobitím) kódem dvojice výchozích přirozených čísel.

atd.; při vyprávění příběhu o hobitovi budeme používat názvů hobitovy formule, hobitovy důkazy, atd.

Věrnost shody lidské a hobitovy logiky závisí na míře shody našich a hobitových přirozených čísel. Předpoklad, že hobitova metamatematická přirozená čísla splňují Peanovu aritmetiku (pro Gödelovy věty až zbytečně silný), zabezpečí, že shoda bude poměrně dobrá. Popis této shody však bude projednán až v příštím bodě, neboť napřed se musíme dohodnout na způsobu PŘEKLADŮ formulí predikátového počtu.

4) aritmetizace logiky

Konstrukce formulí probíhá rekurzí popsanou ve druhém paragrafu předcházející kapitoly. Jinak řečeno: probíhá v krocích, které odpovídají metamatematickým přirozeným číslům. Pročež naše pojetí formulí závisí na pojetí metamatematických přirozených čísel. Je dokonce možné zakódovat jednu každou formuli metamatematickým přirozeným číslem[17)].

Chceme-li zakódovat formule přirozenými čísly, musíme se nejprve dohodnout, jak zakódujeme základní stavební kameny pro tvorbu formulí. Zopakujme z §2 kap. II, že základními stavebními kameny pro výstavbu formulí jazyka aritmetiky jsou

(a) proměnné, např. $x_0, x_1, \ldots$, které budeme kódovat např. sudými přirozenými čísly 0,2,...;
(b) predikát rovnosti, který budeme kódovat např. číslem 1;
(c) konstanta *0*, již budeme kódovat např. číslem 3;
(d) funkce následovníka, sčítání a násobení, které zakódujeme např. čísly 5,7 a 9;
(e) logické spojky, tj. znaky $\neg, \rightarrow, \&, \vee$ a $\equiv$, jež zakódujeme po řadě např. čísly 11, 13, 15, 17 a 19;
(f) kvantifikátory $\forall, \exists$ budeme po řadě kódovat např. čísly 21, 23;
(g) pomocnými stavebními kameny jsou závorky (a), jež budeme kódovat např. čísly 25 a 27.

Formule $(\exists x_1)(x_1 = \mathfrak{S}(x_1))$ bude kódována posloupností 25, 23, 2, 27, 25, 2, 1, 5, 25, 2, 27, 27. V prvním bodě jsme naznačili, jak je možno posloupnost přirozených čísel zakódovat jediným přirozeným číslem n, takže naší posloupnosti odpovídá přesně jedno přirozené číslo, které můžeme chápat jako kód formule $(\exists x_1)(x_1 = \mathfrak{S}(x_1))$.

Konec konců, kdybychom měli popsat znak závorky (, bylo by to pro nás obtížnější než prostě konstatovat, že levá závorka *je* číslem 25. Analogicky i ostatní stavební kameny pro vytváření formulí můžeme prostě ztotožnit s určitými přirozenými čísly, v konečném důsledku nám to umožní ztotožnit formuli $(\exists x_1)(x_1 = \mathfrak{S}(x_1))$ s číslem n.

Ukázali jsme, že každou formuli můžeme zakódovat přirozeným číslem, dokonce si však můžeme představovat, že tento kód *je* formulí, tzn. můžeme chápat formuli jako určité přirozené číslo. Tento myšlenkový posun zjednoduší vyjádření idejí vedoucích k větám o neúplnosti; pokud tento posun odmítnete, budete muset později místo jednoduchého vyjádření Gödelovy formule „MÁ FORMALIZACE není ... “ použít složitější „FORMALIZACE MÉHO KÓDU je kódem formální

17) V dalším budeme ukazovat způsob kódování formulí jazyka aritmetiky, nevyžadovalo by však žádnou podstatnou myšlenkovou změnu, kdybychom se rozhodli kódovat formule jiného jazyka.

formule, jež není …“. Takže snad uznáte, že je jednodušší přijmout pohled, že formule *jsou* jistá přirozená čísla.

Autor vás, milý čtenáři, láká ke změně pohledu a žádá, abyste formule nepokládal pouze za zakódovatelné přirozenými čísly, avšak dokonce přímo *za přirozená čísla.* Snad další argument vás již přesvědčí. O tom, jak pro hobita PŘELOŽIT znak závorky (dosud nepadlo jediné slovo, a to zcela právem. Pokud začneme znak (chápat jako přirozené číslo 25, budeme pochopitelně PŘEKLADEM znaku (rozumět PŘEKLAD čísla 25. Jak PŘELOŽIT metamatematické číslo 25 jsme se již dohodli ve druhém bodě, pročež s PŘEKLADEM znaku závorky — chápané jako metamatematické přirozené číslo — není vůbec žádný problém. Přesně stejně je to však také s PŘEKLADY formulí. Jakmile začneme chápat formule jako nějaká metamatematická přirozená čísla, zcela automaticky máme popsány rovněž JEJICH PŘEKLADY. Tím každé formuli na metamatematické hladině přiřadíme JEJÍ FORMALIZACI, která reprezentuje přirozené číslo uvnitř jakékoli rozumné aritmetiky; v příběhu o hobitovi každou formuli na metamatematické hladině umíme PŘELOŽIT.

V logice nepojednáváme pouze o jednotlivých formulích, velmi často nás zajímají také konečné posloupnosti formulí (např. důkazy nebo konečné systémy axiomů nějakých teorií). Například Robinsonova aritmetika má osm axiomů **RA1**–**RA8**. Hobitova Robinsonova aritmetika bude mít také přesně osm axiomů; tyto axiomy budou hobitovy formule, které jsou PŘEKLADY našich axiomů **RA1**–**RA8**[18].

Zvažujme nyní případ, že existují nestandardní matematická přirozená čísla, tj.individua modelu aritmetiky (řekněme Robinsonovy), která nejsou FORMALIZACEMI metamatematických přirozených čísel. V takovém případě určitě existují i formální formule jazyka Robinsonovy aritmetiky a formální důkazy v Robinsonově aritmetice, které *nejsou* žádnou FORMALIZACÍ (metamatematických) formulí a žádnou FORMALIZACÍ důkazů Robinsonovy aritmetiky. Je proto představitelné, že ve zkoumaném modelu aritmetiky existuje např. individuum, které je *formálním* důkazem sporu v Robinsonově aritmetice, avšak toto individuum *není* FORMALIZACÍ žádného skutečného metamatematického důkazu, a proto na metamatematické hladině odpovídající důkaz sporu nemusí vůbec existovat. Později ukážeme dokonce, že existují bezesporná[19] rozšíření Peanovy aritmetiky, ve kterých je *dokazatelná* existence takovýchto objektů.

Tak ještě jednou myšlenky předchozího odstavce pomocí našeho příběhu o hobitech. O trochu výše jsme se dohodli, jak vypadají hobitovy axiomy Ro-

[18] Protože však naše zakódování konečné posloupnosti přirozených čísel přesně odpovídá hobitovu zakódování, můžeme axiomy hobitovy Robinsonovy aritmetiky popsat také jako posloupnost hobitových formulí, jejíž hobití kód je PŘEKLADEM našeho kódu konečné posloupnosti axiomů Robinsonovy aritmetiky.

[19] pochopitelně za předpokladu, že sama Peanova aritmetika je bezesporná

binsonovy aritmetiky a popsali jsme vztah mezi našimi a hobitovými axiomy této teorie; teď zkoumejme hobitovy důkazy v Robinsonově aritmetice (podobně by se dalo pojednat i hobitových formulích). Jestliže zakódujeme důkaz (který je konečnou posloupností formulí) a pak PŘEKLAD tohoto kódu dáme hobitovi, tak hobit bude postupně konstatovat: „Opravdu je to kód konečné posloupnosti, a hele, členy té posloupnosti jsou formule aritmetiky, ale to není všechno: vypadá to jako důkaz, na několika místech jsou axiomy logiky a někde se užívají odvozovací pravidla; hm, tak jaké formule nám to zbývají na axiomy teorie, no jasně: všechny ty zbývající formule jsou axiomy Robinsonovy aritmetiky.“ A hobit bude konstatovat, že jsme mu dali důkaz v Robinsonově aritmetice.

Teď zkusme rozebrat, co se stane, když nám hobit nabídne svůj kód důkazu v (jeho) Robinsonově aritmetice. Je-li tento kód PŘEKLADEM metamatematického čísla, pak o tomto čísle budeme zase my konstatovat přesně totéž, co je uvedeno v uvozovkách v předchozím odstavci a na závěr také prohlásíme, že nám hobit dal návod na důkaz v Robinsonově aritmetice. Pokud nám však hobit dal kód důkazu, který není PŘEKLADEM metamatematického čísla, pak diskusi o tomto hobitově důkazu musíme odmítnout. A trvat na tom, i když nám to třeba dá práci, protože hobit nás bude například lákat, že je to důkaz spornosti Robinsonovy aritmetiky. Avšak z toho, že má hobit důkaz spornosti hobitovy Robinsonovy aritmetiky, naprosto *neplyne*, že podobný důkaz existuje i na metamatematické hladině (plynulo by to pouze tehdy, kdyby ten důkaz byl PŘEKLADEM důkazu na metamatematické hladině nebo kdybychom učinili ještě dodatečné předpoklady např. typu, o kterém bude řeč v šestém bodě).

Probrali jsme metodu, jak FORMALIZOVAT *konečnou* posloupnost formulí, avšak v logice pojednáváme také o *nekonečných* systémech. Například axiomů Peanovy aritmetiky je — díky indukci — nekonečně mnoho a již dříve jsme konstatovali, že není možno vybrat konečný podsystém stejné síly. Z podstaty věci se tudíž musíme zabývat rovněž FORMALIZACEMI nekonečných posloupností. Do této chvíle jsme motivovali požadavek rekurzivnosti teorií možností mechanicky rozpoznat o dané posloupnosti formulí, zda je, či není důkazem v dané teorii. Nyní je možno podat i další motivaci: předpoklad rekurzivnosti umožní PŘELOŽIT axiomatický systém vyšetřované teorie do hobitovy řeči. Například PŘEKLADEM axiomatického systému Peanovy aritmetiky budou PŘEKLADY konečně mnoha axiomů Robinsonovy aritmetiky a *všechny hobitovy formule, které jsou tvaru axiomu indukce.* Obecněji: rekurzivní teorie $\boldsymbol{T}$ je zadána nějakým *algoritmem;* tento algoritmus vybírá za axiomy teorie $\boldsymbol{T}$ některé formule na metamatematické hladině. FORMALIZACÍ teorie $\boldsymbol{T}$ budou přesně všechny formální formule, které *týž* algoritmus vybere z formálních formulí.

Uvědomme si, že *nemůžeme* hobitovi zadat jako axiomy jeho Peanovy aritmetiky právě všechny PŘEKLADY našich axiomů Peanovy aritmetiky. Hobit by přiběhl s nějakou svojí formulí (která není PŘEKLADEM naší formule) a ptal by se: „Tvrzení ‚když vezmu tuto formuli, a ona bude platit pro nulu a bude pro ni splněn indukční předpoklad, pak platí pro všechna přirozená čísla‘ se mi líbí jako axiom Peanovy aritmetiky a ty mi ji jako axiom nezadáváš. Proč?“ My nejsme schopni pro hobita vydělit PŘEKLADY našich formulí, a tak mu nebudeme umět na jeho otázku odpovědět. Ještě jinak řečeno: Kdybychom byli schopni vnutit hobitovi PŘEKLADY axiomů Peanovy aritmetiky jako jeho axiomatický systém Peanovy aritmetiky, uměl by hobit následně rozpoznat systém všech PŘEKLADŮ našich formulí, a tak byl by schopen vydělit PŘEKLADY našich metamatematických přirozených čísel jako část svých metamatematických čísel, a tím by zjistil, že jeho metamatematická přirozená čísla nevytváří ten nejmenší možný systém s vhodnými vlastnostmi, což je však v rozporu s pojetím metamatematických přirozených čísel (v tomto případě hobitových metamatematických přirozených čísel).

5) diagonalizace jako zbytek možnosti aplikovat formuli na sebe samu

Zdůraznili jsme, že při akceptaci Russellovy koncepce odstranění paradoxů musíme zachovávat rozlišení hladin matematiky a metamatematiky. Nicméně nyní se přiblížíme až k samé hranici přestoupení tohoto příkazu. Ukážeme totiž, že formule pojednávající o SVÉ FORMALIZACI jsou povoleny. Zdůrazněme, že tyto formule nemluví o sobě, nýbrž o určitém uzavřeném termu, který je FORMALIZACÍ FORMULE — napínání možností spočívá v tom, že je povoleno zabudovat do znění formule vhodným způsobem vztah formule a JEJÍ FORMALIZACE. (Název „diagonalizace“ reflektuje, že se nejedná o vztah formule a obecného přirozeného čísla, avšak o vztah formule a přirozeného čísla, jež je *JEJÍ* FORMALIZACÍ). Přiblížíme se tedy k hranici, za kterou vznikají paradoxy, ale pokud ji nepřekročíme, paradoxy nevznikají (přesněji: přes velmi podrobná zkoumání se nepodařilo žádný nalézt, takže věříme, že se nikdy žádný neobjeví). Aplikace formule na ni samu byl „zlý pán“, který způsoboval paradoxy, aplikace formule na JEJÍ FORMALIZACI je „pokorný sluha“, který je nejdůležitějším nástrojem pro demonstraci vět o neúplnosti a mnohých dalších tvrzení.

V tomto okamžiku se dostáváme k ohlášenému vrcholu jak krásy, tak také obtížnosti našeho textu. Při prokazování první věty o neúplnosti se používají zejména původní Gödelova formule (kterou budeme značit γ) a Rosserova formule (znak ϱ). Pro usnadnění čtení budeme klíčové myšlenky popisovat dvakrát. Nejprve je budeme předkládat jako vyprávění o hobitovi, podruhé ve verzi přijatelnější z hlediska matematického vyjadřování.

6) neúplnost a Gödelova formule

Předpokládejme, že je pevně dána bezesporná rekurzivní teorie $\boldsymbol{T}$ zesilující Peanovu aritmetiku, budiž T její FORMALIZACE. Podle diagonalizace je možno vytvořit formuli γ, která má význam

„*MÁ FORMALIZACE je formálně nedokazatelná ve FORMALIZACI teorie* $\boldsymbol{T}$“.
Tuto formuli je zvykem nazývat podle jejího tvůrce **Gödelovou formulí**.

Mějme tedy dánu bezespornou rekurzivní teorii $\boldsymbol{T}$ zesilující Peanovu aritmetiku. Nejprve konstatujme, že hobit má teorii T, která je PŘEKLADEM naší teorie $\boldsymbol{T}$. Hobit si uvědomuje, že (jeho) teorie T je rozšířením (jeho) Peanovy aritmetiky.

Představme si, že $\boldsymbol{T} \vdash \gamma$, tzn. že na naší metamatematické hladině existuje důkaz formule γ v teorii $\boldsymbol{T}$. Zakódujme tento důkaz a podle druhého bodu sestrojme PŘEKLAD získaného kódu a předejme ho hobitovi spolu s doporučením, aby se na toto číslo díval jako na kód posloupnosti formulí. Hobit rozpozná, že dostal kód posloupnosti (svých) formulí, kterážto posloupnost je (v jeho pojetí) důkazem v teorii T. Poslední člen této posloupnosti je z hobitova pohledu dokazatelný v teorii T; my navíc víme, že tento poslední člen je hobitovou formulí, která je PŘEKLADEM formule γ. Takže můžeme shrnout, že hobit zjistil pravdivost tvrzení „FORMALIZACE formule γ je dokazatelná ve FORMALIZACI teorie $\boldsymbol{T}$" pro *svá* metamatematická přirozená čísla. Nyní se podívejme na znění Gödelovy formule a prostě konstatujme, že hobit nahlédl pravdivost negace Gödelovy formule.

Vyšli jsme z předpokladu $\boldsymbol{T} \vdash \gamma$ a zjistili, že *každý* hobit nahlíží pravdivost tvrzení $\neg\gamma$. Tedy v teorii $\boldsymbol{PA}$ je dokazatelná formule $\neg\gamma$, tím spíše je formule $\neg\gamma$ dokazatelná v teorii $\boldsymbol{T}$, neboť $\boldsymbol{T}$ je rozšířením Peanovy aritmetiky. Protože předpokládáme, že teorie $\boldsymbol{T}$ je bezesporná, nemůže v ní být dokazatelná současně formule γ i formule $\neg\gamma$, a jsme tedy nuceni odmítnout předpoklad $\boldsymbol{T} \vdash \gamma$.

Zopakujme nyní předchozí úvahy matematičtěji bez vyprávění příběhu o hobitech. Představme si, že $\boldsymbol{T} \vdash \gamma$, tzn. že na metamatematické hladině existuje důkaz formule γ v teorii $\boldsymbol{T}$. Předpokládaná podobnost vztahů na metamatematické hladině a na hladině matematiky zajistí, že v $\boldsymbol{PA}$ je dokazatelné, že FORMALIZACE kódu tohoto důkazu je kódem formálního důkazu FORMALIZACE formule γ ve FORMALIZACI teorie $\boldsymbol{T}$. Tedy v teorii $\boldsymbol{PA}$ a tím spíše v teorii $\boldsymbol{T}$ je dokazatelná formule „existuje formální důkaz FORMALIZACE formule γ ve FORMALIZACI teorie $\boldsymbol{T}$". Srovnáte-li tvrzení v uvozovkách se zněním formule γ, nahlédnete, že jsme prokázali $\boldsymbol{T} \vdash \neg\gamma$. Předpoklad bezespornosti teorie $\boldsymbol{T}$ zamezuje současné dokazatelnosti formule γ i formule $\neg\gamma$, pročež jsme nuceni odmítnout předpoklad $\boldsymbol{T} \vdash \gamma$.

Pro vyvrácení možnosti $\boldsymbol{T} \vdash \neg\gamma$ potřebujeme ještě dodatečný předpoklad (částečné) shody teorie $\boldsymbol{T}$ s naší intuicí o existenci přirozených čísel. Shoda má spočívat v tom, že pokud prokážeme v teorii $\boldsymbol{T}$ existenci nějakého objektu s určitou[20] vlastností ψ, pak chceme, aby dokonce existovalo *metamatematické* přirozené číslo, o němž je v přirozeném modelu $\mathbb{N}$ pravdivé, že má vlastnost ψ (v symbolech: jestliže $\boldsymbol{T} \vdash (\exists x)\psi$, pak existuje metamatematické přirozené číslo n tak, že $\mathbb{N} \models \psi(x/n)$).

Úvaha je tentokrát natolik snadná, že ji vyslovíme okamžitě v matematické verzi: předpokládejme, že v teorii $\boldsymbol{T}$ je dokazatelná negace formule γ (v symbo-

[20] Běžně se vznáší požadavek o shodě nikoli na jednu speciální formuli ψ, avšak na všechny „dostatečně jednoduché" formule a následně se prokáže, že formule, pro kterou shodu skutečně potřebujeme je „dostatečně jednoduchá".

lech $\boldsymbol{T} \vdash \neg\gamma$). Pak v teorii $\boldsymbol{T}$ je — v důsledku znění Gödelovy formule — dokazatelná formule „MÁ FORMALIZACE je formálně dokazatelná ve FORMALIZACI teorie $\boldsymbol{T}$“, tzn. v $\boldsymbol{T}$ je dokazatelná formule „existuje formální důkaz FORMALIZACE formule γ ve FORMALIZACI teorie $\boldsymbol{T}$“. Následně musí existovat (formální) kód takového formálního důkazu (úlohu formule ψ hraje „x je kódem formálního důkazu FORMALIZACE formule γ ve FORMALIZACI teorie $\boldsymbol{T}$“). Podle dodatečného předpokladu o částečné shodě teorie $\boldsymbol{T}$ s naší intuicí o existenci přirozených čísel musí existovat *metamatematický* objekt n, o němž je v přirozeném modelu $\mathbb{N}$ pravdivé, že je „kódem formálního důkazu FORMALIZACE formule γ ve FORMALIZACI teorie $\boldsymbol{T}$“. Ovšem „formální důkaz v modelu $\mathbb{N}$“ je prostě důkaz, realizací „FORMALIZACE formule γ“ v $\mathbb{N}$ je prostě formule γ sama a nakonec realizací „FORMALIZACE teorie $\boldsymbol{T}$“ v modelu $\mathbb{N}$ je opět teorie $\boldsymbol{T}$ sama. Takže o našem metamatematickém přirozeném číslu n je v přirozeném modelu $\mathbb{N}$ pravdivé, že je „kódem důkazu formule γ v teorii $\boldsymbol{T}$“. Posledně vyslovené tvrzení je však jen jiným vyjádřením faktu, že existuje důkaz formule γ v teorii $\boldsymbol{T}$ na metamatematické hladině — prokázali jsme tudíž $\boldsymbol{T} \vdash \gamma$. Pročež nás předpoklad bezespornosti teorie $\boldsymbol{T}$ nutí zavrhnout i možnost $\boldsymbol{T} \vdash \neg\gamma$.

Ukázali jsme, že Gödelova formule nemůže být ani dokazatelná, ani vyvratitelná v teorii $\boldsymbol{T}$.

Předchozí úvahy prokazují první větu o neúplnosti, mají však vadu krásy v tom, že pro vyvrácení možnosti $\boldsymbol{T} \vdash \neg\gamma$ jsme užili dodatečný předpoklad částečné shody teorie $\boldsymbol{T}$ s naší intuicí o existenci přirozených čísel. Při užití Rosserovy formule nebude třeba činit žádný dodatečný předpoklad, sama uvažovaná formule však bude o něco složitější než formule Gödelova.

7) neúplnost a Rosserova formule

Jak již bylo řečeno, Rosserova formule umožní demonstrovat (viz [Ros]) první větu o neúplnosti bez dodatečného předpokladu částečné shody teorie $\boldsymbol{T}$ s naší intuicí o existenci přirozených čísel. Dosahuje toho tím, že formule postuluje existenci meze, pod níž se by se mělo nacházet či nenacházet vše, na co se dále odvoláváme.

Ještě jednou vás musím, vážený čtenáři, varovat, že Rosserova formule je složitější než formule Gödelova (proto hned po jejím vyslovení připojujeme její výklad). Pokud vám vůbec nevadí dodatečný předpoklad částečné shody vyšetřované teorie s naší intuicí o existenci přirozených čísel užitý v předchozím bodě nebo pokud se vám bude zdát námaha vynaložená na porozumění elegantních idejí souvisejících s Rosserovou formulí přílišná, je možno tento bod přeskočit a přikročit rovnou ke čtení následujícího osmého bodu.

Rosserova formule ϱ má význam
„*existuje kód formálního důkazu FORMALIZACE mé negace ve FORMALIZACI teorie **T**, jenž je menší než každý kód formálního důkazu MÉ FORMALIZACE ve FORMALIZACI teorie **T***“.

Při prokazování první věty o neúplnosti pomocí Rosserovy formule budeme opět začínat příběhem o hobitech. PŘEKLAD teorie $\boldsymbol{T}$ označme znakem T. Pokud je vám, milý čtenáři, formulace Rosserovy formule křišťálově jasná, prosím, přeskočte zbytek tohoto odstavce. Zní-li vám formulace Rosserovy formule jako řeč ve zcela neznámém a nesrozumitelném jazyce, sledujte teď rozbor tohoto zdánlivě nesmyslného spojení slov užívající podobenství o hobitech. Pravdivost Rosserovy formule ve smyslu metamatematických přirozených čísel kteréhokoli hobita je tvrzení „*existuje kód hobitího důkazu PŘEKLADU mé negace v PŘEKLADU teorie **T**, jenž je menší než každý kód hobitího důkazu MÉHO PŘEKLADU v PŘEKLADU teorie **T***“. Rosserova formule tedy vyhlašuje, že existuje hobitův důkaz, který má dvě vlastnosti:

(a) Uvědomme si, že o každém důkazu má smysl vypovědět, jaká formule je dokazována a v jaké teorii důkaz probíhá. V případě hobitova důkazu bude dokazována hobitova formule a hobit bude dokazovat ve své teorii. Rosserova formule vyžaduje od zkoumaného *hobitova* důkazu, aby dokazoval PŘEKLAD *negace* Rosserovy formule a aby probíhal *v hobitově* teorii T, tj. v PŘEKLADU teorie $\boldsymbol{T}$.

(b) Uvedli jsme, že vyšetřovaný hobitův důkaz dokazuje PŘEKLAD *negace* Rosserovy formule. Kromě tohoto hobitova důkazu můžeme také zkoumat hobitovy důkazy jiné (hobitovy) formule, omezíme se však na důkazy v teorii T. Tou jinou hobitovou formulí budiž PŘEKLAD Rosserovy formule (nikoli PŘEKLAD její negace!). Požádáme hobita, aby vytvořil všechny své možné důkazy PŘEKLADU Rosserovy formule ve své teorii T a (pokud existují) všechny je zakódoval. Rosserova formule tvrdí, že pokud takovéto hobitovy důkazy vůbec existují, pak kódy všech takovýchto hobitových důkazů musí být větší než na počátku zvolený kód hobitova důkazu PŘEKLADU negace Rosserovy formule v hobitově teorii T.

Uvedli jsme, že Rosserova formule postuluje existenci meze. Když sledujeme znění Rosserovy formule formulované pomocí podobenství o hobitech, nahlédneme, že touto mezí je kód hobitího důkazu PŘEKLADU negace Rosserovy formule v PŘEKLADU teorie $\boldsymbol{T}$ — další objekt, o kterém Rosserova formule vypovídá, totiž (možná existující) kód hobitího důkazu JEJÍHO PŘEKLADU v PŘEKLADU teorie $\boldsymbol{T}$, se již nikdy nesmí nacházet pod touto mezí. Zapojení ideje meze je pro naše úvahy přínosem vzhledem k výše vyslovenému faktu, že každé matematické přirozené číslo menší než PŘEKLAD metamatematického přirozeného čísla je už samo PŘEKLADEM nějakého (jiného) metamatematického čísla.

Přistupme teď k prokazování první věty o neúplnosti využívajíce Rosserovu formuli. Předpokládejme nejprve, že $\boldsymbol{T} \vdash \varrho$, tzn. přijměme předpoklad, že na metamatematické hladině existuje důkaz formule ϱ v teorii $\boldsymbol{T}$. Po zakódování posloupnosti formulí vytvářejících tento důkaz dostaneme nějaké metamatematické přirozené číslo, označme ho d_ϱ. Předejme toto číslo hobitovi spolu s doporučením, aby ho chápal jako kód posloupnosti svých formulí. V důsledku principu rozumného vztahu našeho metamatematického přirozeného čísla a JEHO PŘEKLADU musí hobit nahlédnout, že dostal kód svého důkazu v teorii T. My víme, že posledním členem tohoto důkazu je PŘEKLAD formule ϱ a že hobitova teorie T je PŘEKLADEM teorie $\boldsymbol{T}$. Ukázali jsme, že popsaná situace nastává u každého hobita, tzn. že pro každého hobita je d_ϱ kódem důkazu PŘEKLADU formule ϱ v PŘEKLADU teorie $\boldsymbol{T}$.

Teď přijde klíčové místo první části prokazování. Rosserova formule tvrdí, že existuje kód hobitova důkazu PŘEKLADU negace formule ϱ v PŘEKLADU teorie $\boldsymbol{T}$, jenž je *menší* než každý kód hobitova důkazu PŘEKLADU formule ϱ v PŘEKLADU teorie $\boldsymbol{T}$; jelikož kód postulovaného hobitova důkazu má být menší než *každý* kód hobitova důkazu PŘEKLADU formule ϱ v PŘEKLADU teorie $\boldsymbol{T}$, musí být kód postulovaného hobitova důkazu PŘEKLADU negace formule ϱ speciálně menší než hobitovo metamatematické číslo d_ϱ. Zde je to místo, kde se poprvé uplatní tvar Rosserovy formule, a čtenář by měl ocenit Rosserovu formulaci přes její poměrnou složitost.

Protože kód postulovaného hobitova důkazu je *menší* než PŘEKLAD našeho metamatematického čísla d_ϱ, musí být rovněž PŘEKLADEM nějakého našeho metamatematického přirozeného čísla m (jakékoli hobitovo metamatematické číslo menší než PŘEKLAD nějakého našeho metamatematického čísla je samo PŘEKLADEM našeho metamatematického přirozeného čísla). Na základě principu rozumného vztahu metamatematického přirozeného čísla a JEHO PŘEKLADU nahlédneme, že metamatematický důkaz kódovaný číslem m je důkazem negace formule ϱ v teorii $\boldsymbol{T}$. Z předpokladu $\boldsymbol{T} \vdash \varrho$ jsme tedy odvodili $\boldsymbol{T} \vdash \neg\varrho$, což je pro bezespornou teorii $\boldsymbol{T}$ vyloučeno. Jsme tedy nuceni odmítnout předpoklad $\boldsymbol{T} \vdash \varrho$.

Zopakujme předchozí úvahy v řeči matematiky. V této první části našeho prokazování předpokládáme, že $\boldsymbol{T} \vdash \varrho$, tzn. že existuje důkaz formule ϱ v teorii $\boldsymbol{T}$; zvolme takový důkaz, jeho kód budiž metamatematické číslo d_ϱ. Předpokládaná podobnost vztahů na metamatematické hladině a na hladině matematiky zajistí, že v $\boldsymbol{PA}$ je dokazatelné, že FORMALIZACE $\overline{d_\varrho}$ fixovaného kódu je kódem formálního důkazu FORMALIZACE formule ϱ ve FORMALIZACI teorie $\boldsymbol{T}$. Následně rovněž v teorii $\boldsymbol{T}$ je dokazatelná formule „$\overline{d_\varrho}$ je kódem formálního důkazu FORMALIZACE formule ϱ ve FORMALIZACI teorie $\boldsymbol{T}$“, neboť $\boldsymbol{T}$ je rozšířením Peanovy aritmetiky. Podle znění Rosserovy formule pak musí být v teorii $\boldsymbol{T}$ dokazatelná formule „existuje kód formálního důkazu FORMALIZACE negace formule ϱ ve FORMALIZACI teorie $\boldsymbol{T}$, který je menší než $\overline{d_\varrho}$“. Protože kód tohoto formálního důkazu je *menší* než term $\overline{d_\varrho}$, musí být FORMALIZACÍ nějakého metamatematického přirozeného čísla (viz cvičení III-2.22), a to (podle principu rozumného vztahu objektu a JEHO FORMALIZACE) dokonce kódem důkazu negace formule ϱ v teorii $\boldsymbol{T}$. Z předpokladu $\boldsymbol{T} \vdash \varrho$ jsme tedy vyvodili $\boldsymbol{T} \vdash \neg\varrho$, což je pro bezespornou teorii $\boldsymbol{T}$ absurdní. Musíme proto odmítnout předpoklad $\boldsymbol{T} \vdash \varrho$.

Předpokládejme proto druhou možnost, tj. $\boldsymbol{T} \vdash \neg\varrho$. Předpoklad umožňuje fixovat důkaz negace formule ϱ v teorii $\boldsymbol{T}$. Zakódujme fixovaný důkaz, označme tento kód znakem $d_{\neg\varrho}$, PŘELOŽME ho a dejme ho hobitovi s doporučením chápat číslo, které mu předáváme, jako kód posloupnosti jeho metamatematických přirozených čísel. Na základě principu rozumného vztahu objektu a JEHO FORMALIZACE si můžeme být jisti, že hobit odhalí, že jsme mu zadali kód jeho důkazu v jeho teorii T. My víme, že posledním členem tohoto důkazu je PŘEKLAD negace formule ϱ a že hobitova teorie T je PŘEKLA-

DEM teorie $\boldsymbol{T}$. Analogicky jako v první části si uvědomme, že popsaná situace nastává u každého hobita, tzn. že každý hobit nahlíží pravdivost tvrzení „$d_{\neg\varrho}$ je kódem důkazu PŘEKLADU formule $\neg\varrho$ v PŘEKLADU teorie $\boldsymbol{T}$" pro svá metamatematická přirozená čísla.

V této chvíli je vhodné rozebrat (a opětovně ocenit) znění negace Rosserovy formule, tj. negace formule vyjadřující „existuje kód hobitova důkazu PŘEKLADU negace formule ϱ v PŘEKLADU teorie $\boldsymbol{T}$, jenž je menší než každý kód hobitova důkazu PŘEKLADU formule ϱ v PŘEKLADU teorie $\boldsymbol{T}$". Nahlédneme, že negace Rosserovy formule vyjadřuje „pro každý kód hobitova důkazu PŘEKLADU negace formule ϱ v PŘEKLADU teorie $\boldsymbol{T}$ musí existovat menší číslo, jenž je kódem hobitova důkazu PŘEKLADU formule ϱ v hobitově teorii T"; speciálně tedy musí existovat hobitův důkaz PŘEKLADU formule ϱ v hobitově teorii T, jehož kód je menší než $d_{\neg\varrho}$. Kód hobitova důkazu, jehož existenci jsme právě zdůvodnili, musí být opětovně PŘEKLADEM nějakého metamatematického přirozeného čísla (protože je menší než $d_{\neg\varrho}$ a libovolné hobitovo metamatematické číslo menší než PŘEKLAD nějakého našeho metamatematického čísla je samo PŘEKLADEM našeho metamatematického přirozeného čísla). Znovu z principu rozumného vztahu metamatematického přirozeného čísla a JEHO PŘEKLADU je zmíněné metamatematické přirozené číslo kódem důkazu formule ϱ v teorii $\boldsymbol{T}$; teď se můžeme přestat bavit o kódech a prostě konstatovat, že máme důkaz formule ϱ v teorii $\boldsymbol{T}$. Vyšli jsme z předpokladu $\boldsymbol{T} \vdash \neg\varrho$ a prokázali $\boldsymbol{T} \vdash \varrho$. Předpoklad bezespornosti teorie $\boldsymbol{T}$ nás tedy nutí zavrhnout i možnost $\boldsymbol{T} \vdash \neg\varrho$.

Tak znovu a bez hobitů. Ve druhé části našeho prokazování předpokládáme $\boldsymbol{T} \vdash \neg\varrho$, tj. předpokládáme existenci důkazu formule $\neg\varrho$ v teorii $\boldsymbol{T}$; fixujme takový důkaz, jeho kód označme $d_{\neg\varrho}$. V důsledku principu rozumného vztahu objektu a JEHO FORMALIZACE nahlédneme, že FORMALIZACE $\overline{d_{\neg\varrho}}$ fixovaného kódu je kódem formálního důkazu FORMALIZACE formule $\neg\varrho$ ve FORMALIZACI teorie $\boldsymbol{T}$. Pročež v Peanově aritmetice a tím spíše v teorii $\boldsymbol{T}$ je dokazatelná formule „$\overline{d_{\neg\varrho}}$ je kódem formálního důkazu FORMALIZACE negace formule ϱ ve FORMALIZACI teorie $\boldsymbol{T}$". Podle znění *negace* Rosserovy formule však „pro každý kód formálního důkazu FORMALIZACE negace formule ϱ musí existovat menší kód formálního důkazu FORMALIZACE formule ϱ ve FORMALIZACI teorie $\boldsymbol{T}$", a speciálně tedy musí existovat formální důkaz FORMALIZACE formule ϱ ve FORMALIZACI teorie $\boldsymbol{T}$, jehož kód je menší než $\overline{d_{\neg\varrho}}$. Kód tohoto formálního důkazu musí být opět FORMALIZACÍ nějakého metamatematického přirozeného čísla (protože je menší než $\overline{d_{\neg\varrho}}$) a princip rozumného vztahu metamatematického přirozeného čísla a JEHO FORMALIZACE nám znovu zaručí, že zkoumané metamatematické přirozené číslo je kódem důkazu formule ϱ v teorii $\boldsymbol{T}$. Předpoklad bezespornosti teorie $\boldsymbol{T}$ nás tedy nutí zavrhnout i možnost $\boldsymbol{T} \vdash \neg\varrho$.

8) nedokazatelnost formální bezespornosti

Doposud jsme Gödelovu formuli používali jen jako nástroj pro prokazování první věty o neúplnosti. Gödel však navíc ukázal její reformulaci, jež umožňuje nový pohled na možnost dokazování bezespornosti teorií.

Prokázal totiž, že v každém rekurzivním rozšíření $\boldsymbol{T}$ Peanovy aritmetiky je dokazatelná ekvivalence Gödelovy formule a formule FORMALIZACE teorie $\boldsymbol{T}$ je formálně bezesporná. Tedy[21] žádné bezesporné rekurzivní rozšíření Peanovy aritmetiky *nemá* dost prostředků, aby prokázalo formální bezespornost SVOJÍ FORMALIZACE. Je zvykem označovat podtržené tvrzení za **druhou větu o neúplnosti.**

[21] v důsledku formulace první věty o neúplnosti užívající Gödelovu formuli

Pokud jste, vážený čtenáři, přijal princip rozumného vztahu objektu a JEHO FORMALIZACE, nebudou pro vás ideje prokazující druhou větu o neúplnosti obtížnější než ideje užité při první větě o neúplnosti. V teorii $\boldsymbol{T}$ potřebujeme ukázat jednak, že z Gödelovy formule plyne formální bezespornost FORMALIZACE teorie $\boldsymbol{T}$ a jednak obrácení této implikace, tzn. že z negace Gödelovy formule plyne formální spornost FORMALIZACE teorie $\boldsymbol{T}$.

Důkaz první implikace je natolik jednoduchý, že ho předvedeme rovnou ve verzi používající výhradně matematické pojmy. Sporné teorie jsou přesně ty, ve kterých jsou dokazatelné všechny formule jazyka teorie. Není-li jediná formule jazyka teorie v ní dokazatelná, je teorie bezesporná. Přesně stejně: není-li jedna formální formule jazyka formální teorie v ní formálně dokazatelná, je formální teorie formálně bezesporná. Gödelova formule γ vypovídá, že jakási formální formule (JEJÍ FORMALIZACE) není formálně dokazatelná ve FORMALIZACI teorie $\boldsymbol{T}$. Tedy Gödelova formule implikuje formální bezespornost FORMALIZACE teorie $\boldsymbol{T}$.

Obrácenou implikaci nejprve zdůvodníme příběhem o hobitech. Žil byl jednou hobit jménem Tolkien a ten napsal knihu Pán prstenů. V ní vypráví o hobitech a hobitících a jejich společném snažení; hobitíci v příběhu hráli podstatnou úlohu, jeden z nich dokonce nesl Prsten. Nezávisle na příběhu o Prstenu popsal hobit jménem Gödel vztah metamatematických přirozených čísel hobitů a hobitíků. Uvažoval hobití teorii T, která je rekurzivní a je rozšířením hobití Peanovy aritmetiky, a vytvořil také formuli $h\gamma$ hobita Gödela, která má význam

„MOJE FORMALIZACE do řeči hobitíků je hobitíkovsky nedokazatelná ve FORMALIZACI teorie T v řeči hobitíků“.

My víme, že negace (lidské) Gödelovy formule je tvrzení na metamatematické hladině hobitů, které říká, že v hobití teorii T je dokazatelný PŘEKLAD Gödelovy formule. Navíc PŘEKLAD Gödelovy formule je právě popsaná formule hobita Gödela.

Hobit Gödel ukázal, že z předpokladu dokazatelnosti jeho formule $h\gamma$ v hobití teorii T dostane spor. (Srovnejte, milý čtenáři, následující úvahy hobita Gödela s úvahami z třetího a čtvrtého odstavce prokazování první věty o neúplnosti užívající Gödelovu formuli, přičemž posuňte úvahy o hladinu „níž“, tzn. „my lidé“ nahraďte „hobit Gödel“, slovo „PŘEKLAD“ zaměňte za slovní spojení „PŘEKLAD do řeči hobitíků“, slovo „hobit“ změňte na slovo „hobitík“ a místo „teorie T“ užijte „PŘEKLAD teorie T do řeči hobitíků“, atd.).

Hobit Gödel si představil, že hobití formule $h\gamma$ je hobitovsky dokazatelná v hobití teorii T, tzn. že na hobití metamatematické hladině existuje důkaz formule $h\gamma$ v hobití teorii T. Hobit Gödel zakódoval tento hobití důkaz a sestrojil PŘEKLAD získaného kódu do řeči hobitíků a předal ho hobitíkovi spolu s doporučením, aby se na toto číslo díval jako na kód posloupnosti svých formulí. Hobitík rozpoznal, že dostal kód posloupnosti (svých) formulí, kterážto posloupnost je (v jeho pojetí) důkazem v PŘEKLADU teorie T do řeči hobitíků. Poslední člen této posloupnosti byl z hobitíkova pohledu dokazatelný v PŘEKLADU teorie T do řeči hobitíků; hobit Gödel si navíc uvědomoval, že tento poslední člen je hobitíkovou formulí, která je PŘEKLADEM jeho formule $h\gamma$ do řeči hobitíků. Takže hobit Gödel shrnul, že hobitík zjistil pro svá metamatematická přirozená čísla pravdivost tvrzení „FORMALIZACE formule $h\gamma$ je hobitíkovsky dokazatelná ve FORMALIZACI teorie T do řeči hobitíků“. Potom se podíval na znění své formule $h\gamma$ a prostě konstatoval, že hobitík nahlédl pravdivost negace jeho formule.

Hobit Gödel vyšel z předpokladu dokazatelnosti jeho formule $h\gamma$ v teorii T a zjistili, že *každý* hobitík nahlíží tvrzení $\neg h\gamma$. Tedy v hobití Peanově aritmetice je hobitovsky dokazatelná hobití formule $\neg h\gamma$, tím spíše je hobití formule $h\gamma$ dokazatelná v teorii T, neboť T je rozšířením hobití Peanovy aritmetiky. Hobit Gödel tedy prokázal spornost hobití teorie T.

Zopakujme předchozí úvahu bez vyprávění příběhu o hobitech. Předpokládáme-li $\neg\gamma$, pak (z důvodu volby formule γ) předpokládáme, že FORMALIZACE Gödelovy formule je formálně dokazatelná ve FORMALIZACI teorie $\boldsymbol{T}$. Přijměme teorii $\boldsymbol{T}$ za svoji metamatematiku; v takovém případě můžeme všechna slova „formální“ a „FORMALIZACE“ v kurzívou psaném slovním spojení vynechat, ale z předchozího prokazování první věty o neúplnosti užívajícího Gödelovu formuli víme, že předpoklad $\boldsymbol{T} \vdash \gamma$ (tj. předpoklad, že Gödelova formule je dokazatelná v teorii $\boldsymbol{T}$) vede ke spornosti teorie $\boldsymbol{T}$. Při návratu na původní metamatematickou hladinu (po přidání slov „formální“ a „FORMALIZACE“) tedy musíme konstatovat, že v teorii $\boldsymbol{T}$ předpoklad $\neg\gamma$ implikuje formální spornost FORMALIZACE teorie $\boldsymbol{T}$.

*

V předchozím textu jsme popsali všechny podstatné myšlenky potřebné pro prokázání vět o neúplnosti; je však třeba si uvědomit, že jsme se zabývali jen těmi krásnými a zajímavými částmi. Například jsme zcela volně používali princip rozumného vztahu objektu a JEHO FORMALIZACE. Tento princip je však potřeba odůvodnit, a to je poměrně obtížná, a nadto „otrocká“ práce.

K větám o neúplnosti připojme ještě dvě poznámky:

(1) Ve větách o neúplnosti se mluví pouze o rozšířeních Peanovy aritmetiky. Výsledky jsou však aplikovatelné i na jiné teorie, dokonce i na teorie, které mají zcela jiný jazyk než aritmetika. Například aritmetiku lze vybudovat v teorii množin, a tedy ani axiomatická teorie množin není úplná teorie.

(2) Gödel a následovníci sice sestrojili formule nedokazatelné a současně nevyvratitelné v nejrůznějších matematických teoriích, ale výsledky tohoto typu vůbec nic neříkají o *konkrétních předem daných* formulích; např. nehovoří o tom, zda pátý Eukleidův postulát je dokazatelný v geometrii nebo zda hypotéza kontinua je dokazatelná v teorii množin, a tedy ideje popsané v tomto paragrafu *nemohou* nahradit (mnohdy obtížné) výsledky o nedokazatelnosti konkrétních formulí v konkrétních teoriích.

*

Na počátku paragrafu jsme nastolili otázku, zda stroj může nahradit matematika při dokazování v predikátovém počtu. Rozbor položené otázky vedl k motivaci rekurzivní teorie, avšak poté jsme místo formulace odpovědi přešli k Hilbertovu programu a k větám o neúplnosti, které zdánlivě s naším počátečním problémem nesouvisí.

Věty o neúplnosti jsou pro logiku tvrzení prvořadého významu. Nicméně i když se omezíme pouze na původně položenou otázku po vztahu matematik-stroj, ukážeme nyní, že věta o neúplnosti nebyla odbočkou, ale naopak přípravou nástroje pro řešení nastoleného problém. Na základě první věty o neúplnosti není totiž již tak obtížné ukázat, že pro *žádné* bezesporné rozšíření $\boldsymbol{T}$ Peanovy aritmetiky neexistuje algoritmus, který by rozhodoval, zda ta která formule je, či není v teorii $\boldsymbol{T}$ dokazatelná. Metodu prokazování tohoto tvrzení ukážeme za okamžik v petitem psaném textu.

Současně je třeba zdůraznit, že jsou známy i teorie s algoritmem rozhodujícím dokazatelnost formulí. Presburgerův výsledek ukazuje, že jako příklad (značně netriviální) může sloužit aritmetika, ve které uvažujeme pouze funkci následovníka a sčítání. Jiný, a to jednodušší, příklad týkající se uspořádání bude předveden v dodatku o teoriích.

Obecný algoritmus rozhodující dokazatelnost formulí tedy neexistuje — pro matematiky naštěstí, protože tím je zaručeno, že matematické věty nemůže zcela efektivně místo nich dokazovat stroj[22)], k hledání důkazů je třeba matematikova intuice.

Chceme vyvrátit, že může existovat bezesporná teorie $\boldsymbol{T}$ rozšiřující Peanovu aritmetiku spolu s algoritmem, který o každé uzavřené formuli rozhoduje, zda je, či není dokazatelná v teorii $\boldsymbol{T}$. Předpokládejme tudíž, že je zadána jak teorie $\boldsymbol{T}$, tak algoritmus s popsanými vlastnostmi. Buď $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ očíslování uzavřených formulí jazyka teorie $\boldsymbol{T}$ pomocí metamatematických přirozených čísel. (Formule jazyka teorie $\boldsymbol{T}$ jsou nějaká metamatematická přirozená čísla, my jsme si prostě očíslovali ta metamatematická čísla, která jsou uzavřenými formulemi vyšetřovaného jazyka.) Postupně budeme o každé formuli φ_n rozhodovat, jestli ji přijmeme za axiom nově vznikající teorie $\boldsymbol{S}$, nebo ne. Pro jednodušší vyjadřování si představujme, že postupně rekurzí vytváříme teorie $\boldsymbol{S}_n$ a že výsledná teorie $\boldsymbol{S}$ bude mít za axiomy přesně všechny formule, které byly přijaty za axiomy některé z teorií $\boldsymbol{S}_n$. Je zcela přirozené, že začneme s teorií $\boldsymbol{T}$, tzn. že za teorii $\boldsymbol{S}_0$ zvolíme teorii $\boldsymbol{T}$.

Nechť jsme již rozhodli, které z formulí $\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}$ za axiomy teorie $\boldsymbol{S}$ přijmeme, tj. zaujměme postoj, že jsme již sestrojili teorii $\boldsymbol{S}_n$. Nejprve nahlédněme, že (na základě předpokládaného algoritmu rozhodujícího dokazatelnost v $\boldsymbol{T}$) máme k dispozici rovněž algoritmus, jenž o každé uzavřené formuli jazyka teorie $\boldsymbol{S}_n$ rozhoduje zda je, či není dokazatelná v teorii $\boldsymbol{S}_n$. Označme ϑ konjunkci všech formulí za skupiny formulí $\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}$, které jsme přijali za dodatečné axiomy teorie $\boldsymbol{S}_n$. V důsledku důkazu dedukcí je jakákoli formule ψ dokazatelná v teorii $\boldsymbol{S}_n$, právě když je formule $\vartheta \to \psi$ dokazatelná v teorii $\boldsymbol{T}$. Takže algoritmus rozhodující o dokazatelnosti uzavřených formulí v teorii $\boldsymbol{S}_n$ je velice prostý: zeptáme se původně postulovaného algoritmu, jestli je v teorii $\boldsymbol{T}$ dokazatelná formule $\vartheta \to \psi$.

Za předpokladu, že teorie $\boldsymbol{S}_n$ již byla zkonstruována, máme sestrojit teorii $\boldsymbol{S}_{n+1}$, tj. rozhodnout, jestli za dodatečný axiom přijmeme formuli φ_n. V prvé řadě se dotážeme stroje, zda je alespoň jedna z formulí $\varphi_n, \neg\varphi_n$ v teorii $\boldsymbol{S}_n$ dokazatelná (z konstrukce bude jasné, že nemohou být dokazatelné obě najednou). Pokud nám stroj na základě výše sestrojeného algoritmu sdělí, že jedna z uvažovaných formulí je dokazatelná, nepřijmeme

[22)] Řečeným nevylučujeme, že nemůžeme nechat stroj dokazovat, ani netvrdíme, že by nám stroj nemohl napsat mnohá nová tvrzení. Pouze vyhlašujeme, že neumíme — a nikdy nikdo nebude umět — zadat algoritmus, podle kterého stroj pro každou konkrétní uzavřenou formuli po určité době buďto prohlásí, že formule je dokazatelná, nebo oznámí, že je nedokazatelná.

formuli φ_n jako nový axiom, tzn. ztotožníme teorii $\boldsymbol{S}_{n+1}$ s teorií $\boldsymbol{S}_n$. Pokud algoritmus rozhodne, že žádná z formulí $\varphi_n, \neg\varphi_n$ není dokazatelná v teorii $\boldsymbol{S}_n$, přijmeme formuli φ_n jako dodatečný axiom, tj. definujeme $\boldsymbol{S}_{n+1}$ jako teorii $\boldsymbol{S}_n, \varphi_n$.

Rozhodujícím pozorováním pro celou konstrukci je nahlédnout, že každá z teorií $\boldsymbol{S}_n$ je bezesporná. To se prokazuje pochopitelně indukcí; teorie $\boldsymbol{S}_0$, tj. teorie $\boldsymbol{T}$, je bezesporná podle předpokladu. Přistupme k prokázání indukčního kroku a předpokládejme bezespornost teorie $\boldsymbol{S}_n$. Pokud je $\boldsymbol{S}_{n+1}$ totožná s teorií $\boldsymbol{S}_n$, není co dokazovat. Uvědomme si, že nutným předpokladem pro přidání formule φ_n jakožto dodatečného axiomu teorie $\boldsymbol{S}_{n+1}$ byla nedokazatelnost formule $\neg\varphi_n$ v teorii $\boldsymbol{S}_n$. Kdyby teorie $\boldsymbol{S}_{n+1}$ byla sporná, byla by v ní, tzn. v teorii $\boldsymbol{S}_n, \varphi_n$, dokazatelná formule $\neg\varphi_n$. Nadto v teorii $\boldsymbol{S}_n, \neg\varphi_n$ je formule $\neg\varphi_n$ dokazatelná zcela triviálně jakožto axiom této teorie. Podle důkazu neutrální formulí nahlédneme, že již v samotné teorii $\boldsymbol{S}_n$ by pak musela být dokazatelná formule $\neg\varphi_n$, což odporuje našim předpokladům.

Ukázali jsme, že každá z teorií $\boldsymbol{S}_n$ je bezesporná. Vyvodit nyní bezespornost celé teorie $\boldsymbol{S}$ je snadné — kdyby $\boldsymbol{S}$ byla sporná, musela by být sporná již teorie mající konečně mnoho jejích axiomů, takže by pro jakési vhodné n musela být sporná teorie $\boldsymbol{S}_n$, což jsme vyloučili.

Teorie $\boldsymbol{S}$ je bezesporná a je evidentně rozšířením Peanovy aritmetiky, protože již počáteční teorie $\boldsymbol{S}_0$, tj. teorie $\boldsymbol{T}$, byla rozšířením Peanovy aritmetiky. Popsali jsme algoritmus vybírající axiomy teorie $\boldsymbol{S}$ (na základě předpokládaného algoritmu rozhodujícího o dokazatelnosti v teorii $\boldsymbol{T}$), pročež teorie $\boldsymbol{S}$ je rekurzivní. Teorie $\boldsymbol{S}$ musí být navíc také úplná: Kdyby žádná z formulí $\varphi_n, \neg\varphi_n$ nebyla dokazatelná v teorii $\boldsymbol{S}$, nebyla by žádná z nich dokazatelná ani v teorii $\boldsymbol{S}_n$, takže by φ_n byla axiomem teorie $\boldsymbol{S}_{n+1}$, tudíž by byla φ_n axiomem teorie $\boldsymbol{S}$, a následně by byla v $\boldsymbol{S}$ dokazatelná.

Teorie $\boldsymbol{S}$ s uvedenými vlastnostmi nemůže existovat podle první věty o neúplnosti. Musíme proto odmítnout předpoklad existence bezesporné teorie $\boldsymbol{T}$ rozšiřující Peanovu aritmetiku, k níž existuje algoritmus, který o každé formuli rozhoduje zda je, či není dokazatelná v teorii $\boldsymbol{T}$.

*

Na závěr zopakujme, že v běžné matematice hledáme důkazy tvrzení na základě přijatých axiomů. V minulém paragrafu jsme nahlédli, že je možno ukázat, že důkaz nemůže existovat. Tento typ výsledků o nedokazatelnosti ještě nezpochybňuje naši víru v lidské možnosti — ve většině případů si prostě představíme, že jsme ještě systémem axiomů nepopsali situaci dostatečně podrobně a že je zapotřebí přidat dodatečný axiom. V tomto paragrafu jsme však dokonce popsali konstrukce, které ke *každé* „vhodně popsané a dostatečně silné“ bezesporné teorii sestrojí tvrzení, které nejsme schopni v uvažované teorii ani dokázat, ani vyvrátit — a toto již *musíme vyložit jako principiální omezenost deduktivní metody* neboli volněji řečeno jako neschopnost lidského rozumu uchopit (poznat a popsat) pomocí „vhodně popsané“ teorie mnohé oblasti (např. aritmetiku intuitivních přirozených čísel) *v celé jejich šíři.*

Gödelův výsledek o neúplnosti tudíž vyvolává současně hrdost i pokoru: hrdost nad tím, jak daleko může jít lidské poznání — až tak daleko, že dokáže poznat své meze — a poznání mezí by zase mělo být zdrojem pokory.

CVIČENÍ

III-2.1 Pokud existuje člověk, který má nejvíce světových rekordů, má jich alespoň o dva více než druhý v pořadí. Proč?

III-2.2 Další paradox z antické doby vytvořený Stoiky je **paradox krokodýla,** který můžeme formulovat následovně: Krokodýl unesl dítě a slibuje matce, že ho vrátí, právě když odpoví po pravdě na otázku „Vrátím dítě?“. Doporučili byste zoufalé matce odpověď „ano“, nebo odpověď „ne“?

III-2.3 Sofista Prótagorás[23)] (5. stol. př. Kr.) prý vyučoval žáka jménem Euathlos. Dohodli se, že Euathlos zaplatí polovinu peněz hned a polovinu po vítězství v prvním soudním sporu. Po skončení studia však Euathlos žádný soudní spor nevedl a nezaplatil proto svému učiteli zbylou část peněz. Jak Prótagorás získá druhou polovinu peněz?

V právě uzavíraném paragrafu byla velmi podstatná samovztažná tvrzení, v našem textu jsme se však poprvé jimi začali podrobněji zabývat už v příkladu 2 z prvního paragrafu první kapitoly. Připojme ještě tři problémy (přetlumočené z [Sm1]), které jsou podobné problémům z citovaného paragrafu. Budete se v nich snažit sdělit že (a) někdy mluvíte pravdu a někdy lžete, nebo (b) vždy mluvíte pravdu, nebo nikdy pravdu neříkáte. Doufám, že pouhé tři problémy připomenou dostatečně samovztažnost v hádankách tohoto typu.

III-2.4 Jaký nejmenší počet výroků vám postačí, abyste přesvědčili ostatní, že někdy mluvíte pravdu a někdy lžete? Můžete systém výroků vyhovující předchozímu požadavku volit tak, aby všechny výroky v systému byly pravdivé? Lze systém výroků vyhovující požadavku první věty vybrat tak, aby všechny výroky v systému byly nepravdivé?

III-2.5 Nyní máte nalézt výrok, který přesvědčí ostatní, že někdy mluvíte pravdu a někdy lžete, avšak navíc takový, že nikdo nebude vědět, zda výrok je pravdivý či nikoli.

III-2.6 Jaký nejmenší počet výroků vám postačí, abyste přesvědčili ostatní, že vždy mluvíte pravdu, nebo vždy lžete?

III-2.7 Porciina pravnučka[24)] se rozhodla zachovat možnost matčiných „ozvláštněných“ nápisů, usmyslela si však, že úkolů bude celá řada a úspěšný nápadník musí postupně obstát ve všech (na druhé straně si pravnučka Porcie uvědomovala, že se časy změnily, a již nežádala od nápadníků přísahu, že se v případě neúspěchu nikdy neožení). Úkoly rozvrhla do čtyř dnů, pro první dva dny připravovala pouze po dvou skřínkách pro jeden úkol, pro třetí den skřínky tři.

[23)] Pro svou knihu O bozích začínající slovy „O bozích nevím, ani zda jsou, ani zda nejsou.“ byl vypovězen z Athén.

[24)] Úlohy o pravnučce Porcie jsou převážně inspirovány kap. IV [Ga1]; řazeny jsou do třetí kapitoly, protože u mnohých z nich obsah skřínek neovlivňuje jen pravdivostní hodnoty nápisů nacházejících se na jednotlivých skřínkách, avšak ovlivňuje dokonce zadání hádanky v tom smyslu, že na uložení podobizny závisí, jaké pravdivostní hodnoty nápisů na skřínkách jsou pro řešení požadovány.

Nápadníky však upozornila, že může v těchto prvních dnech dát podobiznu do více skřínek, nebo nechat všechny prázdné, zcela podle svého uvážení a nálady. Úkolem každého nápadníka v prvních třech dnech bylo, aby přesně popsal, co je v té které skřínce, nikoli pouze vybral skřínku s podobiznou. Na závěrečný den připravovala Porciina pravnučka zcela osobitou zkoušku.

První den pravnučka naplánovala čtyři zkoušky. V prvém případě nápadníkovi oznámila, že jeden nápis je pravdivý a druhý nepravdivý:

zlatá	stříbrná
Podobizna je v této skřínce a stříbrná skřínka je prázdná.	Podobizna je v jedné skřínce a druhá skřínka je prázdná.

III-2.8 Při druhé zkoušce sdělila Porciina pravnučka nápadníkovi, že buďto oba nápisy jsou pravdivé, nebo oba nepravdivé:

zlatá	stříbrná
Alespoň v jedné skřínce je portrét.	Zlatá skřínka je prázdná.

III-2.9 Rovněž při třetí zkoušce se nápadník dověděl, že buďto oba nápisy jsou pravdivé, nebo oba nepravdivé:

zlatá	stříbrná
Tato skřínka je prázdná a ve stříbrné skřínce je podobizna.	Podobizna je ve zlaté skřínce.

III-2.10 Při poslední zkoušce prvního dne došlo oproti předchozí zkoušce k jediné změně: na zlaté skřínce slovíčko „nebo“ nahradilo slůvko „a“ a nápis na zlaté skřínce tedy zněl „Tato skřínka je prázdná nebo ve stříbrné skřínce je podobizna.“ (zadání, že buďto jsou oba nápisy pravdivé, nebo jsou oba nepravdivé, zůstalo zachováno). Měl nápadník změnit svou odpověď?

III-2.11 Druhý den Porciina pravnučka podstatně změnila pravidla zkoušek, a to na celý den (cvičení III-2.11–III-2.15). Stanovila totiž, že bude-li ve zlaté skřínce podobizna, bude nápis na ní pravdivý a bude-li zlatá skřínka prázdná, bu de nápis na ní nepravdivý. O stříbrné skřínce prohlásila pravý opak: bude-li ve stříbrné skřínce podobizna, bude nápis na ní nepravdivý a bude-li stříbrná skřínka prázdná, bude nápis na ní pravdivý. Pak přivedla nápadníka ke skřínkám s nápisy uvedenými vpravo.

zlatá	stříbrná
V obou skřínkách jsou podobizny.	V obou skřínkách jsou podobizny.

III-2.12

zlatá	stříbrná
Alespoň v jedné skřínce je portrét.	Portrét je ve zlaté skřínce.

III-2.13

zlatá	stříbrná
Je jedno, kterou skřínku zvolíš.	Portrét je ve zlaté skřínce.

III-2.14

zlatá	stříbrná
Na volbě skřínky velice záleží.	Portrét je ve zlaté skřínce.

III-2.15 Teprve při poslední zkoušce druhého dne se situace podstatně změnila. K této zkoušce postoupilo již jen málo nápadníků a tito nápadníci byli velice překvapeni, když při devátém příchodu našli skřínky bez nápisů. Porciina pravnučka poté podala udiveným nápadníkům dvě tabulky s nápisy „Tato skřínka je prázdná.“ a „Obě skřínky jsou prázdné.“. Na pochopitelnou otázku, který nápis patří na kterou skřínku, odpovídala, že součástí úlohy je také rozhodnout, zda na tom záleží. Představujte si, že Porciina pravnučka opravdu stojí za namáhání mozku, a tak hledejte řešení i pro takto neobvykle formulovanou hádanku.

III-2.16 Třetí den přiváděla pravnučka Porcie nápadníky již ke třem skřínkám a při prvních dvou úkolech vyhlašovala, že všechny nápisy jsou buďto pravdivé, nebo všechny nepravdivé. Naproti tomu o počtu uložených podobizen se prý nic nepředpokládá.

zlatá	stříbrná	olověná
Podobizna není v olověné skřínce.	Podobizna není ve zlaté skřínce nebo je v této skřínce.	Podobizna je ve stříbrné skřínce a také je v této skřínce.

III-2.17 Pro druhý úkol se zadání nezměnilo.

zlatá	stříbrná	olověná
Nezáleží na tom, kterou skřínku vybereš.	Podobizna je ve zlaté skřínce nebo je v této skřínce.	Podobizna není v této skřínce.

Navíc se každého nápadníka, který uspěl při všech předchozích úkolech, pravnučka Porcie zeptala, zda by se jeho řešení změnilo, kdyby při posledním úkolu bylo na olověné skřínce zaměněno slůvko „není“ slovíčkem „je“, tzn. kdyby nápis zněl „Podobizna je v této skřínce.“.

III-2.18 Při třetím úkolu změnila pravnučka Porcie zadání tak, že přesně jedna skřínka obsahuje podobiznu a nápis na ní je pravdivý; na druhých dvou skřínkách je alespoň jeden nápis nepravdivý.

zlatá	stříbrná	olověná
Stříbrná skřínka je prázdná.	Tato skřínka je prázdná.	Zlatá skřínka je prázdná.

III-2.19 Čtvrtý den byl nápadník (po strašně dlouhé době se konečně jednomu podařilo vyřešit všechny hádanky prvních tří dnů) doveden dokonce k devíti skřínkám, které byly označeny číslicemi. Nápadníkovým jediným úkolem bylo otevřít skřínku s podobiznou, popis obsahu ostatních skřínek se nevyžadoval. Bylo mu sděleno, že podobizna té, o kterou se uchází, je přesně v jedné skřínce a na této skřínce je pravdivý nápis. Další skřínky mohou být prázdné a na těchto skřínkách jsou nápisy nepravdivé; poslední možností je, že se ve skřínkách nacházejí dopisy na rozloučenou a nápisy na těchto skřínkách mohou být jak pravdivé, tak i nepravdivé. Nápadníkovi netrvalo dlouho a prohlásil, že za těchto okolností nelze jednoznačně rozhodnout, kde se nachází podobizna (naleznete alespoň dvě různá možná řešení?). S tímto prohlášením pravnučka Porcie souhlasila a navrhla nápadníkovi, ať se zeptá tak, aby jej odpověď přiblížila k jednoznačnému řešení. Ovšem na otázku, zda osmá skřínka obsahuje dopis na rozloučenou, se jen šibalsky usmála a odvětila, že pravdivá odpověď by již sama o sobě umožnila jednoznačné řešení a odmítla cokoli dalšího dodat. Myslíte, že má nápadník i po takovéto odpovědi-neodpovědi šanci získat svou vyvolenou nepoužívaje nic jiného než logické úvahy?

I	II	III
Podobizna je ve skřínce s lichým číslem.	Tato skřínka obsahuje dopis na rozloučenou.	Nápis na skřínce V je pravdivý nebo je nepravdivý nápis na skřínce VII.

IV	V	VI
Nápis na skřínce I je nepravdivý.	Nápis na skřínce II je pravdivý nebo je pravdivý nápis na skřínce IV.	Nápis na skřínce III je nepravdivý.

VII	VIII	IX
Ve skříňce I není podobizna.	Tato skřínka je prázdná a skřínka IX obsahuje dopis.	Tato skřínka je prázdná a nápis na skříňce VI je nepravdivý.

Následující tři cvičení ukazují příklady toho, co by bylo zapotřebí ukázat, abychom prokázali princip rozumného vztahu metamatematického přirozeného čísla a JEHO FORMALIZACE — naprosto však nezachycují vše potřebné (např. bychom také museli ukázat, že pro dvě různá metamatematická přirozená čísla n, m je dokazatelné $\overline{n} \neq \overline{m}$ a mnohé jiné). Výsledek cvičení III-2.22 je zcela klíčový pro prokazování věty o neúplnosti pomocí Rosserovy formule, neboť implikace zleva doprava zachycuje princip „číslo menší než FORMALIZACE nějakého metamatematického přirozeného čísla je samo také FORMALIZACÍ nějakého metamatematického přirozeného čísla“.

III-2.20 V Robinsonově aritmetice dokažte $\overline{n} + \overline{m} = \overline{n+m}$.
(Uvědomte si, že např. pro $n = 2$ a $m = 3$ tvrdíme

$$\boldsymbol{RA} \vdash \mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathit{0})) + \mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathit{0}))) = \mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathit{0}))))).)$$

Návod: *metamatematickou*[25] indukcí podle metamatematického přirozeného čísla m při fixovaném čísle n. Pro $m = 0$ užijte axiom **RA4** a definici FORMALIZACE metamatematického čísla 0; při prokazování indukčního kroku použijte definici FORMALIZACE metamatematického následovníka a axiom **RA5.**

III-2.21 V teorii $\boldsymbol{RA}$ dokažte $\overline{n} \cdot \overline{m} = \overline{n \cdot m}$.
(Uvědomte si, že např. pro $n = 2$ a $m = 3$ tvrdíme

$$\boldsymbol{RA} \vdash \mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathit{0})) \cdot \mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathit{0}))) = \mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathit{0})))))).)$$

Návod: *metamatematickou*[25] indukcí podle metamatematického přirozeného čísla m při fixovaném čísle n. Pro $m = 0$ užijte axiom **RA6** a definici FORMALIZACE metamatematického čísla 0; pro prokázání indukčního kroku požijte výsledek předchozího cvičení, axiom **RA7** a definici FORMALIZACE metamatematického následovníka.

III-2.22 V Robinsonově aritmetice dokažte

$$x \leq \overline{n} \equiv (x = \overline{0} \vee x = \overline{1} \vee \ldots \vee x = \overline{n-1} \vee x = \overline{n}).$$

Návod: pro implikaci zprava doleva si uvědomte, že disjunkty jsou tvaru $x = \overline{m}$, kde m menší nebo rovno n, uvažujte rozdíl čísel $n - m$ a použijte cvičení III-2.20 a axiom **RA8.** Opačnou implikaci dokazujte metamatematickou indukcí

[25] Formulace cvičení žádá důkaz v teorii $\boldsymbol{RA}$, aby bylo hned jasné, že nelze dokazovat matematickou indukcí, která není v teorii $\boldsymbol{RA}$ k dispozici.

podle n. Pro případ $n = 0$ užijte formuli (ra3) dokázanou v předchozím paragrafu. Pro prokázání indukčního kroku předpokládejte nejprve navíc $x \neq \mathsf{o}$, užijte axiom **RA3** a formuli (ra4) z minulého paragrafu a následně indukční předpoklad.

§3

DODATEK O TEORIÍCH

Je řada teorií, které popisují algebraické vlastnosti jednotlivých struktur čísel, např. teorie pologrup, teorie grup, teorie okruhů a teorie těles. Jako příkladem se budeme zabývat teorií grup, protože to je pravděpodobně nejdůležitější z algebraických teorií, její význam již přesáhl do řady oblastí matematiky, své aplikace má i ve fyzice. Současně se jedná o velice jednoduchou teorii, je možno dokonce říci, že její význam spočívá právě v její jednoduchosti.

Jazyk **teorie grup**[1] obsahuje jedinou binární funkci $\cdot$ a jednu konstantu $\mathtt{1}$ (a kromě toho „povinný" predikát rovnosti), přičemž **axiomy** jsou **asociativita násobení**, **charakterizace konstanty** $\mathtt{1}$ a **existence inverzního prvku**

$$(\forall x, y, z)[x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z]$$
$$(\forall x)(x \cdot \mathtt{1} = x = \mathtt{1} \cdot x)$$
$$(\forall x)(\exists y)(x \cdot y = \mathtt{1} = y \cdot x).$$

Teorie Abelových grup vznikne z teorie grup přidáním axiomu komutativity násobení

$$(\forall x, y)(x \cdot y = y \cdot x).$$

Množina přirozených (metamatematických) čísel s násobením jakožto realizací funkce $\cdot$ jazyka teorie grup (a s realizací konstanty $\mathtt{1}$ číslem 1) je modelem teorie s prvními dvěma axiomy, nikoli však modelem teorie grup (neexistují inverzní prvky). Modelem teorie Abelových grup je jednak množina (metamatematických) celých čísel se sčítáním (konstantu $\mathtt{1}$ realizujeme číslem 0, inverzním prvkem k celému číslu q je číslo $-q$) a jednak množina kladných racionálních čísel s násobením (konstantu $\mathtt{1}$ realizujeme číslem 1; inverzním prvkem k číslu q je číslo $1/q$).

Je modelem teorie Abelových grup množina kladných reálných čísel s násobením a vhodně realizovanou konstantou $\mathtt{1}$? — ANO, konstantu realizujeme číslem 1. Je modelem teorie grup množina všech reálných čísel s násobením a konstantou $\mathtt{1}$ realizovanou číslem 1? — NE, k číslu 0 neexistuje inverzní prvek. Jak máme realizovat konstantu $\mathtt{1}$, aby množina všech reálných čísel se sčítáním byla modelem teorie grup? Je to model teorie Abelových grup? — $\mathtt{1}$ realizujeme číslem 0, jedná se o model s komutativitou.

Úloha 1. Je možné realizovat konstantu $\mathtt{1}$ a funkci násobení na jednoprvkovém univerzu $\{\mathfrak{a}\}$ a získat takto model teorie grup? Kolik modelů teorie grup je možno sestrojit na dvouprvkovém univerzu $\{\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1\}$? Jsou všechny tyto struktury modely teorie Abelových grup?

---

[1] viz např. srozumitelně napsanou knížku [Al]

[u1] Na jednoprvkovém univerzu $\{\mathfrak{a}\}$ struktury $\mathbb{G}_1$ musí být konstanta $\mathtt{1}$ realizována indivi-

Úloha 2. V teorii grup dokažte formuli

$$(i) \qquad (\forall x)(\forall y_1, y_2)[(x \cdot y_1 = \mathtt{1} = y_2 \cdot x) \rightarrow y_1 = y_2].$$

a vyvoďte z ní, že inversní prvek je určen jednoznačně.

Úloha 3. Ukažte, že jazyk teorie grup je možno obohatit o funkci x^{-1} přiřazující libovolnému prvku prvek k němu inverzní. (Návod: ověřte podmínku z konce §2 kap. II.) Nahlédněte, že inversním prvkem k $\mathtt{1}$ je on sám, tzn. dokažte v teorii grup obohacené o funkci x^{-1} rovnost $\mathtt{1}^{-1} = \mathtt{1}$. Ověřte, že inverzním prvkem k inverznímu prvku je výchozí prvek, tj. v citované teorii dokažte rovnost $(x^{-1})^{-1} = x$.

Úloha 4. Na k-prvkovém univerzu $\{\mathfrak{a}_0, \dots, \mathfrak{a}_{k-1}\}$ struktury $\mathbb{G}_k$ realizujme konstantu $\mathtt{1}$ individuem $\mathfrak{a}_0$. Nechť $\mathfrak{a}_n \cdot_{\mathbb{G}_k} \mathfrak{a}_{n'}$ je individuum $\mathfrak{a}_m$ takové, že m je zbytek čísla $n + n'$ po dělení číslem k. (Tedy např. pro $k = 4$ je $\mathfrak{a}_2 \cdot_{\mathbb{G}_4} \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{a}_1$, neboť $2 + 3 = 4 + 1$; násobení pro případ $k = 3$ ukazuje tabulka vpravo.)

$\cdot_{\mathbb{G}_3}$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_2$
$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_2$
$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_0$
$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_1$.

Tabulka 1

Prokažte, že popsaná struktura $\mathbb{G}_k$ je modelem teorie Abelových grup a uvědomte si, že struktury popsané v první úloze jsou speciálním případem právě popsané konstrukce struktur pro případ $k = 1, 2$.

duem $\mathfrak{a}$ a pro násobení musí platit rovnost $\mathfrak{a} \cdot_{\mathbb{G}_1} \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$. Pak evidentně

$$\mathfrak{a} \cdot_{\mathbb{G}_1} (\mathfrak{a} \cdot_{\mathbb{G}_1} \mathfrak{a}) = \mathfrak{a} \cdot_{\mathbb{G}_1} \mathfrak{a} = (\mathfrak{a} \cdot_{\mathbb{G}_1} \mathfrak{a}) \cdot_{\mathbb{G}_1} \mathfrak{a};$$

inverzním prvkem k individuu $\mathfrak{a}$ je toto individuum samo. Popsaná struktura je modelem teorie grup a násobení je komutativní.

Pokud ve struktuře $\mathbb{G}_2$ s dvouprvkovým univerzem $\{\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1\}$ realizujeme konstantu $\mathtt{1}$ individuem $\mathfrak{a}_0$, je nutně $\mathfrak{a}_0 \cdot_{\mathbb{G}_2} \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1 \cdot_{\mathbb{G}_2} \mathfrak{a}_0$ a dále potřeba pravdivosti axiomu charakterizujícího konstantu $\mathtt{1}$ ve struktuře $\mathbb{G}_2$ si vynutí $\mathfrak{a}_0 \cdot_{\mathbb{G}_2} \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_0$. Nadto $\mathfrak{a}_1 \cdot_{\mathbb{G}_2} \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_0$, neboť inverzním prvkem k $\mathfrak{a}_1$ může být jen on sám. Násobení je proto v modelu teorie grup s dvouprvkovým univerzem určeno jednoznačně zadáním realizace konstanty $\mathtt{1}$ a je komutativní.

u2) Předpokládáme-li rovnosti $x \cdot y_1 = \mathtt{1} = y_2 \cdot x$, získáme z nich navíc rovněž rovnosti $y_2 = y_2 \cdot \mathtt{1} = y_2 \cdot (x \cdot y_1) = (y_2 \cdot x) \cdot y_1 = \mathtt{1} \cdot y_1 = y_1$. Pokud by y_1, y_2 byly dva inversní prvky k objektu x, byly by k dispozici rovnosti $x \cdot y_1 = \mathtt{1} = y_1 \cdot x$ a současně také rovnosti $x \cdot y_2 = \mathtt{1} = y_2 \cdot x$.

u3) K zavedení funkce je potřeba existence a jednoznačnost hodnoty, tj. v našem případě existence a jednoznačnost inverzního prvku; existence je zaručena axiomem a jednoznačnost byla prokázána v předchozí úloze. Již sama formulace axiomu charakterizujícího konstantu $\mathtt{1}$ zajišťuje, že inverzním prvkem k $\mathtt{1}$ je tento prvek sám. Rovnosti $x^{-1} \cdot x = \mathtt{1} = x \cdot x^{-1}$ potřebné k tomu, aby x byl inverzním prvkem k x^{-1} jsou zaručeny faktem, že x^{-1} je inverzním prvkem k x.

u4) Axiom charakterizující konstantu $\mathtt{1}$ je zřejmě splněn, neboť pro každé $n \leq k-1$ je zbytek po dělení čísla $n + 0$ číslem k samo číslo n. K individuu $\mathfrak{a}_i$ (kde $0 < i < k - 1$) je inverzním prvkem individuum $\mathfrak{a}_{k-i}$. Ověření asociativity může na první pohled budit zdání nesmyslného shluku slov, avšak po rozebrání je triviální: zbytek součtu tří čísel po dělení číslem k je stejný jako číslo, které získáme když sečteme dvě čísla, zjistíme zbytek po dělení číslem k, přičteme k němu třetí číslo a znovu vypočteme zbytek po dělení číslem k. Přímo z definice nahlédněte, že násobení v naší struktuře je komutativní.

Úloha 5. Na tříprvkovém univerzu $\{\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2\}$ nalezněte všechny modely teorie grup realizující konstantu $\mathtt{1}$ individuem $\mathfrak{a}_0$. Je splněna ve všech těchto modelech komutativita násobení?

* * *

Jazyk často užívané **teorie uspořádání** obsahuje (kromě rovnosti) jediný binární predikát $\leq$ a jediný druh proměnných, řekněme $x, y, \ldots$ Axiomy zaručují reflexivitu, slabou antisymetrii a tranzitivitu predikátu $\leq$, tzn. za axiomy přijímáme formule (pa6)–(pa8) z prvního paragrafu. Tyto formule nyní vůbec nesouvisí s aritmetikou, snad však dovolíte, vážený čtenáři, abychom neměnili označení uvedených formulí. Přidáme-li k axiomům teorie uspořádání ještě axiom (pa9) zaručující srovnatelnost libovolných dvou objektů, dostáváme tzv. **teorii lineárního uspořádání.** Podle první části prvního paragrafu naší kapitoly víme tedy, že o predikátu $\leq$ (zavedeném axiomem-definicí **RA8**) je v Peanově aritmetice dokazatelné, že vyhovuje axiomům teorie lineárního uspořádání, avšak podle druhé části téhož paragrafu víme rovněž, že v Robinsonově aritmetice není o predikátu $\leq$ dokazatelná ani jedna z formulí (pa6)–(pa9). V prvém paragrafu jsme

---

[u5] Násobení individuem $\mathfrak{a}_0$ realizujícím konstantu $\mathtt{1}$ je určeno jednoznačně (požadavkem, aby ve struktuře byl pravdivý axiom charakterizující konstantu $\mathtt{1}$) a je zapsáno v prvním sloupci a prvním řádku tabulek A a B. Pokud by inverzním prvkem k $\mathfrak{a}_1$ bylo samo toto individuum, muselo by být analogicky $\mathfrak{a}_2$ svým inverzním prvkem (v důsledku výsledků úlohy 2). Tato možnost je popsána v tabulce A. Naproti tomu v tabulce B je popsán případ, že inverzním prvkem k $\mathfrak{a}_1$ je individuum $\mathfrak{a}_2$ (následně pak inverzním prvkem k $\mathfrak{a}_2$ je individuum $\mathfrak{a}_1$). Chceme zjistit, zda můžeme doplnit tabulky A a B tak, aby popisovaly modely teorie grup a navíc aby doplnění tabulky B bylo různé od tabulky 1.

$\cdot_{\mathfrak{G}}$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_2$
$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_2$
$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_0$	
$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$		$\mathfrak{a}_0$

Tabulka A

$\cdot_{\mathfrak{G}}$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_2$
$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_2$
$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$		$\mathfrak{a}_0$
$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_0$	

Tabulka B

Při doplňování tabulky A nelze součin $\mathfrak{a}_1 \cdot_{\mathfrak{G}} \mathfrak{a}_2$ definovat jako individuum $\mathfrak{a}_0$, neboť tím bychom získali rovnosti $\mathfrak{a}_1 \cdot_{\mathfrak{G}} \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_1 \cdot_{\mathfrak{G}} \mathfrak{a}_1$, což je ve sporu s formulí (i). Nemůžeme však ani položit $\mathfrak{a}_1 \cdot_{\mathfrak{G}} \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_1$, protože bychom z rovností

$$\mathfrak{a}_1 \cdot_{\mathfrak{G}} (\mathfrak{a}_1 \cdot_{\mathfrak{G}} \mathfrak{a}_2) = \mathfrak{a}_1 \cdot_{\mathfrak{G}} \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_0 \quad \text{a rovností} \quad (\mathfrak{a}_1 \cdot_{\mathfrak{G}} \mathfrak{a}_1) \cdot_{\mathfrak{G}} \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_0 \cdot_{\mathfrak{G}} \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_2$$

obdrželi spor s asociativitou násobení. Poslední možnost definice $\mathfrak{a}_1 \cdot_{\mathfrak{G}} \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_2$ vylučuje snaha po asociativitě a rovnosti

$$\mathfrak{a}_1 \cdot_{\mathfrak{G}} (\mathfrak{a}_2 \cdot_{\mathfrak{G}} \mathfrak{a}_2) = \mathfrak{a}_1 \cdot_{\mathfrak{G}} \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_1 \quad \text{spolu s rovnostmi} \quad (\mathfrak{a}_1 \cdot_{\mathfrak{G}} \mathfrak{a}_2) \cdot_{\mathfrak{G}} \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_2 \cdot_{\mathfrak{G}} \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_0.$$

Takže tabulku A nelze doplnit a získat tím model s asociativitou.

Tabulku B zkusme nejprve doplnit rovností $\mathfrak{a}_1 \cdot_{\mathfrak{G}} \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1$. Při této definici obdržíme rovnost

$$\mathfrak{a}_1 \cdot_{\mathfrak{G}} (\mathfrak{a}_1 \cdot_{\mathfrak{G}} \mathfrak{a}_2) = \mathfrak{a}_1 \cdot_{\mathfrak{G}} \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_1 \quad \text{a rovněž rovnost} \quad (\mathfrak{a}_1 \cdot_{\mathfrak{G}} \mathfrak{a}_1) \cdot_{\mathfrak{G}} \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_1 \cdot_{\mathfrak{G}} \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_0,$$

což opět odporuje požadavku asociativity násobení. Zcela analogicky vyloučíme možnost dodefinování součinu $\mathfrak{a}_2 \cdot_{\mathfrak{G}} \mathfrak{a}_2$ rovností $\mathfrak{a}_2 \cdot_{\mathfrak{G}} \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_2$. Z důvodu jednoznačnosti inverzního prvku (viz druhou úlohu) není možné položit ani $\mathfrak{a}_1 \cdot_{\mathfrak{G}} \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_0$ ani $\mathfrak{a}_2 \cdot_{\mathfrak{G}} \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_0$. Pročež vyžadujeme-li asociativitu, je vyloučeno doplnit tabulku B jiným způsobem než do tabulky 1.

již uvedli, že první tvrzení zaručuje, že jakékoli tvrzení dokazatelné o predikátu $\leq$ v teorii lineárního uspořádání je dokazatelné i v Peanově aritmetice.

Pochopitelně si můžeme položit otázku, zda jsme naopak v popisu teorie lineárního uspořádání již zachytili vše, co je o predikátu $\leq$ dokazatelné v Peanově aritmetice, tzn. zda libovolná formule jazyka uspořádání je dokazatelná v teorii lineárního uspořádání, právě když je dokazatelná v Peanově aritmetice. Zkuste, vážený čtenáři, uhodnout odpověď. — Odpověď je pochopitelně „ne“. Za okamžik vás požádám o formulaci tří formulí, z nichž dvě mohou sloužit jako protipříklad.

Připouštím, že byste, vážený čtenáři, mohl v tomto okamžiku považovat za vhodnější zařadit právě zkoumanou problematiku do prvního paragrafu, kde jsme se zabývali dokazatelností a nedokazatelností formulí v Robinsonově a Peanově aritmetice. Jedná se však jen přípravné úvahy, které nám umožní definovat teorii hustého lineárního uspořádání bez koncových prvků, kterou se budeme podrobněji zabývat v dalším textu.

Úloha 6. Zapište formulí, že uspořádání $\leq$ nemá nejmenší prvek. Je tato formule nebo její negace dokazatelná v Peanově nebo dokonce v Robinsonově aritmetice?

Úloha 7. Napište formuli vyjadřující že uspořádání $\leq$ nemá největší prvek. Je tato formule dokazatelná v Peanově nebo docela v Robinsonově aritmetice?

Úloha 8. Vyjádřete formulí, že v uspořádání $\leq$ mezi každými dvěma různými srovnatelnými prvky existuje další prvek (tzv. hustotu uspořádání). Je tato formule nebo její negace dokazatelná v Peanově nebo dokonce v Robinsonově aritmetice?

Teorie hustého lineárního uspořádání bez koncových prvků je teorie lineárního uspořádání (tj. teorie s axiomy (pa6)–(pa9)) obohacená o axiomy

$$(\forall x)[(\exists y)\neg x \leq y \ \&\ (\exists z)\neg z \leq x]$$
$$(\forall x, y)[(x \leq y \ \&\ x \neq y) \rightarrow (\exists z)(x \leq z \ \&\ z \leq y \ \&\ z \neq x \ \&\ z \neq y)].$$

---

u6) Velmi přirozeným zápisem požadovaného tvrzení jest formule $(\forall x)(\exists y)\neg x \leq y$ (nebo rovněž formule $(\forall x)(\exists y)(y \leq x \ \&\ x \neq y)$, tyto formule jsou v teorii lineárního uspořádání ekvivalentní). V ***RA*** je dokazatelná negace uvedené formule, tj. formule $(\exists x)(\forall y)(x \leq y)$ v důsledku dokazatelnosti formule (ra3).

u7) Přirozeným vyjádřením neexistence největšího prvku se jeví formule $(\forall x)(\exists y)\neg y \leq x$ (nebo formule $(\forall x)(\exists y)(x \leq y \ \&\ x \neq y)$; tyto formule jsou v teorii lineárního uspořádání ekvivalentní). Sestrojená formule je dokazatelná v Peanově aritmetice, neboť komutativita sčítání zaručí $\mathfrak{S}(0) + x = x + \mathfrak{S}(0) = \mathfrak{S}(x + 0) = \mathfrak{S}(x)$, z čehož vyvodíme $x \leq \mathfrak{S}(x)$. K získání $\neg\mathfrak{S}(x) \leq x$ následně stačí aplikovat (pa7) a (pa14). Struktura $\mathbb{O}_1$ z prvního paragrafu prokazuje nedokazatelnost naší formule v ***RA***.

u8) Za hledanou formuli může posloužit např. zápis

$$(\forall x, y)[(x \leq y \ \&\ x \neq y) \rightarrow (\exists z)(x \leq z \ \&\ z \leq y \ \&\ z \neq x \ \&\ z \neq y)].$$

Negace zmíněné formule je dokazatelná v Robinsonově aritmetice protože v důsledku (ra3), (ra5) a III-2.22 máme

$$0 \leq \mathfrak{S}(0) \ \&\ 0 \neq \mathfrak{S}(0) \ \&\ (\forall x)[x \leq \mathfrak{S}(0) \rightarrow (x = 0 \vee x = \mathfrak{S}(0))].$$

Modely teorie hustého lineárního uspořádání bez koncových prvků jsou např. struktury uspořádání racionálních a reálných čísel; struktura uspořádání celých čísel $\mathbb{Z}$ je modelem lineárního uspořádání bez koncových prvků, není však hustá a struktury uspořádání racionálních a reálných čísel větších nebo rovných 0 a menších nebo rovných 1 jsou modely teorie hustého lineárního uspořádání, avšak tyto struktury mají (oba) koncové prvky. Zkuste rozhodnout, zda modely naší teorie jsou struktury uspořádání racionálních a reálných čísel větších než 0 a menších než 1. — Už jste se rozhodl? — Odpověď je „ano“.

* * *

Vraťme se teď na chvíli k problematice zkoumané ve druhém paragrafu, kde jsme ukázali, že neexistuje žádné rekurzivní rozšíření Peanovy aritmetiky, které by bylo úplné. V citovaném paragrafu jsme také uvedli, že existují rozšíření Peanovy aritmetiky, které mají jednu ze zbývajících dvou vlastností: teorie aritmetiky intuitivních přirozených čísel (neboli teorie s jazykem aritmetiky a soustavou axiomů tvořených systémem formulí, které jsou pravdivé v přirozeném modelu) je úplná a na druhé straně Peanova aritmetika sama o sobě je rekurzivní. Avšak dosud jsme podrobněji nezkoumali otázku, zda existuje rekurzivní úplná teorie. Konstatovali jsme sice, že takovouto teorií je např. Presburgerova aritmetika, současně jsme ale uvedli, že prokázání její úplnosti je natolik obtížné, že se o ně nebudeme v našem textu pokoušet.

Stojíme tudíž před problémem nalézt teorii, o jejíž úplnosti a rekurzivnosti se budeme schopni přesvědčit. K tomu účelu vyšetřujme nejprve velmi jednoduchou „teorii jednoho prvku“ $\boldsymbol{T}1$. Tato teorie bude mít jazyk neobsahující žádný mimologický symbol (takže jediným predikátem je rovnost) a její axiomatický systém je sestaven z jediné formule $(\forall x, y)(x = y)$.

V dalším nás bude zajímat, zda pro každou dvojici modelů nějaké zkoumané teorie vznikne jeden model přeznačením individuí druhého modelu.

Přestože by pojem „přeznačením individuí“ měl být intuitivně zřejmý, definujme ho podrobněji a současně poznamenejme, že běžněji v matematice užíváme pojem „struktury jsou izomorfní“:

Jsou-li $\mathbb{M}_1, \mathbb{M}_2$ struktury pro nějaký jazyk $\mathbf{L}$, pak budeme říkat, že struktura $\mathbb{M}_2$ vznikne přeznačením individuí struktury $\mathbb{M}_1$, jestliže existuje vzájemně jednoznačné zobrazení F množiny M_1 na množinu M_2, které zachovává všechny realizace pojmů jazyka $\mathbf{L}$, tedy například pro binární predikát $\leq$ vyžadujeme, aby $\mathbb{M}_1 \models \mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$, právě když $\mathbb{M}_2 \models F(\mathfrak{a}) \leq F(\mathfrak{b})$ a pro binární funkci $+$ požadujeme, aby $\mathbb{M}_1 \models \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, právě když $\mathbb{M}_2 \models F(\mathfrak{a}) + F(\mathfrak{b}) = F(\mathfrak{c})$.

Uvědomme si, že rovnost není pojmem jazyka, takže jsme nevznesli na zachování její realizace žádný požadavek. To je však v pořádku, neboť vztah $\mathbb{M}_1 \models \mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, právě když $\mathbb{M}_2 \models F(\mathfrak{a}) = F(\mathfrak{b})$ je již prostě důsledkem předpokladu, že F je vzájemně jednoznačné zobrazení a faktu, že rovnost je realizována skutečnou rovností. I na tomto nepodstatném detailu se nám ukazuje, že je smysluplné nezahrnovat rovnost do jazyka.

Pokud máme dvě struktury, z nichž druhá vznikne přeznačením individuí prvé, musí v těchto strukturách být pravdivé tytéž uzavřené formule[2)].

Příklad 1. Pro každou dvojici modelů teorie $\boldsymbol{T}1$ vznikne jeden přeznačením individua druhého. Takže v libovolných dvou strukturách teorie $\boldsymbol{T}1$ jsou pravdivé tytéž uzavřené formule, teorie je úplná.

Pro ukázání prvního tvrzení není téměř co prokazovat. Z předpokladu $\mathbb{M}_1 \models (\forall x, y)(x = y)$ musí nutně být M_1 jednoprvkovou množinou, řekněme $M_1 = \{\mathfrak{a}\}$. Analogicky existuje $\mathfrak{b}$ tak, že $M_2 = \{\mathfrak{b}\}$ pročež stačí definovat zobrazení F definicí $F(\mathfrak{a}) = \mathfrak{b}$.

I prokázání druhého tvrzení je velice jednoduché. Představme si, že máme jakousi uzavřenou formuli φ jazyka bez mimologického symbolu takovou, že není ani $\boldsymbol{T}1 \vdash \varphi$, ani $\boldsymbol{T}1 \vdash \neg\varphi$. Pak jak teorie $\boldsymbol{T}1, \neg\varphi$, tak také teorie $\boldsymbol{T}1, \varphi$ jsou bezesporné a tudíž podle věty o úplnosti mají modely. Druhý model vznikne přeznačením individua prvního modelu, v obou modelech platí proto tytéž uzvřené formule, což je ve sporu s naším předpokladem, že v prvním platí formule $\neg\varphi$ a ve druhém formule φ. Takže teorie $\boldsymbol{T}1$ je je úplná.

*

Zatím jsme uvedli dvě rekurzivní úplné teorie. Teorie $\boldsymbol{T}1$ je triviální, neboť popisuje svět s jediným objektem. Naproti tomu prokázání úplnosti Presburgerovy aritmetiky jsme prohlásili za příliš obtížné pro náš text. Potřebujeme proto vhodnou teorii, kde prokázání úplnosti nebude přespříliš obtížné a která bude netriviální (požadujme např. aby její modely měly nekonečná univerza). Jistě již, milý čtenáři, odhadujete, že jako příklad takové teorie autor zvolil teorii hustého lineárního uspořádání bez koncových prvků. Uvedená teorie je zcela jistě rekurzivní teorií, neboť má pouze šest axiomů. Univerzum každého modelu je nekonečné, protože každá lineárně uspořádaná konečná množina má největší (a také nejmenší) prvek.

Konstrukce z následujícího příkladu prokazuje úplnost naší teorie. Tato konstrukce je zařazena do textu nejen jako prostředek prokázání jednoho konkrétního tvrzení, avšak zejména z důvodu, že předvádí jednu z často užívaných matematických metod, tzv. metodu zig-zag (správně česky snad tam a zpět, anglicky back

[2)] Tvrzení je velice názorné, pokud někdo trvá na podrobném předvedení, nezbude mu než předpokládat existenci vzájemně jednoznačného zobrazení F s popsanými vlastnostmi a dokazovat metamatematickou indukcí podle složitosti formule $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$, že pro libovolná individua $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ prvé struktury máme $\mathbb{M}_1 \models \varphi[\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n]$, právě když $\mathbb{M}_2 \models \varphi[F(\mathfrak{a}_1), \ldots, F(\mathfrak{a}_n)]$. Nejsložitější, a přesto velice jednoduchý je indukční krok pro kvantifikaci: Jestliže $\mathbb{M}_1 \models (\exists x)\varphi[\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n]$, pak existuje alespoň jednou individuum $\mathfrak{a}$ takové, že $\mathbb{M}_1 \models \varphi[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n]$ a indukční předpoklad nám zaručí pravdivost $\mathbb{M}_2 \models \varphi[F(\mathfrak{a}), F(\mathfrak{a}_1), \ldots, F(\mathfrak{a}_n)]$, pročež $\mathbb{M}_2 \models (\exists x)\varphi[F(\mathfrak{a}_1), \ldots, F(\mathfrak{a}_n)]$. Je-li naopak $\mathbb{M}_2 \models (\exists x)\varphi[F(\mathfrak{a}_1), \ldots, F(\mathfrak{a}_n)]$, existuje alespoň jedno individuum $\mathfrak{b}$ struktury $\mathbb{M}_2$ takové, že $\mathbb{M}_2 \models \varphi[\mathfrak{b}, F(\mathfrak{a}_1), \ldots, F(\mathfrak{a}_n)]$. Zobrazení F je zobrazením *na* M_2, existuje tedy individuum $\mathfrak{a}$, jež je vzorem individua $\mathfrak{b}$ (tj. $F(\mathfrak{a}) = \mathfrak{b}$), a pro toto $\mathfrak{a}$ tudíž máme $\mathbb{M}_2 \models \varphi[F(\mathfrak{a}), F(\mathfrak{a}_1), \ldots, F(\mathfrak{a}_n)]$, což podle indukčního předpokladu opět implikuje $\mathbb{M}_1 \models \varphi[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n]$ a následně dostáváme $\mathbb{M}_1 \models (\exists x)\varphi[\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n]$.

and forth). Konstrukce užívající tuto metodu probíhají v postupných krocích, přičemž v první části jednoho kroku se staráme o jeden systém objektů (v našem případě o univerzum prvního modelu) a ve druhé části téhož kroku o druhý systém objektů (v našem případě o univerzum druhého modelu). Nebudeme se pokoušet o přesnou obecnou definici, z předvedeného příkladu bude lépe vidět, o co se jedná.

Příklad 2. Předpokládejme, že máme dva modely $\mathbb{M}_1$, $\mathbb{M}_2$ teorie hustého lineárního uspořádání bez koncových prvků a nechť jejich universa jsou po řadě množiny

$$M_1 = \{\mathfrak{a}_n; n \text{ je metamatematické přirozené číslo}\}$$
$$M_2 = \{\mathfrak{b}_n; n \text{ je metamatematické přirozené číslo}\}$$

a že pro různá metamatematická čísla n, m jsou od sebe různá jak individua $\mathfrak{a}_n, \mathfrak{a}_m$, tak také individua $\mathfrak{b}_n, \mathfrak{b}_m$. Ukážeme, že model $\mathbb{M}_2$ vznikne přeznačením individuí modelu $\mathbb{M}_1$. Následně nahlédneme, že teorie hustého lineárního uspořádání bez koncových prvků je úplná.

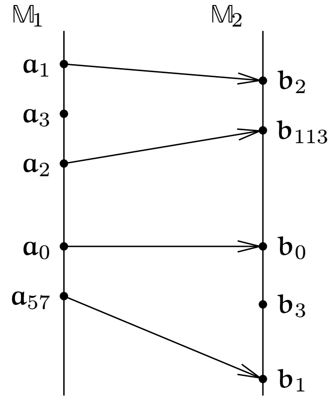

Diagram 1

Žádané zobrazení F budeme sestrojovat rekurzí postupně v krocích. Konstrukci zahájíme tím, že individuu $\mathfrak{a}_0$ struktury $\mathbb{M}_1$ přiřadíme individuum $\mathfrak{b}_0$ struktury $\mathbb{M}_2$, tj. položíme $F(\mathfrak{a}_0) = \mathfrak{b}_0$. V prvém kroku se budeme starat o individuum $\mathfrak{a}_1$ struktury $\mathbb{M}_1$ a o individuum $\mathfrak{b}_1$ struktury $\mathbb{M}_2$. Individua $\mathfrak{a}_0$ a $\mathfrak{a}_1$ jsou ve smyslu modelu $\mathbb{M}_1$ srovnatelná ($\mathbb{M}_1$ je modelem *lineárního* uspořádání), tedy buďto máme $\mathbb{M}_1 \models \mathfrak{a}_0 \leq \mathfrak{a}_1$, nebo $\mathbb{M}_1 \models \mathfrak{a}_1 \leq \mathfrak{a}_0$; v souhlase s diagramem 1 předpokládejme první případ. Protože ve smyslu modelu $\mathbb{M}_2$ neexistuje poslední prvek, musí existovat individuum $\mathfrak{b}$ takové, že $\mathbb{M}_2 \models \mathfrak{b}_0 \leq \mathfrak{b}\ \&\ \mathfrak{b}_0 \neq \mathfrak{b}$. Abychom dosáhli jednoznačnosti, zvolme to individuum s uvedenou vlastností, které má nejmenší index. Podle našeho diagramu takováto volba vybrala individuum $\mathfrak{b}_2$. Individuu $\mathfrak{a}_1$ tedy přiřadíme individuum $\mathfrak{b}_2$, tj. položíme $F(\mathfrak{a}_1) = \mathfrak{b}_2$. V druhé části prvního kroku se máme postarat o individuum $\mathfrak{b}_1$ a pro toto individuum podle prvního diagramu máme $\mathbb{M}_2 \models \mathfrak{b}_1 \leq \mathfrak{b}_0$. Protože ve smyslu modelu prvního modelu není individuum $\mathfrak{a}_0$ nejmenší, můžeme zvolit individuum $\mathfrak{a}$, pro které jest $\mathbb{M}_1 \models \mathfrak{a} \leq \mathfrak{a}_0\ \&\ \mathfrak{a} \neq \mathfrak{a}_0$; opět pro určitost zvolíme z individuí s popsanou vlastností to, jež má nejmenší index — diagram tvrdí, že takováto volba vybere individuum $\mathfrak{a}_{57}$. Takže definujeme $F(\mathfrak{a}_{57}) = \mathfrak{b}_1$.

Ve druhém kroku je naší povinností se postarat o individua $\mathfrak{a}_2$ a $\mathfrak{b}_2$. Diagram ukazuje, že ve smyslu prvního modelu se individuu $\mathfrak{a}_2$ nachází mezi individui $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1$ (v symbolech $\mathbb{M}_1 \models \mathfrak{a}_0 \leq \mathfrak{a}_2\ \&\ \mathfrak{a}_2 \leq \mathfrak{a}_1$) a je od nich různé. Individuu $\mathfrak{a}_2$ chceme přiřadit to individuum $\mathfrak{b}$ s nejmenším indexem, pro které máme

$$\mathbb{M}_2 \models \mathfrak{b}_0 \leq \mathfrak{b}\ \&\ \mathfrak{b} \leq \mathfrak{b}_1\ \&\ \mathfrak{b}_0 \neq \mathfrak{b}\ \&\ \mathfrak{b} \neq \mathfrak{b}_1.$$

První diagram oznamuje, že takovýmto individuem je $\mathfrak{b}_{113}$; definujeme proto $F(\mathfrak{a}_2) = \mathfrak{b}_{113}$. Ve druhé části druhého kroku se máme zabývat individuem $\mathfrak{b}_2$. Toto individuum je však již zobrazením F jakémusi individuu modelu $\mathbb{M}_1$ přiřazeno, pročež v této části konstrukce již *nemusíme nic vykonat*.

Ve třetím kroku si nejprve uvědomíme, že podle našeho diagramu předpokládáme $\mathbb{M}_1 \models \mathfrak{a}_2 \leq \mathfrak{a}_3\ \&\ \mathfrak{a}_3 \leq \mathfrak{a}_1$ a přiřadíme individuu $\mathfrak{a}_3$ to individuum $\mathfrak{b}$, které má nejmenší index z těch, jež splňují $\mathbb{M}_2 \models \mathfrak{b}_{113} \leq \mathfrak{b}$ & $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{b}_2$ & $\mathfrak{b}_{113} \neq \mathfrak{b}$ & $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{b}_2$. Takováto volba je možná v důsledku hustoty uspořádání ve druhém modelu. Zcela analogicky najdeme individuum $\mathfrak{a}$, jež má nejmenší index z těch, které splňují

$$\mathbb{M}_1 \models \mathfrak{a}_{57} \leq \mathfrak{a} \,\&\, \mathfrak{a} \leq \mathfrak{a}_0 \,\&\, \mathfrak{a}_{57} \neq \mathfrak{a} \,\&\, \mathfrak{a} \neq \mathfrak{a}_0$$

a tomuto individuu přiřadíme individuum $\mathfrak{b}_3$.

Nejpozději v n-tém kroku se postaráme o individua $\mathfrak{a}_n, \mathfrak{b}_n$, každému individuu z prvního modelu je proto přiřazeno zobrazením F právě jedno individuum druhého modelu, každé individuum druhého modelu má vzor při zobrazení F a zobrazení F zachovává uspořádání. Sestrojením zobrazení s těmito vlastnostmi jsme prokázali, že libovolný spočetný model teorie hustého lineárního uspořádání bez koncových prvků vznikne z kteréhokoli jiného spočetného modelu téže teorie přeznačením individuí.

K prokázání úplnosti teorie hustého lineárního uspořádání bez koncových prvků nyní stačí zopakovat úvahu ze závěru prvního příkladu, avšak s malým doplňkem. Předpokládejme, že uzavřená formule φ jazyka teorie uspořádání není v teorii hustého lineárního uspořádání bez koncových prvků ani dokazatelná, ani vyvratitelná. V takovém případě jsou jak teorie hustého lineárního uspořádání bez koncových prvků s formulí $\neg\varphi$ jakožto dodatečným axiomem, tak také teorie hustého lineárního uspořádání bez koncových prvků s dodatečným axiomem φ bezesporné a tudíž podle věty o úplnosti mají po řadě modely $\mathbb{M}_1$ a $\mathbb{M}_2$. Přitom podle dodatku k větě o úplnosti (viz §2 kap. II, tzv. Löwenheim-Skolemova věta) můžeme navíc předpokládat, že oba modely jsou nejvýše spočetné, tj. že je možno individua každého z nich očíslovat přirozenými čísly. K očíslování nestačí přirozená čísla menší než pevně dané přirozené číslo, již jsme totiž konstatovali, že žádný model teorie hustého lineárního uspořádání bez koncových prvků není konečný. Modely $\mathbb{M}_1, \mathbb{M}_2$ jsou proto tvaru popsaného v zadání příkladu a jeden tudíž vznikne přeznačením individuí druhého. Takže v nich platí tytéž uzavřené formule, což je ve sporu s naším původním předpokladem. Teorie hustého lineárního uspořádání bez koncových prvků je úplná.

* * *

V prvním paragrafu jsme sestrojili řadu modelů Robinsonovy aritmetiky a v několika z nich jsme dokonce prozkoumali vlastnosti realizace predikátu $\leq$. Zjistili jsme, že v různých modelech ***RA*** má realizace predikátu zcela různé vlastnosti, některé případy byly popsány v diagramech 2–6. Naproti tomu vlastnosti realizací predikátu $\leq$ v modelech Peanovy aritmetiky jsme vůbec nezkoumali a nyní hodláme ukázat, že se tak stalo z dobrého důvodu — všechny realizace predikátu $\leq$ ve spočetných modelech ***PA*** jsou si podobné.

Nejprve si uvědomme, že následovník $\mathfrak{S}(x)$ čísla x v Peanově aritmetice je následovník také ve smyslu uspořádání, tj. $\mathfrak{S}(x)$ je ostře větší než x a mezi prvky x a $\mathfrak{S}(x)$ se již další prvek nenachází — v symbolech

$$(ii) \qquad x \leq \mathfrak{S}(x) \,\&\, x \neq \mathfrak{S}(x) \,\&\, \neg(\exists y)[x \leq y \,\&\, y \leq \mathfrak{S}(x) \,\&\, x \neq y \,\&\, y \neq \mathfrak{S}(x)].$$

Úloha 9. Dokažte formuli (ii) v Peanově aritmetice. Návod: Pro dokázání závěrečného konjunktu užijte (pa10) a (ra1).

[u9] Nerovnost $x \leq \mathfrak{S}(x)$ plyne podle **RA8** z rovností $\mathfrak{S}(0) + x = x + \mathfrak{S}(0) = \mathfrak{S}(x+0) = \mathfrak{S}(x)$;

Zkoumejme jedno pevně zvolené nestandardní individuum $\mathfrak{a}$ v modelu $\mathbb{M}$ Peanovy aritmetiky. Uvažme množinu („výsek“) $Z_{\mathfrak{a}}$, jež se skládá z tohoto individua, jeho následovníka, následovníka jeho následovníka atd. a dále z jeho předchůdce, předchůdce jeho předchůdce atd. Jinými slovy prvky „výseku“ $Z_{\mathfrak{a}}$ jsou všechna individua tvaru $\mathfrak{S}_{\mathbb{M}}(\ldots \mathfrak{S}_{\mathbb{M}}(\mathfrak{a})\ldots)$ a všechna individua $\mathfrak{b}$, pro které je $\mathfrak{S}_{\mathbb{M}}(\ldots \mathfrak{S}_{\mathbb{M}}(\mathfrak{b})\ldots) = \mathfrak{a}$, kde počet znaků $\mathfrak{S}_{\mathbb{M}}$ je jakékoli (metamatematické) přirozené číslo — ještě jednou totéž: jsou to individua tvaru $\mathfrak{a} +_{\mathbb{M}} n$ a tvaru $\mathfrak{a} -_{\mathbb{M}} n$, kde n je (metamatematické) přirozené číslo. „Výsek“ $Z_{\mathfrak{a}}$ je pomocí realizace predikátu $\leq$ v modelu $\mathbb{M}$ uspořádán naprosto stejně jako jsou uspořádána celá čísla $\mathbb{Z}$ (každé celé číslo má následovníka i předchůdce).

Takže kolem každého nestandardního individua jsou další individua uspořádána stejně jako jsou uspořádána celá čísla $\mathbb{Z}$ kolem 0. Abychom popsali uspořádání zadané realizací predikátu $\leq$ musíme ještě vyšetřit, jak jsou vzájemně uspořádány[3)] tyto „výseky“ podobné celým číslům. Ukážeme, že tyto „výseky“ určené nestandardními přirozenými čísly jsou ve spočetném modelu Peanovy aritmetiky uspořádány jako racionální čísla.

Nejprve si uvědomme, že neexistuje poslední „výsek“, neboť pro každé nestandardní individuum $\mathfrak{a}$ je „výsek“ $Z_{2\cdot_{\mathbb{M}}\mathfrak{a}}$ větší než „výsek“ $Z_{\mathfrak{a}}$ (protože pro každé přirozené číslo n je $\mathfrak{a} +_{\mathbb{M}} n$ ve smyslu modelu ostře menší než $2 \cdot_{\mathbb{M}} \mathfrak{a}$). Zcela analogicky neexistuje nejmenší „výsek“ určený nestandardním individuem: pro každé sudé nestandardní individuum $\mathfrak{a}$ existuje individuum $\mathfrak{b}$ (opět nestandardní) takové, že $\mathfrak{a} = 2 \cdot_{\mathbb{M}} \mathfrak{b}$ a „výsek“ $Z_{\mathfrak{b}}$ je menší než „výsek“ $Z_{\mathfrak{a}}$ (protože pro každé přirozené číslo n je $\mathfrak{b} +_{\mathbb{M}} n$ ve smyslu modelu ostře menší než $2 \cdot_{\mathbb{M}} \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$). Tentokrát však musíme ještě uvážit, že alespoň jedno z čísel $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{a} +_{\mathbb{M}} 1$ je sudé (viz příklad 14 z prvního paragrafu první kapitoly) a že individua $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{a} +_{\mathbb{M}} 1$ určují týž „výsek“ (v symbolech $Z_{\mathfrak{a}} = Z_{\mathfrak{a}+_{\mathbb{M}}1}$). Jako poslední fakt nahlédněme, že „výseky“ jsou uspořádány hustě. Pro libovolná dvě sudá nestandardní individua $\mathfrak{a} \leq_{\mathbb{M}} \mathfrak{b}$ (určující *různé* „výseky“ $Z_{\mathfrak{a}}$ a $Z_{\mathfrak{b}}$) lze totiž zvolit individuum $\mathfrak{c}$ tak, že $\mathbb{M} \models \mathfrak{c} = \frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{2}$ a pro takové $\mathfrak{c}$ je „výsek“ $Z_{\mathfrak{c}}$ mezi „výseky“ $Z_{\mathfrak{a}}$ a $Z_{\mathfrak{b}}$. Pro každé metamatematické přirozené číslo n je totiž $\mathfrak{a} +_{\mathbb{M}} n$ ve smyslu modelu $\mathbb{M}$ ostře menší než $\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{2}$ a $\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{2} +_{\mathbb{M}} n$ je ve smyslu modelu ostře menší než $\mathfrak{b}$).

Uspořádání individuí pomocí realizace predikátu $\leq$ v *každém* spočetném nestandardním modelu Peanovy aritmetiky popisuje následující diagram. Na počátku jsou intuitivní přirozená čísla (standardní model $\mathbb{N}$). Za ním následují „výseky“, které jsou uspořádány jako racionální čísla (v diagramu indexujeme individua, která určují jednotlivé „výseky“, racionálními čísly 0, 1, -1, 1/2, -1/2,

nerovnost $x \neq \mathfrak{S}(x)$ je formulí (pa14). Je-li $x \leq y \;\&\; y \leq \mathfrak{S}(x)$, existují v důsledku **RA8** u, v tak, že $u + x = y$ a $v + y = \mathfrak{S}(x)$. V takovém případě je $v + u + x = \mathfrak{S}(x) = \mathfrak{S}(0) + x$ (viz rovnosti výše), a tedy $v + u = \mathfrak{S}(0)$ podle (pa10). Předpokládáme-li $u \neq 0$, musí existovat w takové, že $\mathfrak{S}(w) = u$, pak však $\mathfrak{S}(v + w) = v + \mathfrak{S}(w) = \mathfrak{S}(0)$ a následně $v + w = 0$ (dle **RA2**). Tvrzení (ra1) zaručuje v tomto případě $v = 0$. Ukázali jsme $u = 0 \vee v = 0$, tj. $x = y \vee y = \mathfrak{S}(x)$.

3) Definice uspořádání „výseků“ chápejte intuitivně, přesně bychom definovali, že „výsek“ $Z_{\mathfrak{a}}$ je menší nebo roven „výseku“ $Z_{\mathfrak{b}}$, jestliže $\mathfrak{a}$ je ve smyslu modelu $\mathbb{M}$ menší nebo rovno $\mathfrak{b}$. (Rovnost $Z_{\mathfrak{a}} = Z_{\mathfrak{b}}$ však neimplikuje $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.)

...). Možnost uspořádat „výseky“ jako racionální čísla je důsledkem výsledku příkladu 2 tohoto paragrafu.

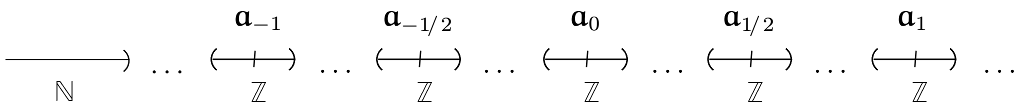

Diagram 2

Na závěr jedno důrazné varování: fakt, že všechny realizace predikátu $\leq$ ve spočetných modelech Peanovy aritmetiky jsou si podobné vůbec nic neříká o tom, zda jsou si podobné spočetné modely Peanovy aritmetiky. Popis pomocí následovníka, sčítání a násobení je mnohem komplexnější (přináší podstatně více informací) než pouhé uspořádání definované na základě sčítání. Je možno ukázat, že spočetných (tj. „malých“) modelů Peanovy aritmetiky, které jsou na sebe nepřevoditelné přeznačením individuí, je strašně moc (tato množina je nespočetná, neboli je tak veliká, že nemůže být indexována přirozenými čísly).[4] Takže vlastnosti funkcí následovníka, součtu a součinu nelze redukovat na uspořádání.

* * *

Za „nejslabší“ teorii popisující dostatečně komplexně nekonečno se pokládá vhodná forma aritmetiky, neboli aritmetika bývá považována za „nejslabší“ teorii nekonečné matematiky. Na zcela opačné konci stojí teorie množin, protože celou matematiku je možno vybudovat uvnitř vhodně formulované teorie množin, takže teorie množin představuje „nejsilnější“ z běžných teorií. Nejobvyklejší axiomatizace teorie množin je Zermelo-Fraenkelova teorie, k jejímuž popisu teď přistoupíme. Účelem závěru paragrafu je pouze předložit axiomatiku Zermelo-Fraenkelovy teorie množin, abychom viděli, že je možno zvolit poměrně malý počet principů a vrcholem naší snahy bude naznačit význam těchto principů a na jednom jediném příkladu předvést jejich souhru. Nebudeme se však ani pokoušet pokročit dále v rozvíjení základů teorie množin a zájemce odkazujeme na hezky napsané úvodní pasáže knihy [B-Š].

Jazyk teorie množin se skládá z jediného binárního predikátu $\in$ (současně smíme podle naší dohody používat i predikát rovnosti). Jako proměnné probíhající množiny je zvykem používat znaky $x, y, z, \ldots$ Formuli $x \in y$ čteme „x je prvkem množiny y“. Za axiomy **Zermelo-Fraenkelovy teorie množin *ZF*** se přijímají následující formule **ZF1– ZF3, ZF5, ZF6** a formule ze schématu **ZF4:**

ZF1 $\qquad (\forall x, y)[(\forall q)(q \in x \equiv q \in y) \equiv x = y];$

tato formule se nazývá **axiom extenzionality.** Pro vysvětlení jejího významu je klíčové si uvědomit smysl podformule $(\forall q)(q \in x \equiv q \in y)$, jež vypovídá, že x

[4] Existenci dvou (a dokonce nekonečně mnoha) na sebe nepřeveditelných modelů Peanovy aritmetiky si můžete jednoduše prokázat na podkladě Gödelovy věty o neúplnosti aritmetiky; prokázat tvrzení v plné síle vyžaduje další ideje.

a y mají přesně tytéž prvky, tj. nelze je rozlišit pomocí náležení do nich. Axiom tedy vyhlašuje, že dvě množiny jsou si rovny, mají-li tytéž prvky. Takže v teorii množin nemůže rozlišit množiny nic jiného než náležení, jinými slovy: množinu ztotožňujeme se systémem jejích prvků.

Formule

ZF2 $$(\forall x)(\exists z)(\forall q)[q \in z \equiv (\exists u)(q \in u \,\&\, u \in x)];$$

se jmenuje **axiom sjednocení** (používá se také *sumy*). Řekli jsme, že množinu x chápeme jako systémem jejích prvků, můžeme však vytvořit také systém prvků prvků množiny x, tj. systém všech objektů q s vlastností $(\exists u)(q \in u \,\&\, u \in x)$. A náš axiom vyžaduje, aby tento systém byl nějakou množinou z. Zdůrazněme, že ne každý systém objektů, který nás napadne, je množinou; pouze vhodně vytvořené systémy přijímáme jako množiny. A axiom sjednocení vypovídá, že systém prvků prvků jakékoli množiny je vhodně vytvořený systém.

Podformule $(\forall q)[q \in z \equiv (\exists u)(q \in u \,\&\, u \in x)]$ říká, že z je systémem prvků prvků množiny x. Pro každé x je existence takovéto množiny z zaručena axiomem sjednocení a na druhé straně je takováto množina určena jednoznačně na základě axiomu extenzionality. Podle úvah z konce druhého paragrafu kap. II můžeme jazyk teorie množin obohatit o *unární* funkci sjednocení, jež každé množině x přiřazuje množinu $\bigcup x$ všech prvků prvků množiny x. Vám, milý čtenáři, je však pravděpodobně mnohem známější binární funkce $x \cup y$, která dvěma množinám x a y přiřazuje množinu obsahující všechny objekty, které jsou prvky množiny x *nebo* množiny y (tzv. sjednocení množin x a y). Nahlédněte, že za předpokladu existence množiny $\{x, y\}$ obsahující přesně dva prvky x a y, je možno položit $x \cup y = \bigcup\{x, y\}$, pročež pojem funkce $\bigcup$ je obecnější.

Axiomem potence se nazývá formule

ZF3 $$(\forall x)(\exists z)(\forall q)[q \in z \equiv (\forall u)(u \in q \to u \in x)].$$

Klíčem k pochopení významu axiomu potence je podformule $(\forall u)(u \in q \to u \in x)$. Ta vyjadřuje, že každý prvek množiny q je rovněž prvkem množiny x, tedy že q je podmnožinou (částí) množiny x. Axiom pak říká, že systém všech podmnožin dané množiny je vhodně vytvořený systém a že je množinou. Opět je možno obohatit jazyk teorie množin o novou funkci přiřazující množině x její potenci $\mathfrak{P}(x)$, tj. množinu všech jejích podmnožin ($\mathfrak{P}$ je gotické P).

Ze základních principů teorie množin hledali matematici nejdéle vhodnou formulaci principu dnes zvaného **schéma nahrazení.** Tento princip vyžaduje, abychom pro každou formuli φ jazyka teorie množin[5] přijali jako axiom formuli

ZF4 $$(\forall q, q', u)[(\varphi \,\&\, \varphi(q/q')) \to q = q'] \to (\forall x)(\exists z)(\forall q)[q \in z \equiv (\exists u)(u \in x \,\&\, \varphi)].$$

[5] abychom byli v souladu s intuitivním níže popsaným významem, předpokládáme, že ve formuli se nevyskytují proměnné q' a z

Začněme opět od významu význačné podformule, tentokrát formule

$$(\forall q, q', u)[(\varphi \,\&\, \varphi(q/q')) \to q = q'].$$

Představujme si, že formule φ popisuje nějaký vztah mezi proměnnými u a q (a má případně další proměnné jako parametry). Chceme-li vyjádřit, že k jednomu u je ve vztahu φ nejvýše jedno q, představíme si, že jsou taková dvě, ještě např. q', což vyjádříme konjunkcí $\varphi \,\&\, \varphi(q/q')$ (formule $\varphi(q/q')$ vzniklá nahrazením proměnné q proměnnou q' vyjadřuje, že ve vztahu s u je q') a pak napíšeme, že v takovém případě musí být objekty q a q' objektem jediným. To je právě smysl zkoumané podformule, jež tedy vyjadřuje, že ve vztahu s každým jednotlivým u je *nejvýše* jeden objekt q.

Teď uvažujme vhodně vytvořený systém objektů, které jsou prvky množiny x. Ke každému objektu u z tohoto systému přiřazuje formule φ nejvýše jeden objekt q. Axiom příslušný formuli φ vypovídá, že systém přiřazených objektů je vhodný, tzn. že existuje množina, jejíž prvky jsou právě objekty tohoto systému.

Myšlenku si objasníme na velice důležitém příkladu, který však není typický. Obvyklé je, že formule udává skutečně nějaký vztah mezi u a q a že mnoha u je nějaké q přiřazeno. Teď budeme uvažovat jako φ formuli $u = u \,\&\, q \neq q$. Podle axiomu rovnosti neexistuje q s vlastností $q \neq q$ a proto naše formule proměnné u nepřiřazuje žádný objekt. Ať vezmeme jakoukoli množinu x, tak systém všech objektů přiřazených prvkům množiny x je prázdný, takže schéma nahrazení při této aplikaci zaručuje, že existuje množina, která nemá žádný prvek. Podle axiomu extenzionality je takováto množina jediná a je zvykem ji značit $\emptyset$ a nazývat — samozřejmě — prázdnou množinou.

Ukážeme, že formule

ZF5 $(\exists x)[\emptyset \in x \,\&\, (\forall y)((y \in x \to (\exists z)[z \in x \,\&\, (\forall v)(v \in z \equiv (v \in y \vee v = y))])]$

si zaslouží název **axiom nekonečna.** Postulovaná množina x je neprázdná, má totiž prázdnou množinu jako svůj prvek. Nadto musí mít prvek z_1 takový, že

$$(\forall v)(v \in z_1 \equiv (v \in \emptyset \vee v = \emptyset)),$$

tzn. množinu z_1 obsahující jako jediný prvek prázdnou množinu a dále musí mít jako svůj prvek množinu z_2 s vlastností $(\forall v)(v \in z_2 \equiv (v \in z_1 \vee v = z_1))$, neboli množinu jejímiž prvky jsou prvky množiny z_1 a množina z_1 sama, a ještě navíc musí být prvkem množiny x množina z_3, jejímiž prvky jsou prvky množiny z_2 a množina z_2 sama atd. Takto sestrojíme rekurzí nekonečně mnoho prvků $\emptyset, z_1, z_2, z_3, \ldots$ množiny x. Dá se ukázat, že všechny tyto prvky jsou od sebe různé. Množina x má tudíž nekonečně mnoho prvků, tj. je nekonečná.

Axiom fundovanosti (*regularity*) je trochu techničtější a jeho úkolem je zabránit existenci patologických množin. Představa, že prvky množiny by měly být známy dříve než uchopíme jejich systém jako celek, je zcela přirozená a vylučuje např. možnost, že množina je svým vlastním prvkem. Avšak axiom vylučuje nejen existenci množiny, jež je svým prvkem, ale také existenci množiny, která je prvkem svého prvku atd. Axiomem je formule

ZF6 $(\forall x)((\exists y)(y \in x) \rightarrow (\exists y)[y \in x \;\&\; (\forall q)(q \in y \rightarrow \neg q \in x)])$

vypovídající, že pokud množina má vůbec nějaký prvek (tj. je neprázdná), pak má také prvek, který již nemá společný prvek s původní množinou.

Velmi často se mezi axiomy zařazuje také axiom dvojice, tzn. požadavek aby pro každé dva objekty x, y existovala množina z obsahující jako své prvky právě tyto dva objekty (pro takovouto množinu se používá znak $\{x, y\}$). Ukážeme si, že přidání tohoto axiomu je nadbytečné a způsobuje ztrátu nezávislosti axiomatického systému, tj. prokážeme dokazatelnost axiomu dvojice v Zermelo-Fraenkelově teorii množin. Připomeňme, že uživše axiom extenzionality a schéma nahrazení jsme definovali konstantu $\emptyset$ zvanou prázdná množina.

Příklad 3. Spočítáme nejprve počet prvků potence prázdné množiny, tzn. počet prvků množiny $\mathfrak{P}(\emptyset)$. K tomu účelu potřebujeme zjistit všechny podmnožiny prázdné množiny, tj. všechny množiny, jejichž všechny prvky jsou také prvky prázdné množiny. Zřejmě žádná neprázdná množina není podmnožinou prázdné množiny a sama prázdná množina je svou podmnožinou. Takže množina $\mathfrak{P}(\emptyset)$ má právě jeden prvek totiž prázdnou množinu; zdůrazněme, že $\mathfrak{P}(\emptyset)$ je *neprázdná.*

A teď zjistěme, jaké prvky má potence potence prázdné množiny, tedy množina zapsatelná ve tvaru $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\emptyset))$. Protože množina $\mathfrak{P}(\emptyset)$ má jediný prvek, má pouze dvě podmnožiny, totiž prázdnou množinu a sebe sama. Množina $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\emptyset))$ má tudíž přesně tyto dva prvky.

Příklad 4. Prokažme, že pro každé dva objekty x, y existuje množina, která má za své prvky právě tyto zadané objekty. (Případ $x = y$ se nevylučuje.) K tomu účelu využijeme jednak schéma nahrazení a jednak existenci dvouprvkové množiny prokázanou v předchozím příkladu. Pro porozumění konstrukci formule φ uveďme explicitně, že dva prvky sestrojené množiny jsou $\emptyset$ a $\mathfrak{P}(\emptyset)$. Uvažme zobrazení, které prázdné množině $\emptyset$ přiřazuje objekt x a množině $\mathfrak{P}(\emptyset)$ přiřazuje objekt y. Takovéto zobrazení je popsané formulí $\varphi(u, q)$ tvaru $(u = \emptyset \;\&\; q = x) \vee (u = \mathfrak{P}(\emptyset) \;\&\; q = y)$. Systém obrazů množiny $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\emptyset))$ při popsaném zobrazení je přesně množina skládající se z objektů x, y.

Axiomatický systém Zermelo-Fraenkelovy teorie množin má pět formulí a jedno schéma. Je možno ukázat, že žádný princip nelze vynechat bez oslabení systému. Dokonce však není možno ani omezit schéma nahrazení na konečně mnoho případů, tzn. Zermelo-Fraenkelova teorie množin není konečně axiomatizovatelná (viz [Mos]).

ZÁVĚR

Všechno zkoumejte, dobrého se držte,...
Pavel z Tarsu 1Te 5, 21

§1

JEDINÁ LOGIKA?

V našem textu jsme se snažili popsat základní východiska klasické matematické logiky. Pochopitelně v mnoha směrech jsme mohli pouze osvětlit základy; je nutné si také uvědomit, že jsme se některými celými partiemi logiky vůbec nezabývali nebo jsme se jich jen letmo dotkli — jako podstatný příklad takovýchto částí logiky mohou sloužit např. teorie modelů nebo teorie rekurze.

Na závěr jsme však povinni se ještě zabývat otázkou, zda existují i zásadně jiná smysluplná pojetí logiky. Naznačením jiných možných směrů však naprosto nezpochybňujeme výsadní postavení systému, kterým jsme se zabývali až dosud. Výše zkoumaný systém totiž nejvýstižněji popisuje náš způsob vyvozování důsledků a je tím nejběžněji přijímaným. Nyní chceme prostě jen ukázat jiné *možné* pohledy na svět, které jsou popisovány jinými logickými systémy. S dosud zkoumaným systémem, jakožto základní mírou, je vhodné alternativní přístupy neustále poměřovat.

*

V řadě případů nejsprávnější odpověď na otázku po pravdivosti výroku je „nevím“. Nadto v praktickém životě si často nejsme zcela jisti, zda tvrzení je určitě správné: např. mnohokrát řekneme, že pacient má téměř jistě tu nebo onu nemoc, avšak jakousi pochybnost stále cítíme. Popis uvažování popsaného typu vede k **vícehodnotové logice** — kromě hodnot „pravda“ a „nepravda“, které jsme připouštěli dosud, připustíme např. hodnotu „nevím“ nebo hodnoty udávající (např. v procentech) stupeň našeho přesvědčení[1].

Nejznámějším a také nejstarším představitelem vícehodnotových logik je **logika trojhodnotová,** kde je zvykem třetí hodnotu (často označovanou jako 1/2) chápat jako „nevím“. V našem textu jsme se již jednou s trojhodnotovou logikou setkali, a to v dodatku k první kapitole. Toto setkání však bylo ryze účelové a umožňovalo prokázat nezávislost některých principů klasické logiky.

Při popisu sémantiky trojhodnotové logiky je potřeba mj. popsat ohodnocení negace formule, a to pouze na základě ohodnocení formule samotné (srovnej

[1] Základní prací je [Ł2], historicky první [Ł1], viz také [Po]

analogický požadavek formulovaný v §1 kap. I pro případ dvouhodnotové logiky). Jedná se zejména o připsání pravdivostní hodnoty negaci formule v případě, že formule samotná je hodnocena „nevím“ (tj. v symbolech jestliže $\mathbb{v}(\mathcal{A}) = 1/2$) — pro formule nabývající pravdivostních hodnot „pravda“ a „nepravda“ se hodnota negace definuje většinou jako v klasickém případě, tzn. negace pravdivé formule je hodnocena jako nepravdivá a negace nepravdivé formule je hodnocena jako pravdivá (viz první tabulku §1 kap. I). Je-li formule $\mathcal{A}$ ohodnocena hodnotou „nevím“, jsou možné tři způsoby ohodnocení její negace: „pravda“, „nevím“ a „nepravda“. Prostřední definice je nejčastější (viz druhou tabulku §3 kap. I), navrhl ji J. Łukasiewicz a opírá se o představu, že neznáme-li pravdivost formule, nemůžeme znát ani pravdivost její negace. Užívány jsou však i druhé dvě možnosti; tabulka pravdivostních hodnot negace dodefinovaná pomocí $\mathbb{v}(\neg\mathcal{A}) = 1$ pro formuli $\mathcal{A}$ hodnocenou $\mathbb{v}(\mathcal{A}) = 1/2$ popisuje tzv. optimistickou negaci (negace hodnoty „nevím“ je optimisticky definována jako „pravda“) a poslední možnost je pak samozřejmě nazývána negací pesimistickou (viz devátou tabulku §3 kap. I).

Základní tabulka pravdivostních hodnot pro jakoukoli binární spojku již musí obsahovat $3 \cdot 3$ položek. Nejčastější tabulky pro implikaci popisují pojetí Łukasiewicze, Kleeneho a Heytinga. Tabulky pravdivostních hodnot implikace Łukasiewicze a Heytinga jsme sice již uvedli v §3 kap. I, zopakujeme je však v první tabulce, abychom vám, milý čtenáři, umožnili jejich pohodlné srovnání.

Ve všech třech pojetích pravdivostních hodnot implikace se zachovávají intuitivní pravidla „implikace, jejíž antecedent je nepravdivý, je pravdivá“, „implikace, jejíž konsekvent je pravdivý, je pravdivá“, a „implikace, jejíž antecedent je pravdivý a konsekvent nepravdivý, je nepravdivá“, kterážto pravidla jsme zdůvodňovali již v prvním paragrafu celého textu. Hodnoty implikace na čtvrtém, pátém a osmém řádku tabulky vpravo jsou v tom kterém sloupci důsledkem motivací autorů pravdivostních tabulek (i když všechny motivace vedly v osmém řádku k témuž výsledku).

$\mathtt{p}$	$\mathtt{q}$	$\mathtt{p} \to_{Ł} \mathtt{q}$	$\mathtt{p} \to_{K} \mathtt{q}$	$\mathtt{p} \to_{H} \mathtt{q}$
0	0	1	1	1
0	1/2	1	1	1
0	1	1	1	1
1/2	0	1/2	1/2	0
1/2	1/2	1	1/2	1
1/2	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1/2	1/2	1/2	1/2
1	1	1	1	1

Tabulka 1

Zcela jednoduchá je motivace Kleeneho (prostřední sloupec): jestliže neznám pravdivostní hodnoty formulí a není-li hodnota určena výše zopakovanými intuitivními pravidly, je hodnota implikace „nevím“.

Łukasiewicz vychází ve svých úvahách z výroků o budoucích událostech a konstatuje, že takové výroky v přítomném okamžiku nejsou ani pravdivé, ani nepravdivé (pokud událost není nutná, nebo naopak nemožná); hodnotu 1/2 interpretuje jako „možnost“. Výrok „Jestliže budu od této chvíle za rok ve Varšavě, pak 1+1=5." se stane od této chvíle za rok pravdivým, když ve Varšavě nebudu a nepravdivým, když tam budu. Tedy v právě probíhajícím okamžiku jej musím chápat jako „možný". Motivovali jsme pravdivostní hodnotu ve čtvrtém řádku Łukasiewiczovy tabulky pravdivostních hodnot implikace, hodnota v řádku 8 se motivuje zcela analogicky. Při motivaci pátého řádku je vhodné, podle mého názoru, užít ještě požadavek, že popsat ohodnocení implikace *smí záviset pouze* na pravdivostních hodnotách antecedentu a konsekventu. Přijetí tohoto požadavku umožní zkoumat jednu speciální implikaci, totiž „Jestliže budu od této chvíle za rok ve Varšavě, budu od této chvíle za rok ve Varšavě." (antecedent je totožný s konsekventem). Zmíněné implikaci dáme bez váhání pravdivostní hodnotu 1, a uvedený příklad nás tudíž nabádá vyplnit pátý řádek Łukasiewiczovy tabulky hodnotou 1.

Heytingova tabulka pravdivostních hodnot implikace byla motivována intuicionistickou logikou, o které pojednáme trochu později.

Velice důležitým výsledkem klasického výrokového počtu bylo nalezení vyvozovacích principů výrokového počtu takových, že za jejich pomoci jsou dokazatelné přesně všechny tautologie (viz Postova věta o úplnosti §1 kap. I). Vyvozovací principy, jejichž pomocí dokážeme přesně všechny tautologie sémantiky zadané Łukasiewiczovou tabulkou pravdivostních hodnot implikace a obvyklou trojhodnotovou tabulkou pravdivostních hodnot negace (viz druhou tabulku §3 kap. I), nalezl Mordchaj Wajsberg[2)].

Při zkoumání pojetí logiky různé od logiky klasické je třeba znovu vyšetřovat odpovědi na běžné otázky, protože i malá změna pojetí logiky může zcela změnit příslušné odpovědi.

Teď uveďme jediný příklad, pro který již máme všechny podklady připravené. Na počátku třetího paragrafu první kapitoly jsme nahlédli, že v klasickém dvouhodnotovém výrokovém počtu jsou všechna možná spojení dvou výroků zapsatelná pomocí negace a implikace. V závěru téhož paragrafu v úloze 15 jste měl ukázat, vážený čtenáři, že v Łukasiewiczově sémantice tomu tak není. Odpověď „ano" se tedy přidáním jediné dodatečné pravdivostní hodnoty změnila na odpověď „ne". (Poznamenejme, že Jerzy Słupecki prokázal[3)], že k negaci a implikaci postačuje přidat jedinou unární spojku, a to spojku přiřazující všem třem pravdivostním hodnotám hodnotu 1/2, abychom mohli pomocí těchto spojek již vyjádřit všechna možná spojení dvou výroků v Łukasiewiczově sémantice, a nadto Słupecki nalezl axiomatiku — v jazyce obsahujícím negaci, implikaci a přidanou spojku — vůči níž je Łukasiewiczova sémantika korektní a úplná.)

*

2) Wajsbergův systém axiomů byl publikován v práci [W] a skládá se z axiomů tvaru **VP1**, **VP3**, tranzitivity implikace, tj. formulí tvaru $(\mathcal{P} \to \mathcal{Q}) \to [(\mathcal{Q} \to \mathcal{R}) \to (\mathcal{P} \to \mathcal{R})]$ a formulí tvaru $[(\mathcal{P} \to \neg\mathcal{P}) \to \mathcal{P}] \to \mathcal{P}$. Odvozovacím pravidlem je modus ponens. Výsledky úloh 8 a 9 §3 kap. I tudíž prokázaly lehčí část Wajsbergova výsledku, totiž, že všechny jeho axiomy jsou korektní v Łukasiewiczově sémantice. Vzhledem k Słupeckého výsledku, jenž uvedeme za okamžik, je třeba zdůraznit, že Wajsbergova axiomatika užívá jen spojky negace a implikace.

3) Výsledek byl oznámen v práci [Sl]; jeho podrobnější popis a rozbor nalezne čtenář např. v §5.3 knihy [Ml] a §3.4 knihy [Pe].

K vícehodnotovým logikám je třeba přiřadit **fuzzy logiku,** která má poněkud jiná ideová východiska než motivace Łukasiewicze, Kleeneho a Heytinga[4]. Snahou je popsat *neurčitost*, se kterou se dennodenně v běžném životě setkáváme. Pravdivostní hodnota formule pak udává stupeň našeho přesvědčení, že vyšetřovaný výrok je pravdivý. Velice často se za pravdivostní hodnoty berou reálná čísla z uzavřeného intervalu $<0,1>$, tzn. ta reálná čísla, pro které platí $0 \leq x \leq 1$.

Jakmile připustíme více možností pravdivostních hodnot, je samozřejmé, že výrazně vzroste počet možných způsobů definic základních pravdivostních tabulek výrokových spojek. Popišme nyní tři význačné způsoby ohodnocení konjunkce a negace užívané v sémantice fuzzy logiky (na základě ohodnocení konjunkce a negace se již dohodnutým způsobem definují pravdivostní tabulky pro ostatní výrokové spojky).

V první sémantice (tzv. Łukasiewiczovy fuzzy logiky) ohodnocujeme

konjunkci	$\mathtt{p}$ & $\mathtt{q}$	hodnotou	$max(0, x+y-1)$	kde x, y jsou po řadě pravdivostní hodnoty proměnných $\mathtt{p}, \mathtt{q}$
negaci	$\neg\mathtt{p}$	hodnotou	$1-x$	kde x je pravdivostní hodnota proměnné $\mathtt{p}$

Povšimněme si, že definice sémantiky negace zobecňuje Łukasiewiczovu sémantiku negace (tj. tabulku 2 §3 kap. I), a nadto je možno ukázat, že dohodnutým způsobem dodefinovaná základní tabulka pravdivostních hodnot pro implikaci zobecňuje Łukasiewiczovu implikaci.

Ve druhé důležité sémantice fuzzy logiky (tzv. produktové) popisujeme pravdivostní hodnotu

konjunkce	$\mathtt{p}$ & $\mathtt{q}$	hodnotou	$x \cdot y$	kde x, y jsou po řadě pravdivostní hodnoty proměnných $\mathtt{p}, \mathtt{q}$
negace	$\neg\mathtt{p}$	hodnotou	0	pokud pravdivostní hodnota proměnné $\mathtt{p}$ je větší než 0
		hodnotou	1	pokud pravdivostní hodnota proměnné $\mathtt{p}$ je 0

Jako poslední důležitou sémantiku fuzzy logiky (tzv. Gödelovu) uveďme pravdivostní ohodnocení

konjunkce	$\mathtt{p}$ & $\mathtt{q}$	hodnotou	$min(x, y)$	kde x, y jsou po řadě pravdivostní hodnoty proměnných $\mathtt{p}, \mathtt{q}$
negace	$\neg\mathtt{p}$	hodnotou	0	pokud pravdivostní hodnota proměnné $\mathtt{p}$ je větší než 0
		hodnotou	1	pokud pravdivostní hodnota proměnné $\mathtt{p}$ je 0

a uvědomme si, že definice pravdivosti ohodnocení negace pro poslední dvě sémantiky zobecňuje sémantiku pesimistické negace (tj. tabulku 9 §3 kap. I). Dále je vhodné nahlédnout, že míra poklesu pravdivostní hodnoty konjunkce je u popsaných sémantik rozdílná. V posledním případě hodnota pouze poklesne na minimum hodnot jednotli-

[4] Slovo „fuzzy“ má význam „neostrý“ nebo „roztřepený“. Jev neostrého popisu byl již podstatou „paradoxu hromady“ („plešatého muže“) Eubúlida z Mílétu: když z hromady písku odeberu jedno zrnko zůstává pořád hromada písku; postupným odebíráním zrnek však dospějeme k „prázdné hromadě“, kterou pochopitelně už za hromadu písku nepovažujeme. V minulém století učinil z jevu neurčitosti podstatné téma L. A. Zadeh (viz [Za]) a později z poněkud jiného úhlu pohledu se neurčitostí zabývala Vopěnkova alternativní teorie množin (viz [V1]), v logice rozvinul Zadehovu ideu Petr Hájek v [Há1].

vých členů, v prvním případě je pokles nejdramatičtější: například pokud pravdivostní hodnoty konjunktů jsou menší nebo rovny 1/2, klesne hodnota konjunkce dokonce na 0!

Pro všechny tři uvedené sémantiky jsou známy axiomatické systémy, jež jsou vůči nim korektní a úplné. Navíc je zajímavé, že sémantiku obecné fuzzy logiky je možno zapsat jako „složení“ těch třech význačných (viz [Há1]).

Čím je důkaz složitější (delší), tím je větší možnost chyby, takže s rostoucí délkou důkazu klesá naše přesvědčení, že je důkaz správný; formalizace tohoto přístupu je popsatelná uvnitř fuzzy logiky.

Vícehodnotová logika a zejména fuzzy logika prožívají v současnosti bouřlivý rozvoj.

* * *

Modální logika rozšiřuje naše možnosti tvorby formulí o novou (unární) operaci nutnosti[5)] — pro formuli φ obvykle značíme formuli „nutně φ“ znakem $\Box\varphi$. Zcela formálně tedy definici formule v modální logice dostaneme, pokud ke dvěma pravidlům pro vytváření formulí výrokového počtu (viz kap. I) nebo třem pravidlům pro vytváření formulí predikátového počtu přidáme ještě další pravidlo:

(d) je-li $\mathcal{A}$ formule modální logiky, je formulí také zápis $\Box\mathcal{A}$.

Jsou-li p, q výrokové proměnné, jsou formulemi modálního výrokového počtu např.

zápis $\mathsf{p} \to (\Box\Box\mathsf{q} \to \neg\Box\neg\mathsf{p})$ a také zápis $(\Box\mathsf{p} \,\&\, \mathsf{q})\vee\Box[\mathsf{p} \to \Box\neg(\mathsf{q}\vee\Box\mathsf{p})]$.

Pro modální logiky se obvykle uvažuje sémantika navržená S.A. Kripkem (viz [Kri]), ve které rozlišujeme „platí“ a „nutně platí“. Uvažujeme více struktur (více „možných světů“) a navíc vztah, který nám pro dvojice struktur popisuje, zda druhá je „dosažitelná“ z první. Platnost formule definujeme rekurzí, a to pro spojky klasického výrokového počtu (a rovněž pro kvantifikace v predikátovém počtu) zcela podobně jako jsme definovali pravdivost v klasické logice. Platnost formule $\Box\varphi$ definujeme jako „platí ve všech možných světech dosažitelných ze zkoumaného světa“ (což můžeme intuitivně chápat jako „platí ve všech možných světech, do nichž se může zkoumaný svět vyvinout“).

Pro formule s nejvýše jedním užitím operátoru nutnosti podrobněji: V určitém modelu je platnost formule klasického predikátového počtu, tj. formule, ve které se nevyskytuje „nutně platí“, definována tak, jak uvedeno v definici pravdivosti v prvních dvou kapitolách — platnost tedy závisí jen na zkoumané struktuře. Naproti tomu platnost formule „nutně platí φ“ je určena vlastnostmi struktur dosažitelných ze zkoumané struktury — potřebujeme znát pravdivost formule φ ve všech strukturách „dosažitelných“ z naší vyšetřované.

5) Úvahy o nutnosti se vyskytují již v antice, a to jak u Aristotela, tak v megarsko-stoické škole.

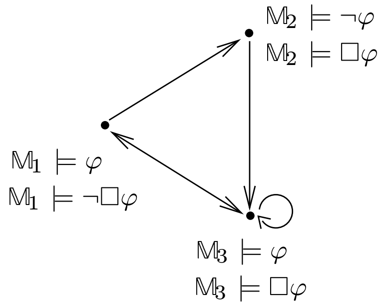

Diagram 1

Na diagramu vpravo je šipkami znázorněn příklad relace „dosažitelnosti“ pro tři struktury. Ze struktury $\mathbb{M}_1$ jsou „dosažitelné“ obě zbývající, ze struktury $\mathbb{M}_2$ je „dosažitelná“ pouze struktura $\mathbb{M}_3$ a z poslední struktury $\mathbb{M}_3$ je „dosažitelná“ jednak struktura $\mathbb{M}_1$ a jednak struktura $\mathbb{M}_3$ sama. Ptejme se, ve kterých strukturách platí formule $\Box\varphi$ za předpokladu, že formule φ platí ve strukturách $\mathbb{M}_1$ a $\mathbb{M}_3$ a neplatí ve struktuře $\mathbb{M}_2$. Ze struktury $\mathbb{M}_1$ je „dosažitelná“ struktura $\mathbb{M}_2$, ve které formule φ neplatí, pročež formule $\Box\varphi$ neplatí ve struktuře $\mathbb{M}_1$. Ze struktury $\mathbb{M}_2$ je „dosažitelná“ jen struktura $\mathbb{M}_3$, ve které formule φ platí, pročež formule $\Box\varphi$ platí ve struktuře $\mathbb{M}_2$. (Kdyby ze struktury $\mathbb{M}_2$, byla „dosažitelná“ ona sama, formule $\Box\varphi$ by v ní naopak neplatila.) V obou strukturách „dosažitelných“ ze struktury $\mathbb{M}_3$ formule φ platí, takže formule $\Box\varphi$ ve struktuře $\mathbb{M}_3$ platí.

Vlastnosti relace „dosažitelnosti“ podstatně ovlivňují splňování v Kripkeho sémantice, uvědomme si např., že prostě v důsledku definice je v Kripkeho sémantice pravdivé „jestliže nutně φ, pak φ“ (nezávisle na konkrétní pravdivosti formulí v jednotlivých strukturách), právě když zkoumaná relace dosažitelnosti je reflexivní (tj. jestliže každý „myslitelný svět“ je „dosažitelný“ za sebe sama).

V modální logice je dále zvykem definovat „je možné, že φ“ jako „není nutně, že není φ“[6].

* * *

Určitě lze odhadnout maximální počet vlasů, které může člověk mít; představme si město, jehož počet obyvatel je větší než toto číslo. Pak je zřejmé, že ve městě existují dva lidé, kteří mají stejný počet vlasů, ale nalézt takovéto dva lidi může být prakticky nemožné. Pochopitelně problém vystupuje v celé své šíři teprve při zkoumání nekonečných systémů.

Intuicionistická logika (a analogicky konstruktivismus) vyžaduje pro důkaz tvrzení, že existuje objekt s určitou vlastností, jeho nalezení nebo sestrojení — nikoli pouhé popření tvrzení „všechny objekty mají negaci zkoumané vlastnosti“, což je postačující v klasické logice. Intuicionismus tedy nepřijímá ekvivalenci formulí $(\exists x)\varphi$ a $\neg(\forall x)\neg\varphi$ pro všechny formule φ. Poznamenejme, že intuicionismus vznikl v době objevení paradoxů teorie množin (viz dodatek); intuicionistická kritika klasického pojetí je však mnohem zásadnější. Za zakladatele je považován L.E.J. Brouwer (viz [Br]).

Intuicionismus se rozchází s klasickou logikou již v akceptaci některých základních principů výrokového počtu — tento směr nepřijímá automaticky axiomy typu **VP3**. V důsledku toho pak intuicionista obecně neakceptuje mnohé tautologie formulované již v počátcích logiky, např. zákon dvojité negace (tj. formule $\neg\neg\varphi$ a φ nemusí v intuicionistické logice být ekvivalentní), a odmítá i klasický princip vyloučeného třetího (tertium non datur). Na tomto místě stojí za to

[6] Pro formuli „je možné, že φ“ se většinou používá znak $\Diamond\varphi$, takže $\Diamond\varphi \equiv \neg\Box\neg\varphi$.

si ještě jednou uvědomit, že intuicionistický přístup je z jistého hlediska zcela ospravedlnitelný. Představte si totiž nějaké tvrzení, o kterém naprosto nemáme představu, zda je pravdivé, nebo nikoli. Klasický logik automaticky přijme, že disjunkce tohoto výroku a jeho negace je pravdivá. Naproti tomu intuicionista takové přijetí odmítá do doby, než se zjistí, zda je pravdivé tvrzení, nebo zda je pravdivá negace tvrzení. Je snad zřejmé, že jak klasická logika, tak také intuicionismus popisují smysluplné postoje (i když v některých případech tyto postoje přinášejí zcela rozdílné důsledky).

Intuicionistická logika používá spojky negace, implikace, konjunkce a disjunkce jakožto základní. Jeden z možných axiomatických systémů pro intuicionistický výrokový počet se skládá z axiomů $\&_1$–$\&_3, \vee_1$–$\vee_3$ popisujících vztahy jednotlivých výrokových spojek (viz §3 kap. I) a z axiomů uvedených v levé polovině následující tabulky. V pravém sloupečku tabulky jsou pak uvedeny odkazy na odpovídající principy klasické logiky.

IVP1	$\mathcal{P} \rightarrow (\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{P})$	**VP1,**
IVP2	$[\mathcal{P} \rightarrow (\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{R})] \rightarrow [(\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}) \rightarrow (\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{R})]$	**VP2,**
IVP3	$(\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}) \rightarrow [(\mathcal{P} \rightarrow \neg\mathcal{Q}) \rightarrow \neg\mathcal{P}]$	úloha 27 (důsledek principů důkaz sporem, důkaz dedukcí a „dvojitou negaci lze vynechat“)
IVP4	$\neg\mathcal{P} \rightarrow (\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q})$	zákon Dunse Scota

Intuicionistický výrokový počet je korektní vůči trojhodnotové sémantice popsané Heytingovou implikací, pesimistickou negací (viz tabulkou 9 §3 kap. I) a vhodně dodefinovanými základními tabulkami pravdivostních hodnot pro konjunkci a disjunkci. Korektnost axiomů **IV1–IV4** vůči uvedené sémantice jsme prokázali v úloze 14 třetího paragrafu kap. I. V ní jsme navíc prokázali, že formule $\neg\neg p \rightarrow p$ není při této sémantice pravdivá. Takže z hlediska klasické logiky je intuicionismus slabý systém — všechny formule výrokového počtu dokazatelné v intuicionistickém výrokovém počtu jsou dokazatelné v klasickém, avšak existují formule dokazatelné v klasickém výrokovém počtu a nedokazatelné v intuicionistickém. (Nejsilnější tvrzení o vztahu dokazatelnosti v klasickém a v intuicionistickém výrokovém počtu: je-li formule A dokazatelná v klasickém výrokovém počtu, je její *dvojitá negace*, tj. formule $\neg\neg A$, dokazatelná v intuicionistickém výrokovém počtu — avšak ne nutně formule A sama; viz např. 3.2 [Pe].)

Uvedli jsme, že intuicionistický výrokový počet je korektní vůči určité trojhodnotové sémantice. Není však vůči ní úplný a K. Gödel dokonce ukázal, že každá sémantika, vůči níž je intuicionistický výrokový počet korektní a úplný, musí mít nekonečně mnoho hodnot (viz [G3]). Avšak popsat sémantiku, vůči níž je intuicionistický výrokový počet korektní a úplný, není tak strašně obtížné (viz např. 6.1 [Pe]) — obvyklá sémantika je však Kripkeho typu, neboť uvažuje více struktur a definice pravdivosti negace a implikace bude záviset nejen na zkoumané struktuře, avšak rovněž na strukturách z ní „dosažitelných“ (tedy pravdivost *klasických* výrokových spojek je definována pomocí idee užívané při zkoumání *modální* „nutnosti“).

* * *

V současné době se velmi intenzivně zkoumá složitost důkazu, tj. u zkoumané formule se neptáme jen, je-li dokazatelná, ale navíc se snažíme popsat typ nejjednoduššího možného důkazu (výsledkem zde bývají např. tvrzení typu: důkazy, že přirozené číslo n má tu a tu vlastnost, musí být delší než ten a ten výraz závisející na čísle n).

HÁDANKY A HLAVOLAMY 1.4.06

Nezkazte si radost z luštění následujících hádanek předčasným pohlédnutím na řešení a dopřejte si pro každý hlavolam dost času, abyste ho v klidu a celý vyřešil sám. Návod či dokonce řešení je uvedeno jen pro případ, kdy po delším rozmýšlení usoudíte, že hádanka skutečně je nad vaše síly.

IV-1 Zjednodušte term $\boldsymbol{t} = (x - a) \cdot (x - b) \cdot (x - c) \cdot \ldots \cdot (x - z)$, ve kterém uvažujeme všechna písmena abecedy („bez hacku a carek“, avšak včetně q a w).

IV-2 Na rybníku naroste za jeden den 1 leknín, za dva dny 2 lekníny, za tři dny 4 lekníny, za čtyři dny 8 leknínů, za pět dní 16 leknínů a tak dále. Za třicet dní zaroste celý rybník. Za kolik dní zaroste přesně polovina rybníku?

IV-3 Z každé dvojice lidí na večírku je alespoň jeden matematik. Kolik je na večírku nematematiků?

IV-4 Otec muže na první fotografii je syn mého otce; syn muže na druhé fotografii je syn mého otce. Kdo jsou muži na fotografiích, nemám-li sourozence?

IV-5 Následující hádanku jste pravděpodobně řešili již jako děti. Tři lidojedi a tři běloši se potřebují dostat na druhý břeh řeky. Loďka unese pouze dva muže, je pochopitelně třeba ji řídit i při zpáteční jízdě. Lidojedi poslouchají příkazy týkající se převozu, chtějí však zabít bělochy v okamžiku, kdy jich na kterémkoli břehu (a loďce u něho) bude víc než bělochů. Jak má být přeprava řízena?

IV-6 Trochu obtížnější varianta: Psovod se psem chtějí na druhou stranu řeky; když přijdou k dvojmístné loďce, najdou tam skupinu šesti fotbalových fanoušků, kterým se nedaří přejet na druhý břeh kvůli osobním nevraživostem. Loďku umí řídit jen Slávista a příznivec Brna, horší však je, že oba Sparťané vrhají nevraživé pohledy na Slávistu a kdyby nebylo uklidňujícího působení příznivce Brna, asi by po sobě příznivci pražských klubů začali vrhat i něco horšího. Přesně stejně však pouze přítomnost Slávisty zabraňuje srážce mezi příznivcem Brna a oběma fanoušky Olomouce. Proto s takovým nadšením vítají příchod psovoda. Avšak ten ochladí jejich nadšení sdělením, že pes je jen zpola vycvičen: na povel sice zůstane na místě, ale je velmi bojovný a zatím není jasné, zda by bez přítomnosti psovoda nenapadl některého z fanoušků. Mohou se za těchto podmínek převést všichni na druhý břeh bez nebezpečí ohrožení zdraví?

IV-7 Máte dva identické provazy, u každého z nich po zapálení jednoho konce dohoří plamen na druhý konec provazu přesně za jednu hodinu. Provazy vypadají homogenní, nemusí však homogenní být, tj. jednotlivé části mohou hořet různě rychle. Odměřte pomocí jejich hoření přesně 3/4 hodiny.

IV-8 Tato úloha bohužel vyžaduje probrání jednotlivých případů: Matematik je vyrušen od čtení knihy. Je natolik zvyklý používat matematiku, že si nezapamatuje prostě číslo stánky, kterou čte, avšak sečte obě čísla na čtené dvojstraně. Za chvíli se vrátí a podle vzpomínky nalistuje příslušnou dvoustranu. Zjistí, že tento text již četl a následně si vzpomene, že prohodil pořadí číslic ve svém dvouciferném součtu. Nalistuje proto správnou dvoustranu. Která to je?

IV-9 Jste ve skupině rukojmí a dostali jste poslední příležitost k záchraně. Za hodinu každý z vás dostane bílou nebo černou čapku, bude vidět čapky ostatních, nikoli svoji a nebude smět komunikovat s ostatními rukojmími. Věznitel bude postupně ukazovat na rukojmí, pokud rukojmí uhodne a hlasitě oznámí barvu své čapky, je propuštěn, jinak je okamžitě přede všemi popraven. Využijte hodinu k dohodnutí strategie, která co nejvíce rukojmích zachrání.

IV-10 Trochu obtížnější varianta: Opět za hodinu každý ze sudého počtu rukojmích dostane bílou nebo černou čapku, bude vidět čapky ostatních, nikoli svoji. Teď však budete *tajně* hlasovat, zda máte ve skupině sudý počet bílých čapek. Vyhraje-li v hlasování správná odpověď, budete všichni propuštěni, jinak všichni popraveni. Každý sám za sebe má poloviční pravděpodobnost odpovědět správně. Přesto celá skupina při vhodné strategii má pravděpodobnost záchrany mnohem vyšší. Navrhněte takovou strategii.

IV-11 Následující hádanka se používá i při psychologických testech, pro čtenáře knihy o logice by neměla být problémem.

Na každé kartičce je na jedné straně číslo a na druhé písmeno. Před Vámi leží čtyři kartičky, na jejichž vrchních stranách vidíte písmena „A“ a „B“ a čísla „1“ a „2“. Které kartičky *musíte* otočit, abyste zkontrolovali pravdivost tvrzení „Je-li na jedné straně samohláska, je na druhé straně liché číslo.“?

IV-12 Zastavily se mi hodiny. Navštívím přítele bydlícího asi kilometr po rovině od mého bydliště. Jak jen s pomocí jeho přesně jdoucích hodin nařídím své, a to bez přemisťování jakýchkoli hodin?

IV-13 Mezi devíti mincemi je jedna falešná, a to lehčí. Určete ji maximálně dvojím vážením na rovnoramenných vahách.

IV-14 Nyní sice smíte k určení falešné mince vážit třikrát, nevíte však, zda falešná mince je lehčí nebo těžší, a nadto je mincí 13.

IV-15 Opět máte 13 mincí, o té jedné falešné nevíte, zda je lehčí, nebo těžší, navíc však máte čtrnáctou minci, jež je pravá. Trojím vážením máte určit falešnou minci a navíc zjistit, *zda je lehčí, nebo těžší než pravá.* Návod: Bez užití pravé mince je úloha řešitelná jen pro dvanáct mincí. Jak pravou minci využijete při zkoumání třinácti mincí?

IV-16 V jedné místnosti jsou tři vypínače ke zhasnutým žárovkám ve druhé místnosti, do které není vidět. Napřed můžete manipulovat s vypínači a pak po vstupu do druhé místnosti máte určit, ke které žárovce patří ten který vypínač. Návod: Poté, co teoreticky odůvodníte, že úloha „nemůže“ mít řešení, vyřešte ji prakticky.

IV-17 Jste na večírku se svou partnerkou a čtyřmi dalšími páry. Někteří účastníci si potřásají rukou, jiní se zdraví bez potřesení rukou. Partneři v páru přicházejí spolu a pochopitelně si rukou netřesou. Zeptáte se všech účastníků, s kolika účastníky si potřásli rukou, a dostanete devět různých odpovědí. S kolika účastníky jste si rukou potřásl vy?

IV-18 Z měst vzdálených od sebe 100 km vyjedou proti sobě vlaky, z prvního města rychlostí 60km/hod a ze druhého rychlostí 40 km/hod. Současně z prvního města vyletí vlaštovka, letí k druhému vlaku, otočí se a letí k prvému vlaku, znovu se otočí a letí ke druhému, atd. Vlaštovka létá průměrnou rychlostí 100 km/hod. Kolik km nalétá vlaštovka, než se vlaky setkají? Který vlak je v tom okamžiku blíže městu, ze kterého vyjel pomalejší vlak?

IV-19 Ve dvou nádobách je stejně velké množství tekutiny, v prvé voda a ve druhé víno. Z první nádoby odlijeme třetinu do druhé nádoby, promícháme a vrátíme tekutinu tak, aby v obou nádobách bylo zase stejně tekutin. To opakujeme desetkrát. Je nakonec víc vína v první sklenici, nebo víc vody ve druhé nádobě? Znáte-li už odpověď, tak zkuste odhadnout počet přelití, která postačí k tomu, aby v obou nádobách bylo stejně vína jako vody.

IV-20 Otec spěchá za třemi syny oslavit jejich společné narozeniny, jeho přítel ho však zarazí s otázkou kolik je synům let. Po první odpovědi, že součin let synů je 36, si přítel žádá pochopitelně další informaci, avšak i když se doví součet let synů, požaduje ještě další upřesnění. Až dodatečná informace, že nejmladší syn měl minulý týden rýmu, jej uspokojí. Jak jsou synové staří? Návod: K řešení nepotřebujete znát součet let synů.

Byl by přítel uspokojen i závěrečnou informací, že rýmu měl *nejstarší* syn?

IV-21 Jiný otec rovněž spěchá oslavit společné narozeniny třech synů, na otázku přítele tentokrát odpoví, že součet let synů je 24. Na žádost přítele o další informace však již přidá jen závěrečnou informaci z předchozí hádanky, totiž, že nejmladší syn měl minulý týden rýmu. A přítel je uspokojen! Otázka pro vás, vážený čtenáři: odehrál se popsaný hovor v létě, nebo v zimě? — Otázka jen vypadá nesmyslně, lze ji zodpovědět.

IV-22 V jedné televizní soutěži se prý nakonec rozhodovalo, zda výherce získá skutečnou cenu, nebo jen cenu útěchy. Měl si vybrat mezi třemi dveřmi, za jedněmi byla skutečná cena, za dvěma dveřmi jen cena útěchy. Poté, co zvolil (avšak neotevřel) dveře, otevřel moderátor (jenž věděl, co se za kterými dveřmi nachází) jedny ze zbývajících dveří a ukázal, že za nimi je skutečně jen cena útěchy. Výherce se poté mohl rozhodnout, jestli otevřete zvolené dveře, nebo volbu změní a otevře druhé zavřené. Bylo pro něho výhodné změnit volbu, neměnit ji, nebo to bylo jedno?

IV-23 Máme dvě osudí, první obsahuje dvě černé a tři bílé kuličky a ve druhém osudí jsou dvě černé kuličky a jediná bílá. Náhodně zvolíme osudí a náhodně z něho vybereme kuličku. Je pravděpodobnější, že vybereme černou kuličku, nebo je pravděpodobnost výběru černé kuličky stejná jako pravděpodobnost výběru kuličky bílé?

IV-24 Se společníkem hrajete následující hru: společník bude postupně otáčet karty v celém a dobře zamíchaném paklíčku karet a vy můžete kdykoli říci „dost“; pak následující otočení karty rozhodne o vítězi — bude-li karta červená (kára nebo srdce), zvítězil jste, v opačném případě jste prohrál (pokud vůbec neřeknete „dost“, rozhoduje poslední karta v paklíčku). Řeknete-li „dost“ před obrácením první karty, máte stejnou pravděpodobnost výhry jako váš společník. Umíte najít strategii, která zvýší pravděpodobnost vaší výhry?

IV-25 A nyní jedna strašně známá hádanka. Lovec je sto metrů přesně na jih od medvěda, jenž se nepohybuje. Lovec ujde sto metrů na východ, pak se otočí přesně na sever a zastřelí tohoto medvěda. Jakou má medvěd barvu?

Řada známých hádanek koluje mezi matematiky, někdy se setkáte s již známou hádankou v novém převleku, o většině zde sebraných hlavolamů již nevím, kdy a kde jsem se s nimi seznámil poprvé (některé pocházejí ze [Sm1]). Při shánění hádanek a hlavolamů pro závěr této knížky jsem však získal několik nových mezi kolegy z ústavu a od svých dětí; všem děkuji. Navíc jsem se setkal s následujícími dvěma hádankami poprvé na http://www.hadanky.chytrak.cz. Dovolím si je reprodukovat a upozorňuji, že na uvedené adrese jsou jednak další hezké hádanky, varianty našich hádanek a někdy je zajímavá i diskuse ukazující obtížnost té které hádanky.

IV-26 Pětice pirátů uloupila poklad, přesně sto zlatých. Piráti mají zvláštní způsob, jak rozdělit kořist: Nejstarší navrhne, jak by kořist rozdělil on; pak všichni hlasují. Pokud návrh získá nadpoloviční většinu, je přijat; pokud ji nezíská, tak ostatní navrhujícího zabijí a vše začíná znova, jen je o piráta méně. Všichni piráti jsou v tomto dělení velmi zběhlí, nikdy si nedovolí porušit pravidla. Každému pirátovi jde v první řadě o jeho vlastní život, ve druhé řadě o získání co největšího majetku a pokud některé jeho hlasování neohrozí jeho život ani nesníží zisk, tak rád uškodí jinému. Jaký návrh má předložit nejstarší pirát ostatním?

IV-27 Na stole je tác, kterým je možno volně otáčet, a na něm jsou čtyři mince rozmístěné v rozích čtverce. Na mince nevidíte, jejich rub a líc hmatem nerozeznáte. Mince můžete převracet (měnit panna–orel), nesmíte je však přemisťovat. Vaším úkolem je otočit mince tak, aby všechny byly pannou navrch. Po každé vaší úpravě, která nesplnila úkol, však partner zatočí tácem. Nemůžete spoléhat na náhodu, máte jen omezený počet pokusů (řekněme sto). Navrhněte strategii pro splnění úkolu.

IV-28 Na pozemku tvaru čtverce o straně 2 km je v přímce zakopán kabel (nevylučuje se, že kabel prochází jen vrcholem pozemku). Kabel chcete objevit (v kterémkoli bodě), avšak s co nejmenším kopáním. Každý jednotlivý výkop je úsečkou, může jich být řada a nemusí na sebe navazovat. Můžete si být *jist* nalezením kabelu, jestliže nemáte prostředky na kopání delší než 5,4 km?

IV-29 Všichni tři princové jsou chytří, král však chce za následníka jmenovat nejinteligentnějšího z nich. Ukáže jim tři červené a dva modré klobouky. Pak zhasne, nasadí jim na hlavy červené klobouky, modré uklidí a rozsvítí. Princové vidí, co mají na hlavě ostatní bratři, a ten, který *logickou úvahou* zjistí barvu klobouku na své hlavě, se stane následníkem. Po nějaké době se nejstarší podívá na své bratry a poté se zvedne s prohlášením, že má na hlavě červený klobouk. Jak na to přišel? Návod: Nedaří-li se vám najít odpověď, řešte nejprve úlohu se dvěma bratry, dvěma klobouky červenými a jedním modrým.

IV-30 Deset jedů je očíslováno čísly 1–10, protijedem je vždy jed s (jakýmkoli) vyšším číslem. Za hodinu se máte setkat s protivníkem, oba přinesete sklenku s jedem, vyměníte si je a vypijete. Problém je v tom, že vy máte jen lahve s jedy

1– 9 a váš protivník má jedy 2– 10. Využijte část z té hodiny přemýšlením, jak se zachránit.

Řešení následujících dvou zajímavých úloh se bohužel neobejde bez řady (velmi lehkých) numerických výpočtů, pročež je píšeme petitem.

IV-31 Myslím si dvě čísla od 2 do 99. Adamovi (A) řeknu jejich součin, Bohoušovi (B) jejich součet. Vy slyšíte následující rozhovor:

A1: Nevím, která čísla si myslel.
B1: Věděl jsem, že to nebudeš vědět.
A2: Teď už vím, co je to za čísla.
B2: Tak já už taky.

Která čísla jsem si myslel?

Návod: Ukažte, že v důsledku první Bohoušovy odpovědi je součet myšlených čísel některé z čísel:

$$(i) \qquad 11, 17, 23, 27, 29, 35, 37, 41, 47, 51, 53.$$

IV-32 Myslím si dvě čísla od 1 do 99. Adamovi (A) řeknu jejich součin, Bohoušovi (B) jejich součet. Vy slyšíte následující rozhovor:

A1: Nevím, která čísla si myslel.
B1: Věděl jsem, že to nebudeš vědět.
A2: Ani teď nevím, která čísla to jsou.
B2: Věděl jsem, že ani nyní to nebudeš vědět. Pokud ani teď ta čísla neznáš, řekni mi alespoň, kolik teď máš možností!
A3: To ti neřeknu, jen ti sdělím, že pořád nevím, která čísla to jsou.
B3: Nyní už ta čísla znám.

Která čísla jsem si myslel?

Návod: Ukažte, že v důsledku první Bohoušovy odpovědi je součet myšlených čísel některé z čísel:

$$(ii) \qquad 5, 7, 9, 10, 11, 13, 15, 16, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 35, 37, 41, 43, 45, 47, 49, 53$$

a že po první větě druhého Bohoušova proslovu se počet možných součtů sníží na čtyři:

$$(iii) \qquad 7, 11, 13, 17.$$

§2

DODATEK O KOŘENECH LOGIKY

Při zkoumání vývoje deduktivního myšlení na podkladě geometrie je třeba konstatovat, že pro starověké Egypťany byla geometrie vědou empirickou, užívanou pro praktické účely (např. při vyměřování polí po záplavách Nilu a při vytyčování čtvercových půdorysů pyramid). První důkazy v geometrii jsou přisuzovány **Thalétovi z Mílétu** (640-537 př. Kr.), systematičtější rozvoj pak **Pýthagorovi** (narozen 580-570, zemřel na přelomu šestého a pátého stol. př. Kr.) a jeho škole. Pýthagorejci nevyžadovali důkazy jako posloupnosti dokazatelných tvrzení, důkazy spíše „viděli". Důkazy v moderním pojetí (včetně snahy o vymezení axiomatického systému na počátku zkoumání) nacházíme v **Eukleidových Základech**. Poznamenejme, že již před Eukleidem (315–271 př. Kr.) byly napsány knihy o geometrii, pravděpodobně s různými systémy axiomů, tyto spisy se však nedochovaly (nejspíše z důvodu, že nedosahovaly kvality Eukleidova spisu; ukazují však na ně citace v dílech Platóna, Aristotela a zejména Aristotelova žáka Eudéma z Rhodu. Rozdíl mezi „nahlédnutím důkazu" a důkazem jako posloupností tvrzení je ilustrován cvičeními II-2.24 a II-2.25 (včetně uvedení možných námitek proti „pouhému náhledu z obrázku").

O dvou nejzajímavějších paradoxech (lhář a paradox hromady resp. plešatého muže) příslušníka megarské školy Eubúlida z Mílétu (4. stol. př. Kr.) jsme pojednali v textu, jiné jeho paradoxy jsou spíše hříčkami[1]. Paradoxy[2] z doby před Aristotelem pocházejí od **Zénóna z Eleje** (snad 490–430 př. Kr.). Tento filozof však k rozvoji logiky měl přispět zejména výslovným užíváním důkazu sporem; nadto je mu připisováno i vědomé používání dalších významných zákonů logiky: tranzitivity implikace a zákona transpozice.

Platón (427–347 př. Kr.) sice nechtěl rozvíjet logiku pro ni samu, přesto však neobyčejně napomohl jejímu vzniku tím, že rozvinul filozofii logiky: otázky pravdivosti a správnosti vyvození. Navíc uvádí odvozovací pravidlo modus tollens a princip typu[3] „jestliže z předpokladu $\mathcal{A}$ plyne negace $\mathcal{A}$, pak platí negace $\mathcal{A}$".

Abychom si uvědomili, jak podrobně se otázkou pravdivosti tvrzení zabývali v antice, citujme volně jednu z myšlenek zajímavého fragmentu Dissoi Logoi pocházejícího

[1] Rohatý: Co jsi neztratil, máš; neztratil jsi rohy, máš tedy rohy. Zahalený: má za podklad báji o Élektře a Orestovi — Élektra zná svého bratra Oresta, před ní ale stojí zahalený Orestés, kterého nezná jako svého bratra; nezná tedy, co zná.

[2] Zénónovy paradoxy mají zejména prokázat nemožnost pohybu — nejznámější jsou letící šíp: než šíp uletí celou dráhu, musí uletět polovinu, předtím čtvrtinu, atd. a v jednom okamžiku nemůže být na více místech; co je však na jednom místě, to stojí; letící šíp tedy v každém okamžiku svého (údajného) pohybu stojí; Achilleus a želva: Achilleus nedohoní želvu, poněvadž když doběhne na místo, kde před okamžikem byla, ona tam již není a je opět před ním — i když o menší vzdálenost.

[3] Tento princip se většinou uvádí jako Claviův zákon.

z konce pátého nebo počátku čtvrtého stol. př. Kr., asi megarského původu: Posloupnost slov „Jsem první.“ pronesená vítězem je pravdivá a současně táž posloupnost slov vyslovená poraženým je nepravdivá. Pravdivost tudíž nenáleží posloupnosti slov, avšak tomu, co je jí míněno[4)].

*

Uvedli jsme, že za zakladatele logiky[5)] je všeobecně uznáván **Aristotelés** (384–322 př. Kr.), jenž dokonce píše, že „v oboru tohoto našeho zkoumání ... nebylo započato vůbec nic“. To je pravdivé pokud uvažujeme systematické zkoumání predikátového počtu, nicméně výše jsme uvedli, že první formulace zákonů logiky se objevují již před Aristotelem.

Hlavní přínos Aristotela pro logiku spočívá v systematickém popisu sylogismů v Prvních analytikách (viz [A1]); tuto problematiku jsme předvedli v prvním a třetím paragrafu druhé kapitoly. V Aristotelových pracech je však možno najít i další zákony logiky. Například sylogismus b***a***rb***a***r***a*** je vlastně zákon tranzitivity implikace formulovaný ve tvaru sylogismu. Zákon transpozice, avšak i jeho obrácení, tj. axiom **VP3,** je formulován v [A2] na příkladech, avšak je zřejmé, že zákon $(\mathsf{p} \to \mathsf{q}) \equiv (\neg\mathsf{q} \to \neg\mathsf{p})$ chápe Aristotelés jako obecný princip. Současně však tamtéž upozorňuje na nesprávnost implikace $(\mathsf{p} \to \mathsf{q}) \to (\neg\mathsf{p} \to \neg\mathsf{q})$. Zákon vyloučeného třetího a vyloučení sporu předkládá Aristotelés zejména v [A3], navíc Aristotelés formuluje i důkaz sporem a připisuje ho Zénónovi. Náš popis výsledků nerespektuje časové pořadí vzniku, pokládá se za jisté, že První analytiky jsou nejpozdější Aristotelovou logickou prací.

Motto druhé kapitoly je z Aristotelových Topik (téměř doslovné znění se vyskytuje i v první kapitole Prvních analytik) a celá myšlenka zní: „Sylogismus je řeč, v níž, je-li něco dáno, nutně něco jiného, různého od toho, co je dáno, prostřednictvím daného vyplývá.“. Uvědomme si, že Aristotelův popis je obecnější a zahrnuje nejen sylogismy v pojetí našeho textu, avšak vztah důsledku (tzn. předmět logiky) zcela obecně (což odpovídá tomu, že Aristotelův vícevýznamový pojem „sylogismus“ zúžilo až pozdější přetlumočení). V citátu je obtížně přeložitelné slovo „řeč“ ($\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$), rozbor chápání tohoto slova v textu ukazuje, že Aristotelés se nechce omezit pouze na *vyslovené* myšlenky, ale připouští také soudy probíhající pouze v mysli, což ospravedlňuje rovněž překlad „rozumový úkon“.

Aristotelovo pojetí logiky není jen prvním systematickým popisem lidských úsudků, ale hluboce ovlivnilo celou logiku až do současnosti. Na Aristotela navazuje Theofrastos z Eresu (asi 371–286 př. Kr., pokládaný také za zakladatele

---

4) Na druhé straně si uvědomme, že různé posloupnosti slov mohou mít týž význam (např. když dnes řeknu: „Dnes jsem četl.“ a zítra prohlásím „Včera jsem četl.“) a jsou proto současně pravdivé nebo nepravdivé.

5) Název „logika“ v dnešním významu se objevuje až v 3.st po Kr. u Alexandra z Afrodísie, který komentoval a rozvíjel Aristotelovy myšlenky.

botaniky), avšak Aristotelovo učení o sylogismech bylo rozvinuto hlavně ve středověku, kdy bylo i nově formulováno, zejména pro potřeby výuky (scholastika).

*

Souběžně s Aristotelovým zkoumáním predikátového počtu se začíná prohlubovat pochopení výrokového počtu, a to v **megarsko-stoické** škole, kde vynikají zejména Eukleidés z Megary[6)] (†360 př. Kr.), Diodóros Kronos (†307 př. Kr.) a Filón z Megary (kol. 300 př. Kr.). Pokračovateli jsou stoikové Zénón z Kitia (asi 334–262 př. Kr., zakladatel stoické filozofie) a Chrýsippos ze Soloi (asi 281–208 př. Kr.), který je udáván jako poslední z velkých řeckých logiků[7)]. O jeho významu svědčí, že Diogénes Laërtius zaznamenal výrok „Kdyby bohové měli logiku, byla by to Chrýsippova.“.

Antický ironický epigram „I vrány na střechách krákají o povaze implikace.“ komentuje obtíže hledání přesného významu implikace. Formulace, která vede k tabulce pravdivostních hodnot popsané v §1 první kapitoly je připisována Filónovi z Megary, jeho předchůdce Diodóros Kronos má již formulaci velmi podobnou, avšak ještě s jistým omezením. (Víme např., že spor se vedl i o implikaci typu $\mathsf{p} \rightarrow \mathsf{p}$, kterou někteří prohlašovali za nepravdivou, protože podle jejich mínění v pravdivé implikaci má být konsekvent obsažen v antecedentu a nic není obsaženo samo v sobě.) Spor o význam implikace neskončil v antice, táhl se až do dvacatého století včetně. Jednalo se hlavně o problém, zda implikace závisí pouze na pravdivostních hodnotách svých členů, nebo zda konsekvent nutně *musí* souviset s antecedentem. Ve snaze o přesné vymezení byla implikace v prvém významu (tj. ve významu z našeho textu) nazývána *materiální implikací* (na rozdíl od tzv. *striktní implikace*).

V megarsko-stoické škole vyšetřovali více forem disjunkce včetně disjunkce v dnešní podobě a vylučující disjunkce, avšak nadto zkoumali i spojky v našem textu neužívané. Znali vztahy mezi spojkami, např. víme o výslovném uvedení vztahu zapsatelného pomocí ekvivalence $(\mathsf{p} \rightarrow \mathsf{q}) \equiv \neg(\mathsf{p} \,\&\, \neg\mathsf{q})$.

V megarsko-stoické škole byl formulován zákon dvojité negace; Chrýsippos ze Soloi velmi zdůrazňoval zákon vyloučeného třetího. Zejména však se v této škole zajímali o dokazatelnost a popsali axiomatický systém pro výrokovou logiku. Zavedli pět základních principů, zvaných nedokazatelné. (První dva principy odpovídají modus ponens a modus tollens, uveďme ještě třetí: „Ne současně první a druhé, avšak prvé, tedy ne druhé“, tzn. při zápisu v symbolech:

---

6) Doměnky o vlivu Sókrata na vznik logiky podpírá to, že žákem Sókratovým byl jak Platón, tak také Eukleidés z Megary (ten prý byl tak horlivý, že v přestrojení do Athén vstupoval i za války Athén s Megarou, kdy za to hrozil trest smrti; nadto hostil u sebe po smrti Sókratově jeho žáky, když museli uprchnout z Athén). Se Sókratem se za svého pobytu v Athénách seznámil dokonce i Zénón z Eleje, filosof, o jehož příspěvku ke vzniku logiky jsme se zmínili výše.

7) Výsledky megarsko-stoické školy je bohužel nutno rekonstruovat z pozdějších prací, původní práce jsou ztraceny. Navíc většina citátů byla uvedena nepřátelsky naladěnými autory jako podklad pro kritiku.

$\neg(p \ \&\ q), p \vdash \neg q$.) Dále formulovali čtyři odvozovací pravidla, z nichž se dvě dochovala (podrobněji viz např. [Boch] nebo sedmé cvičení první kapitoly [So].) Dokázali „nespočítatelně“ důsledků, zachovalo se jich však jen několik (ty však včetně odvození). Uveďme ze zachovaných jedno pravidlo jako příklad: „Jestliže prvé a druhé, pak třetí; avšak ne třetí; na druhé straně prvé; tedy ne druhé.“ (při zápisu v symbolech: $(p \ \&\ q) \to r, \neg r, p \vdash \neg q$).

*

Z logiků činných krátce po přelomu letopočtu je třeba uvést Galéna (129–199 po Kr., známého zejména jako lékaře), jehož práce je jednak nejlépe dochovanou starověkou učebnicí logiky a jednak obsahuje jak výsledky Aristotelovy, tak také megarsko-stoické školy. Galénos píše, že je třeba se učit oba směry, což není vůbec samozřejmé, protože dřívější autoři většinou chápali uvedené směry za protikladné. Zajímavý je Galénův názor na oblasti, ve kterých by měly být směry aplikovány: Aristotelovy sylogismy považuje za užitečné pro geometrii, megarsko-stoickou logiku za přínosnou pro metafysické otázky typu „Existují bohové?“, „Existuje osud?“.

Z uvedené doby dále zmiňme Apuleia z Medaury (125 po Kr.), Alexandra z Afrodísie (3.stol. po Kr.) a Boëthia (asi 480–524/5), který svými (komentovanými) překlady do latiny zprostředkoval antickou logiku pozdějším učencům.

* * *

Doba středověkého rozkvětu logiky není příliš dlouhá, avšak pro další rozvoj a zejména pro její zpřístupnění studentům je neobyčejně důležitá. Snahou je seznámit se zapomenutými výsledky starší doby nejen vybrané učence, ale i široký okruh studentů; odtud se středověká filosofie nazývá **scholastická** — školská. Následně měly být antické znalosti použity k objasnění a rozumovému uchopení křesťanské nauky.

První předznamenání středověkého rozvoje logiky můžeme hledat u Alkuina (735–804 narozeného v Anglii, proslulého však zejména úsilím o pozvednutí vzdělanosti v říši Karla Velikého, a to skrze poznání antické a byzantské kultury), jenž napsal první středověké pojednání o logice Dialectica. Máme doloženo, že v té době jsou evropským vzdělancům přístupné spisy Boëthiovy a *některé* práce Aristotelovy (další jsou dostupné až v pozdějších stoletích). O zpřístupnění znalostí logiky ze starších dob co největšímu počtu zájemců se přičiňují nejen iršti mniši, avšak i osoby známé ve zcela jiných souvislostech, (např. Gerbert 935-1003, jenž se r. 999 stal papežem a přijal jméno Silvestr II).

Za počátek vlastního středověkého rozvoje logiky je možno označit přednášky a práce Abélardovy (1079–1142, známého také svou milostnou korespondencí s Heloisou), které ovlivnily logiku na několik století. Omezíme-li se jen na vyvozovací pravidla, jedná se opět hlavně o opakování (avšak někdy i opravu) a šíření starších myšlenek. Začíná však předávání znalostí opravdu širokému okruhu studentů (Abélardovy přednášky prý navštěvovalo i 5000 studentů). Pro tyto nové potřeby je třeba látku nově promýšlet a formulovat.

Například po uvedení principů modus ponens a modus tollens ukazuje Abélard, jak je možno jedno pravidlo vyvodit z druhého (při použití běžných pravidel logiky), a zejména systematicky rozebírá chybné úvahy a shrnuje: že z neplatnosti antecedentu nevyvodíme ani platnost ani neplatnost konsekventu, že z platnosti antecedentu nevyvodíme neplatnost konsekventu, že z platnosti konsekventu nevyvodíme ani platnost ani neplatnost antecedentu a že z neplatnosti konsekventu nevyvodíme platnost antecedentu. Právě takováto snaha o systematičnost je pro scholastiku příznačná. I v pořádání přednášek začíná posun: Alkuin se svými žáky se stěhoval spolu s dvorem Karla Velikého, Abélard přednáší v Paříži a jejím okolí.

Při rozboru významů výroků upozorňuje Abélard na dvojí význam slůvka „je“: někdy má význam „existuje“, např. ve výroku „Sókrates je.“ a jindy je pouhou sponou, např. ve výroku „Sókrates je filosofem.“ Druhé chápání umožňuje vyslovit „Chiméra je neskutečná.“ bez nebezpečí vnitřní spornosti výroku.

Další práce Aristotelovy se do Evropy dostaly prostřednictvím Arabů, a jsou proto zpočátku přijímány s jistou nedůvěrou. Tu odstraňuje Albert Veliký (1193–1280, r. 1263 působil v Čechách) svými komentáři. V první polovině třináctého století píše (pravděpodobně v Paříži) William z Shyreswoodu poměrně krátkou práci Introductiones in Logicam, v níž zavádí některé mnemotechnické pomůcky, např. slova b***a***rb***ara*** atd. Mnemotechnické pomůcky vylepšuje a rozšiřuje Petrus Hispanius (1210–1277, od r. 1276 papež Jan XXI, usmrcen sřítivším se stropem) v knize Summulæ Logicales. Teprve ta se stává standardní učebnicí logiky středověku (do poloviny sedmnáctého století měla 166 tištěných vydání).

Sv. Tomáš Akvinský (1225–1274, žák Alberta Velikého) je znám jako zakladatel ve středověku nejpřijímanějšího filozoficko-teologického směru, nicméně ve své práci De Modalibus se zabýval i modální logikou. Také zakladatel druhého nejrozšířenějšího scholastického filozoficko-teologického směru Jan Duns Scotus (1266–1308) se měl zabývat logikou (autorství jeho logických prací je však sporné); o zákonu, jenž se mu připisuje jsme pojednali v prvním paragrafu kap. I. Na závěr zmiňme ještě Wiliama Occama (1295–1349), tvůrce tzv. Occamovy břitvy — principu úspornosti myšlení: „zbytečné je činiti s větším, co lze učiniti s menším“ a pozdějšího Petra Rama (1515–1572), který napsal první knihu o logice francouzsky; protože byl zavražděn o Bartolomějské noci, stala se kniha P. Rama - mučedníka velmi popularní v protestanských zemích.

Anonymní rukopis z počátku čtrnáctého století shrnuje snahy o řešení paradoxu lháře: Někteří tvrdí, že osoba vypovídající, že lže, neříká nic, jiní míní, že fráze „být lež“ nemůže být aplikována na tvrzení, jehož je částí a ještě jiní mluví o relativitě pravdy[8)]. Prvními návrhy se již pootevírá cesta k Russellovu řešení, avšak tato řešení pořád ještě nevylučují paradoxy. Snad jako reakce na navržená řešení byl sestrojen paradox, v němž žádné z tvrzení není aplikováno samo na sebe: Sókrates tvrdí „Platón říká nepravdu.“, Platón tvrdí „Sókrates říká pravdu.“, a žádný z nich netvrdí nic jiného. Tvrdí Sókrates pravdu nebo nepravdu? Jedná se o poněkud složitější formulaci paradoxu, kterým jsme se zabývali v poznámce 11 §2 kap. III, kde jsme také ukázali, že i tento paradox je řešen Russellovým návrhem. (Na počátku 15. stol. zaznamenává Pavel z Benátek

---

8) navazujíce na Aristotelova slova o pravdivých formulích, jež jsou lživé v některých aspektech

15 různých pokusů o řešení, avšak různé hodnoty.)

*

Ve středověku bylo podniknuto několik obdivuhodných pokusů o důkaz existence Boha. Z pozice dnešního pojetí matematické logiky jako „pouhé“ soustavy pravidel správného odvozování a důkazů jako posloupností tvrzení respektujících tato pravidla nemůžeme očekávat, že by bylo možno bez dodatečných předpokladů dokázat (avšak ani vyvrátit) existenci Boha. I dnes však musíme ocenit pokusy sv. Anselma z Canterbury (1033–1109) a sv. Tomáše Akvinského (a neméně Dunse Scota) jako pozoruhodné výkony lidského ducha. Nadto snad nejlépe ukazují scholastickou snahu o zapojení rozumu (a logiky) do teologických úvah. Pozoruhodná je již sama stavba monumentální šestisvazkové Tomášovy Theologické sumy: nejprve je každá otázka přesně formulována, pak jsou shrnuta možná řešení, potom Tomáš uvádí své řešení, které zdůvodňuje, a nakonec uvádí své námitky proti původně citovaným řešením, jež odporují jeho názoru.

Svůj první důkaz existence Boha (tzv. ontologický) uvedl sv. Anselm na počátku Proslogion (viz [An]) jako modlitbu: „Nuže Pane, který dopřáváš víře nahlédnutí, dej mi, nakolik uznáš, abych nahlédl, že jsi, jak věříme, a že jsi to, co věříme, že jsi. Věříme zajisté, že jsi něco, nad co nic většího nelze myslet ... I pošetilec musí uznat, že to, nad co nic většího nelze myslet, je přinejmenším ... v jeho nahlédnutí[9]. Není ovšem možné, aby to, nad co nic většího nelze myslet, bylo pouze v nahlédnutí. Je-li totiž pouze v nahlédnutí, lze myslet, že je také věc sama, což je více ... Existuje tedy nade vší pochyby něco, nad co nic většího nelze myslet, a to jak v nahlédnutí, tak jako věc sama.“ Matematická logika bude zpochybňovat vhodnost pojetí existence jako vlastnosti (predikátu), kterou objekty mají nebo nemají. Důkaz je totiž založen na myšlence, že objekt, který má *vlastnost* existence, skutečně *reálně* existuje (což považuje Anselm za zřejmé — *logicky* dokazatelné). Je však velice zajímavé, že v Gödelově pozůstalosti se nalezl rukopis důkazu Boží existence založený na úvaze souhlasné s Anselmovou a pojatý z hlediska matematické logiky, i když modální logiky druhého řádu (která dovoluje oproti pojetí popsanému v našem textu také kvantifikaci predikátů; podrobněji o Gödelově rukopisu viz [Há2]).

Druhý Anselmův důkaz Boží existence najdeme v Monologiu a jeho základ také ve spise O pravdě přeloženém do češtiny (viz [An]): „... pokud pravda měla počátek anebo bude mít konec: pak dříve než začala, bylo pravda, že pravda ještě není; a až skončí, bude pravda, že pravda již není. Avšak nic nemůže být pravdivé bez pravdy ... pravda nemůže být omezena žádným počátkem ani koncem.“ A Anselm dodává, že totéž se týká nejvyšší bytosti, protože ta je nejvyšší pravdou. Matematický logik připustí logickou rozpornost, poukáže však na samovztažnost obsaženou v úvaze, tzn. na podobnost s paradoxem lháře.

Sv. Tomáš Akvinský uvádí na počátku Theologické summy [TA] pět důkazů existence Boha. Ty jsou různého stupně přesvědčivosti a nadto některé jsou založené na podobné základní myšlence; uveďme proto jen nejčastěji citovaný důkaz: „... není možné, aby něco bylo příčinou účinnou sebe sama, poněvadž tak by bylo dříve, nežli samo jest, což jest nemožné. Není pak možné, aby se v příčinách účinných postupovalo do nekonečna. Neboť ve všech příčinách učinných, seřazených, první jest příčinou prostředního a prostřední je příčinou posledního, ať je prostředních více nebo jen jedno. A není-li příčiny, není účinku. Kdyby tedy nebylo prvního v příčinách účinných, nebude prostředního ani posledního. Avšak kdyby se postupovalo do nekonečna v příčinách účinných, nebude

[9] tj. je myslitelné; zatím se nic netvrdí o existenci

první účinné příčiny, a tak nebude ani posledního účinku … Tedy je třeba stanoviti nějakou příčinu účinnou první, kteroužto všichni nazývají Bohem.“ Přesvědčivost předvedeného důkazu pochopitelně závisí na tom, zda přijmeme předpoklady, na nichž je důkaz založen, zejména zda akceptujeme nemožnost nekonečné posloupnosti příčin.

Zmiňme ještě, že v době, kterou se zabýváme, probíhal několik století velmi vzrušeně spor nominalismu s realismem. Na obou stranách stáli i učenci významní z hlediska logiky (např. Occam a umírněně Abélard na straně nominalismu a jako jejich odpůrci Anselm, Tomáš Akvinský a Duns Scotus) a spor se částečně dotýkal i logiky, avšak podstata sporu je spíše filosofická s teologickými aspekty, a proto se v našem krátkém pojednání omezíme jen na toto konstatování.

* * *

Na cestě od scholastiky k matematické logice je třeba se zastavit zejména u přínosu G. W. **Leibnize** (1646–1716). Z formulovaných principů se jedná zejména o definici rovnosti „Termy jsou stejné, jestliže jeden může být kdykoli chceme nahrazen druhým beze změny pravdivosti jakéhokoli tvrzení. $A = B$ označuje, že A a B jsou stejné.“. Princip je vlastně ekvivalencí, přičemž implikace zleva doprava je matematizována principem důkaz rovností. (Že při matematizaci vystačíme s aplikací Leibnizova požadavku jen na základní formule, tj. s axiomy **R2,3** je již jen technickým zjednodušením.) Ovšem pro obrácenou implikaci bychom potřebovali kvantifikovat formule, což je při našem popisu jazyka nepřípustné (je to dovoleno až při složitějším pojetí v tzv. logice druhého řádu) a proto z této implikace přejímá matematická logika („prvního řádu“) jen triviální důsledek — axiom **R1.**

Leibnizovo chápání pravdy snad popisuje názorně následující citát z jeho Monadologie:

„33. Jsou dále dva druhy pravd, totiž pravdy rozumové a pravdy faktové. Rozumové pravdy jsou nutné a jejich opak je nemožný, faktové pravdy jsou naproti tomu nahodilé a jejich opak je možný. Je-li nějaká pravda nutná, lze ukázat na její důvod prostřednictvím analýzy, rozkládá-li se na jednodušší ideje a pravdy, až se dospěje k původním.

34. Tak se u matematiků převádějí spekulativní poučky a praktické předpisy prostřednictvím analýzy na definice, axiomy a postuláty.

35. Přitom se nakonec dochází k jednoduchým idejím, jejichž definici nelze podat, i k axiomům a postulátům, nebo stručně, k původním principům, jež nejsou schopny důkazu a také ho nepotřebují … “

Leibniz se celý život snažil o vybudování univerzální vědy, v pozdějším věku má představu ji vytvářet pouze jako souhrn základních principů jednotlivých věd, z nichž by se vyvozovaly důsledky pomocí logiky jako v Eukleidových Základech. Toto pojetí pochopitelně vyžadovalo položit velký důraz na logiku, jak ostatně dokládá předchozí citát. Své pojetí logiky označuje Leibniz někdy jako „logica mathematica“.

Spolu s Isaacem Newtonem (1643–1727) položil Leibniz základ novému matematickému směru — matematické analýze. (Pro zájemce o historii zmiňme, že mezi zakladateli vznikl zajímavý spor o prioritu.) Toto odvětví matematiky bylo založeno na pojmu „nekonečně malé veličiny“. Uvedený pojem byl velmi plodný, a v aplikacích diferenciálního a integrálního počtu je užíván dodnes. Současně však postavil před matematiky velice obtížný problém — jak o něj obohatit bezesporně matematiku. Pokud bychom žádali indukci pro formule s pojmem „nekonečně malé veličiny“, byla by teorie sporná: Požadujeme totiž, aby součet dvou nekonečně malých veličin byl opět nekonečně malý. Z tohoto požadavku indukcí pak dovodíme, že součet jakéhokoli konečného počtu nekonečně malých veličin je opět nekonečně malý. Pro jakékoli reálné číslo r existuje vhodné přirozené číslo n tak, že $0 < 1/n < r$. Pak však dostáváme, že $1/n \cdot n = 1 < n \cdot r$. Číslo 1 by bylo menší než nekonečně malé číslo $n \cdot r$, a proto by mělo být rovněž nekonečně malé, což odporuje intuici. Nemůžeme tedy připustit indukci pro všechny formule, naproti tomu požadujeme indukci alespoň v míře běžně užívané pro přirozená čísla. Bez prokázání konzistence pojmu „nekonečně malé veličiny“ nezbylo než chápat analýzu jako pouhou manipulaci se symboly podle určitých pravidel. To samo o sobě ještě nebylo tragédií, protože podobně byla a je chápána i algebra, tu však — na rozdíl od analýzy v té době — umíme zasadit i do bezesporného logického rámce.

Po mnoha neúspěšných pokusech přesně formulovat teorii splňující uvedené požadavky a hlavně prokázat její bezespornost, rozhodli se matematici raději postavit matematickou analýzu na nezpochybnitelný základ a vybudovali ji na pojmu limity (zejména Auguste Luis Cauchy 1789–1857, Bernard Bolzano 1781–1848 a K. T. W. Weirstrass 1815-1897). Tato přestavba proběhla v devatenáctém a na počátku dvacátého století, v praxi se však pojem „nekonečně malé veličiny“ používal i nadále. Až na základě moderních metod matematické logiky navrhl Abraham Robinson v šedesátých letech dvacátého století řešení (viz [Rob]): sestrojil a užil nestandardní model reálných čísel. Ideu nestandardního modelu jsme se snažili naznačit v příkladu 1 §2 kap. III, kde jsme sestrojovali nestandardní model přirozeného modelu aritmetiky. Analogicky sestrojíme i nestandardní model reálných čísel, v něm je splněna indukce pro přirozená čísla přesně ve stejné míře jako v původním modelu reálných čísel. Nekonečně malými veličinami v modelu jsou reálná čísla menší než nějaké $1/\mathfrak{n}$ pro *nestandardní* přirozené číslo $\mathfrak{n}$. Pojem „nestandardní přirozené číslo“ není pojmem modelu a proto pro něj indukce není vyžadována (a ani není splněna; jsme schopni prokázat pouze, že součet *standardního* konečného počtu nekonečně malých veličin je opět nekonečně malý). Nestandardní model reálných čísel tedy prokazuje možnost bezesporně obohatit matematiku o pojem nekonečně malé veličiny. Na základě Robinsonovy myšlenky vznikl nový obor matematiky, tzv. nestandardní analýza.

Druhým myslitelem doby mezi scholastikou a vznikem matematické logiky, kterého nelze pominout, je Bernard **Bolzano.** Byl příslušníkem Českého království, nikoli však Čechem: po otci Ital, po matce Němec. Studoval jak matematiku, tak také teologii a mezi těmito obory se rozhodoval; nakonec se stal knězem a kázal pro pražské studenty. Po neshodách s Vídní o jejich obsah byl suspendován z místa vysokoškolského učitele náboženské nauky a podporován mecenáši se věnoval logice a matematice. Jeho významnou logickou prací je Vědosloví [Bol1], ve které formuluje např. obecnou verzi odvozovacího pravidla, které v našem textu nazýváme důkaz dedukcí.

Přestože jako zakladatel teorie množin je obvykle uváděn George Cantor (1845–1918), je první prací o množinách Bolzanova posmrtně vydaná kniha [Bol2]. Cantor tuto práci znal, teorii zesílil (přidal axom potence) a hlavně ji učinil obecně používanou — všeobecně přijímaným rámcem celé matematiky. Název Bolzanovy knihy „Paradoxy nekonečna“ odráží skutečnost, že přijetím aktuálního nekonečna (nekonečné množiny) obdržíme „divnosti“ se kterými se musíme smířit. Například množina všech přirozených čísel má v jistém smyslu stejný počet prvků jako její vlastní část — přiřadíme-li každému číslu jeho dvojnásobek, získáme vzájemně jednoznačné zobrazení množiny všech přirozených čísel na množinu sudých přirozených čísel.

Bolzanovo přijetí existence nekonečné množiny je tedy krokem do neznáma, a to krokem zásadního významu pro celou moderní matematiku. Pro uskutečnění tohoto převratného činu byl B. Bolzano svými dvěma zájmy předurčen (viz [Bol2]): Zopakujme nejprve úvahu Bolzana-matematika: „... vezmeme-li jakoukoli pravdu ..., kterou označíme $\mathcal{A}$; pak shledáme, že věta, kterou vyjadřujeme slovy „$\mathcal{A}$ je pravdivé' je odlišná od samotné $\mathcal{A}$; neboť tato věta má zřejmě zcela jiný subjekt než ona první. ... Avšak podle téhož zákona, podle něhož z věty $\mathcal{A}$ vyvozujeme od ní větu odlišnou, kterou nazvu $\mathcal{B}$, dá se opět z $\mathcal{B}$ vyvodit třetí věta $\mathcal{C}$, a tak bez konce." A prokázání existence nekonečné množiny dokončuje Bolzano-teolog úvahou „Bohu musíme připsat poznávací schopnost, která je pravou vševědoucností, tedy obsáhne nekonečnou množinu pravd, protože je v sobě obsáhne vůbec všechny." Alespoň jedna nekonečná množina (množina všech pravd) tudíž existuje.

Na přelomu devatenáctého a dvacátého století se řada matematiků zajímala o paradoxy v teorii množin, avšak tato problematika (viz např. [B-Š]) jde nad rámec našeho textu. Zmiňme však, že dohadům, zda jde o podstatnou vadu v pojetí teorie množin, nebo o pouhou nešikovnost některých množinových definic, učinil rázný konec Bertrand **Russell** (1872–1970) publikací svého paradoxu[10)] Snaha o odstranění paradoxů v teorii množin pak podstatnou měrou přispěla ke vzniku axiomatických teorií množin — první byla r. 1908 axiomatika Ernsta Zermela (1871–1956, viz [Ze]), v r. 1922 zesílená Adolfem Fraenkelem (1891–1965, viz [Fra]; stejné zesílení navrhoval již D. Mirimanoff r. 1917 v práci [Mi], ale bez větší odezvy).

Nicméně zcela analogický Russellovu paradoxu v teorii množin, avšak neužívající jazyk této teorie je Grellingův paradox: Některé slova mají vlastnost, kterou popisují (např. „český", „čtyřslabičný" — slovo „český" je české), jiná nikoli („anglický", „dvouslabičný"). Nazvěme vlastnosti ze druhé skupiny „heterologické" a ptejme se, zda samo slovo „heterologický" je heterologické. Zjistíme, že heterologické nemůže ani být, ani nebýt.

Russellův popis důvodu vzniku logických paradoxů a návod jejich odstranění byl popsán v §2 třetí kapitoly.

* * *

Popisem krize teorie množin vyvolané objevením paradoxů této teorie jsme však přeskočili dobu pro nás neobyčejně důležitou — dobu vzniku matematické logiky. Nezbývá než se vrátit o půl století zpět.

V r. 1847 napsal George **Boole** malou knížku Mathematical Analysis of Logic na obranu de Morgana nařčeného z plagiátorství. Text později rozšířil a vydal

10) Množina „všech množin, jež nejsou svými prvky" nemůže svým prvkem ani být, ani nebýt — tento paradox je vlastně do teorie množin přenesenou analogií paradoxu lháře. Je však třeba si uvědomit, že Russell svým rozborem paradoxů prokázal jednak službu teorii množin (tím, že prokázal neudržitelnost původního Cantorova intuitivního pojetí pojmu množiny) a jednak posloužil logice formulací příčiny vzniku paradoxů, což je z pohledu našeho textu mnohem záslužnější.

r. 1854 ve svém hlavním díle [Boo] nákladem vlastním a svého přítele. Boole začíná používat matematických metod na zkoumání logiky. V rámci matematiky vytváří vhodnou algebru a zdůrazňuje, že algebraické operace jsou popsány zvolenými pravidly, která nemusí odpovídat pravidlům operací aritmetických. Při tvorbě algebry je Boole veden ideou průniku a sjednocení tříd, což vede např. k požadavku $x \cdot x = x$, který aritmetice neodpovídá. V rámci algebry vyjadřuje aristotelské „Některé X je Y“ nerovností $x \cdot y \neq 0$. Boole uvažuje také algebru tvořenou dvěma prvky, a tak otevírá cestu k sémantice výrokového počtu.

Podstatné zjednodušení Booleových myšlenek o algebrách navrhl Ch. S. Peirce (1839–1914), jenž také rozvinul metodu pravdivostních hodnot pro výrokový počet. Obecně Booleova metoda připouští mechanizaci, první stroj sestrojil r. 1869 W. S. Jevons.Významný krok k moderní logice učinil de Morgan, který r. 1859 navrhl rozšířit predikátový počet na vícečetné predikáty.

Někdy bývá počátek matematické logiky spojován s prací G. Boola z r. 1847 (nebo s prací de Morgana [Mor], tyto prvotní práce o matematické logice *prý* dorazily k prodejcům do knihkupectví přesně ve stejný den). Většinou se však spojuje její vznik s r. 1879, kdy Gottlob **Frege** (1848–1925) publikoval spis [Fre] o predikátové logice.

V citované práci již Frege v podstatě formuluje logiku v její dnešní podobě. I jeho symbolika — byť zbytečně složitá — umožňuje vyjadřovat všechny formule současné logiky. Axiomatický systém se skládá (kromě axiomů rovnosti odpovídajících našim **R1–R3**) ze čtyř odvozovacích pravidel a sedmi axiomů. Pravidly jsou modus ponens, generalizace, nahrazení a pravidlo dovolující z formule $\varphi \to \psi$ vyvodit formuli $\varphi \to (\forall x)\psi$ za předpokladu, že proměnná x není ve formuli φ volná. Z posledního pravidla vyvodíme mj. náš axiom distribuce **PP5**. Frege přijímá axiomy **PP1, PP2** a **PP4.** Místo axiomu **PP3** volil zákon transpozice a zákony o přidání a vypuštění dvojité ngace (a jeden jeho axiom se ukázal nadbytečný).

Nejčastěji citovaným matematikem v našem textu je Kurt **Gödel** (1906–1978), připojme proto na závěr několik vět o jeho životě. Narodil s v době Rakousko-Uherska v Brně a patřil k německé části obyvatelstva. V r. 1924 odchází na univerzitu do Vídně. O ukončení československého občanství žádá v r. 1929 a téhož roku se stává občanem rakouským. V r. 1940 odjíždí definitivně do USA. Jako matematik dosahuje slavné výsledky v logice a teorii množin. V USA se věnuje také fyzice (vědecká spolupráce a osobní přátelství s Albertem Einsteinem) a rovněž v teorii relativity dosahuje pozoruhodných výsledků.

ROZLOUČENÍ

Počátek moudrosti je:
Snaž se získat moudrost,
za všechno své jmění získej rozumnost.
Kniha Přísloví 4, 7

Končíme knihu, ve které jsme se pokoušeli naznačit myšlenkové bohatství a krásu matematické logiky a pootevřít čtenáři dveře k dalšímu poznávání této disciplíny. Autor bude šťasten, pokud jeho kniha bude čtenáře inspirovat k hlubšímu zájmu o logiku.

Vraťte se nyní, vážený čtenáři, na začátek knihy, do ne-předmluvy, a po jejím prolistování odejděte příslušným výstupem (autor doufá, že teď to bude výstup B).

ŘEŠENÍ CVIČENÍ, HÁDANEK A HLAVOLAMŮ

I-1.1 Nepomohl, protože negace výroku „Pokud je obžalovaný vinen, pak měl společníka." je tvrzení „Obžalovaný je vinen a neměl společníka." (viz tabulku 2 §1 kap. I).

I-1.2 Pouze (a) je formulí; (b) ve dvojici závorek ve formuli vždy levá předchází pravé; (c) zápis není správně uzávorkován, není určeno, zda proměnná q je antecedentem následující implikace nebo konsekventem předcházející implikace; (d) znaky $\neg\ \rightarrow$ nemohou následovat okamžitě po sobě, zápis $p\neg$ ani zápis $\rightarrow q$ není formulí; (e) zápis $(\rightarrow)$ nemůže být součástí formule, protože kolem symbolu $\rightarrow$ musí být formule a žádná formule nekončí znakem (a žádná nezačíná znakem).

I-1.3 Tautologiemi jsou formule (b) a (c); formule (a) je nepravdivá jsou-li p i q pravdivé; formule (d) je nepravdivá je-li p pravdivá a současně q nepravdivá.

p	q	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow \neg q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$	$\neg p$	$\neg p \rightarrow q$	$\neg q \rightarrow p$	$(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$
0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1	1	1

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg(p \rightarrow q)$	$\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p$	$\neg(p \rightarrow q) \rightarrow q$
0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1	1

I-1.4 Formule je nepravdivá, jsou-li nepravdivé všechny tři proměnné p, q a r. Závěrečná proměnná r v tomto cvičení není relativizována proměnnou p, ve formuli vyjadřující tranzitivitu implikace ano.

I-1.5 Zlatou — kdyby podobizna byla ve stříbrné skřínce, byly by na ní oba nápisy nepravdivé; kdyby byla v olověné, musel by být podle nápisů na zlaté skřínce portrétista z Benátek a na olověné by byly oba nápisy nepravdivé; jestliže je podobizna ve zlaté, jsou na stříbrné a olověné skřínce pravdivé první výroky (na stříbrné dokonce i druhý), na zlaté je pravdivý druhý výrok.

I-1.6 Opět vybereme zlatou — kdyby byla podobizna ve stříbrné, byly by všechny výroky na zlaté i stříbrné skřínce nepravdivé; kdyby byla v olověné, byl by na stříbrné i olověné skřínce přesně jeden výrok pravdivý; je-li ve zlaté, je na ní jeden výrok pravdivý a jeden nepravdivý, na stříbrné skřínce jsou oba výroky pravdivé a na olověné skřínce jsou oba výroky nepravdivé.

I-1.7 Zvolíme olověnou skřínku. Kdyby byl portrét ve zlaté skřínce, byl by na zlaté i olověné skřínce přesně jeden pravdivý nápis a na stříbrné skřínce by byly oba nápisy pravdivé. Pokud by se portrét nalézal ve stříbrné skřínce, byly by všechny nápisy na zlaté a stříbrné skřínce nepravdivé. Pokud je portrét ukryt v olověné skřínce, jsou oba nápisy na zlaté skřínce pravdivé a oba nápisy na olověné nepravdivé a na stříbrné skřínce je přesně jeden nápis pravdivý.

I-1.8 Kdyby byl druhý pravdomluvný, byl by první lhář (pravdomluvný by nemohl výrok vyslovit v okamžiku, kdy první a druhý mluví pravdu), a tedy by třetí nemohl být lhář (neboť výrok „Mezi námi je jediný pravdomluvný.“ má být lží); výrok třetího, že druhý lže, je však nepravdivý. Druhý je tedy lhář. Třetí mluví pravdu, když jej prohlašuje za lháře.

I-1.9 Pravdomluvný je právě druhý bratr (první nemůže být pravdomluvný, protože sám sebe prohlašuje za lháře; kdyby byl druhý lhář musil by být vzhledem k výroku prvního třetí pravdomluvný a výrok druhého by byl pravdou, což se lháři stát nesmí; druhý je tudíž pravdomluvný). Při změněném zadání je lhářem první z bratří, třetí mluví pravdu a o druhém neumíme rozhodnout (první je opětovně určitě lhářem; je-li druhý lhářem, je třetí opět pravdomluvný jako v první části; pokud mluví druhý pravdu, je lhářem jen první z bratří, takže třetí je znovu pravdomluvný).

I-1.10 Kdyby odpověď zněla „Ano.“ mohl by být buď první pravdomluvný, nebo oba dva lháři. Neznal byste tedy odpověď na svou otázku. Odpověď musela znít tudíž „Ne.“ Pravdomluvný by však tuto odpověď nemohl dát. První je tedy lhář. Když říká „Ne.“ musí být pravda „Ano.“, takže druhý z bratří je pravdomluvný.

I-1.11 Například se zeptáte: „Shodujete se s bratrem v tom, že oba vždy mluvíte pravdu, nebo oba nikdy pravdu neřeknete?“

Jsou-li oba bratři pravdomluvní, je odpověď „ano“, jestliže jsou oba lháři, je odpověď „ne“. Pokud je dotázaný pravdomluvný a druhý lhář, dostaneme odpověď „ne“ a v posledním případě, kdy dotázaný je lhář a druhý bratr je pravdomluvný, uslyšíme „ano“. Takže nezávisle na povaze dotázaného je druhý pravdomluvný, právě když odpověď zní „ano“.

I-1.12 Kdyby promlouval lhář, musila by být implikace „Jsem-li pravdomluvný, je pravdomluvný i můj bratr.“ nepravdivá, což nastává jen tehdy, je-li antecedent pravdivý a současně konsekvent nepravdivý. Nyní však předpokládáme, že promlouvající je lhář, pročež antecedent nemůže být pravdivý. Proto je bratr, který mluví, zcela určitě pravdomluvný. Navíc, jestliže mluví pravdu, když říká „Jsem-li pravdomluvný, je pravdomluvný i můj bratr.“, musí být pravdomluvní oba.

I-1.13 Z předchozího cvičení již víme, že ten z bratří, který vyřkne implikaci s antecedentem „Jsem-li pravdomluvný“, je určitě pravdomluvný. Takže chybějící slovo ve výpovědi prvního bratra zcela nezbytně bylo „čtyři“.

Kdyby druhý z bratří byl lhář, měla by být implikace „Jestliže jsem lhář, dva a dva jsou ... “ nepravdivá. Avšak její antecedent je pravdivý, tudíž konsekvent je nezbytně nepravdivý. Je-li druhý bratr lhář, určitě řekl „tři“. Naproti tomu jestliže je druhý bratr pravdomluvný, mohl říci jakékoli číslo, neboť antecedent není pravdivý. Nemůžeme proto rozhodnout ani o pravdomluvnosti druhého bratra ani o slově, které vyslovil.

Třetí bratr nemůže být lhář, protože jeho první výrok je antecedentem výroku druhého; pokud by byl první výrok nepravdivý, byl by druhý zcela jistě pravdivý, což není u lháře přípustné.

I-1.14 Kdyby byl bratr, jenž mluví, lhář, byl by konsekvent výroku „Je-li můj bratr pravdomluvný, jsem lhář.“ pravdivý a tedy by ho lhář nemohl pronést. Promlouvající bratr je proto pravdomluvný, konsekvent jeho tvrzení je nepravdivý, pročež je určitě i antecedent tohoto výroku nepravdivý a následně je druhý bratr lhář.

I-1.15 Je-li první bratr pravdomluvný, je pravdomluvný i druhý, takže jeho tvrzení „Pokud je první bratr pravdomluvný, je pravdomluvný i třetí.“ je pravdivé, pročež je rovněž třetí bratr pravdomluvný.

Před okamžikem jsme prokázali tvrzení „Pokud je první bratr pravdomluvný, je pravdomluvný i třetí.“, takže druhý bratr, který toto tvrzení pronesl je nutně pravdomluvný. V takovém případě však říká pravdu i první bratr.

I-1.16 Zebra míří do Brna, žirafa do Prahy a velbloud do Olomouce.

I-1.17 Zebra jede do Olomouce, žirafa do Brna a velbloud do Dvora Králové.

I-1.18 Tomáš Bílý nosí stan; Petr Červený nosí sekerku.

I-1.19 Nikoli, zadání je sporné.

I-1.20 Petr Bílý je nejmenší. Tomáš je největší a nosí kotlík. Velikost nositele sekerky nelze určit, protože možná řešení jsou (například) „nejmenší Petr Bílý nosí stan, prostřední Jan Modrý nosí sekerku a největší Tomáš Červený nosí kotlík“ a také „nejmenší Petr Bílý nosí sekerku, prostřední Jan Červený nosí stan a největší Tomáš Modrý nosí kotlík“.

I-1.21 Přidání (5) zaručí, že Jan nosí stan a Petr sekerku, podle (3) se největší Tomáš musí jmenovat Modrý. Jediné možné řešení je uvedeno v řešení předchozího cvičení jako druhé.

I-1.22 Cyklista Tomáš Modrý je nejmenší a nosí sekerku; vodák Jan Červený je největší a nosí stan.

I-1.23 Jana má ráda matematiku a má černé vlasy; barvu vlasů Evy ani její oblíbený předmět nelze určit. — Prokázali jste si neurčitelnost barvy vlasů Evy a jejího oblíbeného předmětu sestrojením alespoň dvou možných řešení našeho zadání, ve kterých tyto vlastnosti Evy liší?

I-1.24 Jana má ráda angličtinu a růže a má hnědé vlasy, Eva miluje matematiku a slunečnice a je světlovláskou.

I-1.25 Nejmladší Marie má ráda dějepis a růže a je černovláskou; nejstarší Jana miluje angličtinu a kopretiny a má hnědé vlasy.

I-1.26 Pavel hraje na housle a miluje Kunderu. Údaje o ostatních jsou také zadány jednoznačně: Petr hraje na violoncello a obdivuje Čapka, Josef je basistou a má rád Seiferta a Antonín hraje na violu a preferuje Haška.

I-1.27 Antonín hraje na basu a má rád Moneta, Haška a baroko. Úloha má jediné řešení:

Pavel:	viola,	van Gogh,	Seifert,	gotika;

Petr:	violoncello,	Cézane,	Čapek,	renesance;
Josef:	housle,	Gauguin,	Kundera,	románský sloh;
Antonín:	basa,	Monet,	Hašek,	baroko.

I-1.28 Celkové řešení zleva do prava:

Antonín:	basa,	Guaguin,	Hašek,	renesance;
Josef:	housle,	Monet,	Kundera,	románský sloh;
Petr:	viola,	Cézane,	Čapek,	gotika;
Pavel:	violoncello,	van Gogh,	Seifert,	baroko.

Přidáme-li slovo „hned“ do jedenácté podmínky, nezmění se nic na řešení, pouze přidáváme nadbytečnou informaci; naše řešení přidané podmínce vyhovuje. Naproti tomu dodání téhož slova do osmé podmínky činí systém podmínek sporný, řešení neexistuje.

I-1.29 Uvažte, že ze systému předpokladů $[p \to (q \to r)], p, q$ je dvojnásobným užitím modus ponens dokazatelné r. Poté trojnásobně užijte důkaz dedukcí.

I-1.30 Nahraďte proměnnou p formulí $\neg p$ a použijte tranzitivitu implikace na formule $p \to \neg\neg p$ a $\neg\neg p \to (\neg p \to q)$.

I-1.31 $(q \to r), (\neg p \to r), (p \to q), p \vdash q$ (modus ponens),
$(q \to r), (\neg p \to r), (p \to q), p \vdash r$ (předchozí výsledek a modus ponens),
$(q \to r), (\neg p \to r), (p \to q), \neg p \vdash r$ (modus ponens).

Jako neutrální formuli (tj. jako formuli $\mathcal{A}$ z odvozovacího pravidla důkaz neutrální formulí) použijme proměnnou p.

I-1.32 Ano. Důkaz implikace $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ze systému předpokladů $\mathcal{T}$ je tím spíše důkazem ze systému předpokladů $\mathcal{T}, \mathcal{A}$. Ze druhého systému je pochopitelně také dokazatelný předpoklad $\mathcal{A}$; takže stačí použít modus ponens.

I-1.33 Ano. Je-li ze systému předpokladů $\mathcal{T}$ dokazatelná formule $\mathcal{A}$, je formule $\mathcal{A}$ dokazatelná tím spíše ze systému předpokladů $\mathcal{T}, \neg\mathcal{A}$. Z posledně zmíněného systému je dokazatelný rovněž předpoklad $\neg\mathcal{A}$.

I-1.34 Kočku. Řešení (obyvatelé domů psáni zleva doprava): Angličan chová psa a žije ve žlutém domě, Nor má kočku a červený dům, Němec se stará o ptáka a zelený dům, Švéd chová zebru a obývá bílý dům a konečně Dán má koně a modrý dům.

I-1.35 První otázka: Angličan.

Druhá úloha má dvě řešení: Dán nebo Němec. Tato řešení získáme dvěma možnými doplněními tabulky

Angličan:	zelený dům,	pták,	minerálka,	volejbal;
Švéd:	žlutý dům,	pes,	káva,	šachy;
Nor:	modrý dům,	zebra,	mléko,	fotbal;
Dán:	bílý dům,		čaj,	plavání;
Němec:	červený dům,		pivo,	tenis;

o koně a kočku.

I-1.36 Němec; uvedené řešení respektuje pořadí domů zleva doprava:

Žlutý dům:	Nor,	minerálka,	fotbal,	kočka;
Modrý dům:	Dán,	čaj,	šachy,	kůň;
Červený dům:	Angličan,	mléko,	volejbal,	pták;
Zelený dům:	Němec,	káva,	tenis,	zebra;
Bílý dům:	Švéd,	pivo,	plavání,	pes.

I-2.1 Nápis na zlaté skřínce je určitě nepravdivý, druhé dva musí být pravdivé. Portrét je v olověné skřínce.

I-2.2 Odpověď je stejná jako v předchozím cvičení, protože nápis na zlaté skřínce je nepravdivý, pročež „nejvýše jeden nápis není pravdivý“ má stejný význam jako „přesně jeden nápis není pravdivý“.

I-2.3 Ve stříbrné skřínce podobizna být nemůže, protože v takovém případě by byly pravdivé nápisy na stříbrné i olověné skřínce. Kdyby byla podobizna v olověné skřínce, nebyl by pravdivý žádný z nápisů. Takže podobizna musí být ve zlaté skřínce.

I-2.4 Vynecháním zkoumané podmínky se úloha 6 nestane řešitelnou, i když zdůvodnění je malinko obtížnější než to, jenž bylo uvedeno v poznámce u6. Dá-li Porciina vnučka podobiznu do zlaté skřínky, bude nápis na stříbrné skřínce pravdivý, vnučka by tudíž musela zajistit, aby nápis na zlaté skřínce pravdivý nebyl, takže by byla povinna vložit podobiznu i do stříbrné skřínky. Pak by však nápis na olověné skřínce byl pravdivý, což je zadáním vyloučeno. Ukázali jsme, že ani při změněném zadní není možno skrýt podobiznu do zlaté skřínky. Schování podobizny do stříbrné není možné, neboť pak by byly pravdivé nápisy na stříbrné i olověné skřínce. Uložení podobizny do olověné skřínky a zanechání zbývajících skřínek prázdných je vyloučeno úvahami uvedenými v poznámce u6. Pokud jsou všechny skřínky ponechány prázdné, jsou všechny nápisy nepravdivé.

I-2.5 Oba pravdomluvní (lhář nemůže říci „Buď jsem lhář nebo ....“, neboť by to byla pravda).

I-2.6 Oba lháři (pravdomluvný nemůže prohlásit „Já jsem lhář a ...“).

I-2.7 Třetí bratr je lhář, o prvních dvou nelze rozhodnout, zda jsou pravdomluvní nebo lháři.

I-2.8 Kdyby byl první bratr pravdomluvný, byl by pravdomluvný i druhý, ten však prohlašuje prvního za lháře. Takže první bratr je lhář. Pročež cesta vede doleva nebo je druhý bratr lhář. Ve druhém případě je výrok „Bratr je lhář a vaše cesta vede doprava.“ nepravdivý. První konjunkt však pravdivý je, musí být proto nepravdivý druhý konjunkt. Naše cesta tedy opravdu vede doleva.

Na druhém rozcestí je první bratr zcela jistě lhář (pravdomluvný nemůže říci „Oba jsme lháři a vaše cesta vede doprava.“), druhý s výpovědí souhlasí, je proto také lhář. První konjunk výpovědi prvního bratra je tudíž pravdivý, takže nepravdivý musí být druhý konjunkt. Jdeme vlevo.

Na třetím rozcestí první bratr nemůže být pravdomluvný, protože druhý s ním souhlasí, musel by být také pravdomluvný, avšak první konjunkt z výpovědi prvního bratra „Alespoň jeden z nás je lhář.“ to vylučuje. Zmíněný konjunkt je proto pravdivý a nepravdivý musí být druhý konjunkt. Jdeme zase doleva.

Stejně jako na druhém rozcestí je na čtvrtém první z bratří lhář. Jestliže je druhý bratr pravdomluvný, máme jít doleva. Je-li lhář, je první konjunk tvrzení prvního bratra pravdivý, takže nepravdivý je nutně druhý konjunkt. Naše cesta pokračuje tudíž opět vlevo.

Význam tvrzení bratří na předposledním rozcestí je týž jako na čtvrtém rozcestí. Pročež musí být stejný i důsledek: jdeme znovu doleva.

Kdyby na posledním rozcestí byl první bratr pravdomluvný, vedla by naše cesta doprava nebo by byl pravdomluvný i druhý bratr; v případě pravdomluvnosti obou bratří je však první disjunkt z tvrzení druhého nepravdivý, takže by musel být pravdivý druhý disjunkt, pročež v případě pravdomluvnosti prvního bratra máme jít určitě doprava. Pokud je první bratr lhář, jsou nepravdivé oba disjunkty jeho výpovědi, tedy i druhý bratr je lhář; to však není možné, protože ten po pravdě vypovídá, že první bratr je lhář. Na závěr naší cesty vykročíme vpravo.

I-2.9 Zebra jede do Dvora Králové, velbloud do Brna a antilopa do Olomouce.

I-2.10 Že si z nás někdo dělá legraci, systém podmínek je sporný.

I-2.11 Jana má ráda matematiku a je černovláskou; Marie dává přednost dějepisu a má světlé vlasy.

I-2.12 Ano. Jana má světlé vlasy a miluje angličtinu a růže; Marie je černovláskou a má ráda dějepis a slunečnice.

I-2.13 Zcela jistě víme pouze, že Marie má ráda růže. Možná řešení:
Nejmladší Eva je černovláskou a má ráda matematiku a slunečnice. Nejstarší Marie má hnědé vlasy a miluje dějepis a růže.
Nejmladší Eva má černé vlasy a má ráda angličtinu a kopretiny. Nejstarší Marie je světlovláskou a miluje matematiku a růže.

Přidáme-li sova „a je jí věkově bližší“, vyloučíme první řešení, takže určíme oblíbené květy všech našich studentek.

I-2.14 Úloha má jediné řešení: Nejmladší Eva je světlovláska a má v oblibě dějepis, růže a kalhoty. Nejstarší Marie je černovláskou a miluje matematiku, slunečnice a šaty.

I-2.15 Ano, celkové řešení uvádí následující tabulka:

Karel:	obránce,	Baník,	bílé;
Václav:	útočník,	Slavia,	červené;
Milan:	záložník,	Sparta,	modré;
Jiří:	brankář,	Liberec,	béžové.

I-2.16 Karel je obráncem, hraje ve Spartě a má bílé auto; dobu jeho příjezdu nemůžeme určit, neboť systém našich podmínek má dvě řešení, ve kterých uvádíme fotbalisty v pořadí jejich příjezdů:

1.	Milan:	brankář,	Baník,	modré;
	Karel:	obránce,	Sparta,	bílé;
	Jiří:	záložník,	Slávia,	červené
	Václav:	útočník,	Liberec,	béžové.
2.	Václav:	útočník,	Liberec,	béžové;
	Milan:	brankář,	Baník,	modré;
	Karel:	obránce,	Sparta,	bílé;
	Jiří:	záložník,	Slavia,	červené.

I-2.17 Fotbalisté přijeli v pořadí podle tabulky:

Karel:	záložník,	Sparta,	modré,	BMW;
Milan:	brankář,	Baník,	bílé,	Dacia;
Jiří:	útočník,	Liberec,	béžové,	Audi;
Václav:	obránce,	Slavia,	červené,	Citroën.

I-2.18 Řešení je uvedeno v souhrnném přehledu:

Věra:	Kolín,	džbánek,	auto;
Dana:	Vlašim,	peněženka,	autobus;
Mirka:	Slaný,	kniha,	pěšky;
Veronika:	Říčany,	svetr,	vlak;
Lenka:	Beroun,	nůž,	kolo.

I-2.19 Následující řešení uvádí pořadí, v němž stály vnučky vedle sebe v kruhu:

Věra:	Slaný,	peněženka,	kolo;
Dana:	Beroun,	kniha,	pěšky;
Mirka:	Vlašim,	svetr,	vlak;
Veronika:	Říčany,	nůž,	autobus;
Lenka:	Kolín,	džbánek,	auto.

I-2.20 Ano, úloha má jediné řešení. Vnučky uvádíme v pořadí, v němž gratulovaly dědečkovi :

Dana:	Slaný,	nůž,	autobus,	vaření;
Věra:	Vlašim,	svetr,	pěšky,	smetí;
Lenka:	Říčany,	kniha,	auto,	zašívání;
Mirka:	Kolín,	peněženka,	kolo,	nádobí;
Veronika:	Beroun,	džbánek,	vlak,	uklízení.

I-2.21 Při úpravách implikace $\neg p \to \neg\neg q$ užijte zákon transpozice a axiom **VP3**, tím dokážete požadovanou ekvivalenci s formulí $\neg q \to p$. Pro důkaz druhé ekvivalence ve výrokovém počtu vyjděte z implikace $\neg\neg p \to \neg q$.

I-2.22 Dokazatelnost $\neg p \to p, \neg p \vdash p$ získáme prostou aplikací modu ponens; dokazatelnost $\neg p \to p, p \vdash p$ jednoduše sepsáním předpokladu. Užitím důkazu neutrální formulí (aplikovaného na p) dokončíme prokazování.

I-2.23 Úplný normální disjunktivní tvar první formule: $\mathsf{p} \,\&\, \neg\mathsf{q}$; druhé formule:

$$(\mathsf{p} \,\&\, \mathsf{q} \,\&\, \mathsf{r}) \vee (\mathsf{p} \,\&\, \mathsf{q} \,\&\, \neg\mathsf{r}) \vee (\neg\mathsf{p} \,\&\, \mathsf{q} \,\&\, \mathsf{r}) \vee (\neg\mathsf{p} \,\&\, \mathsf{q} \,\&\, \neg\mathsf{r}) \vee \\ \vee (\neg\mathsf{p} \,\&\, \neg\mathsf{q} \,\&\, \mathsf{r}) \vee (\neg\mathsf{p} \,\&\, \neg\mathsf{q} \,\&\, \neg\mathsf{r}).$$

Úplný normální konjunktivní tvar první formule: $(\mathsf{p} \vee \mathsf{q}) \,\&\, (\mathsf{p} \vee \neg\mathsf{q}) \,\&\, (\neg\mathsf{p} \vee \neg\mathsf{q})$; druhé formule: $(\neg\mathsf{p} \vee \neg\mathsf{q} \vee \mathsf{r}) \,\&\, (\neg\mathsf{p} \vee \neg\mathsf{q} \vee \neg\mathsf{r})$.

I-2.24 Formule je kontradikcí, takže její úplný normální disjunktivní tvar je podle definice formulí $(\mathsf{p} \,\&\, \mathsf{q} \,\&\, \neg\mathsf{p}) \vee (\mathsf{p} \,\&\, \mathsf{q} \,\&\, \neg\mathsf{q})$ a formule

$$(\mathsf{p} \vee \mathsf{q}) \,\&\, (\neg\mathsf{p} \vee \mathsf{q}) \,\&\, (\mathsf{p} \vee \neg\mathsf{q}) \,\&\, (\neg\mathsf{p} \vee \neg\mathsf{q})$$

je jejím úplným normálním konjunktivním tvarem.

I-2.25 Evidentně $\mathcal{A} \vdash \mathcal{A}$, takže aplikací odvozovacího pravidla důkaz konjunkce (užité dvakrát na tutéž formuli) dostaneme $\mathcal{A} \vdash \mathcal{A} \,\&\, \mathcal{A}$. Důkaz dedukcí přinese $\vdash \mathcal{A} \to (\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{A})$. Aplikací důkazu užitím konjunkce dostaneme $\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{A} \vdash \mathcal{A}$, pročež důkaz dedukcí zajistí $\vdash (\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{A}) \to \mathcal{A}$.

$\mathcal{A} \vdash \mathcal{A} \vee \mathcal{A}$ se odůvodní triviálně odvozovacím pravidlem důkaz disjunkce. Dokazatelnost $(\mathcal{A} \vee \mathcal{A}), \neg\mathcal{A} \vdash \mathcal{A}$ dostaneme aplikací důkazu užitím disjunkce, $(\mathcal{A} \vee \mathcal{A}), \mathcal{A} \vdash \mathcal{A}$ obdržíme prostým sepsáním předpokladu, takže využívajíce důkaz neutrální formulí získáme $\mathcal{A} \vee \mathcal{A} \vdash \mathcal{A}$. Na závěr použijeme dvakrát důkaz dedukcí.

I-2.26 Evidentně jak $\mathcal{A} \vdash \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, tak také $\mathcal{A} \vdash \mathcal{A} \vee \mathcal{C}$ dle odvozovacího pravidla důkaz zavedení disjunkce; na předchozí dokazatelnosti užijeme důkaz konjunkce a obdržíme $\mathcal{A} \vdash (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \,\&\, (\mathcal{A} \vee \mathcal{C})$. Z předpokladu $\mathcal{B} \,\&\, \mathcal{C}$ vyvodíme jak $\mathcal{B}$, tak také $\mathcal{C}$ používajíce odvozovací pravidlo důkaz užitím konjunkce; následně vyvodíme z našeho předpokladu jak $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, tak také $\mathcal{A} \vee \mathcal{C}$ aplikujíce v každém jednotlivém případě důkaz disjunkce a „vše dokázané se dá použít k dokazování“. Potřebnou dokazatelnost $\vdash [\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \,\&\, \mathcal{C})] \to [(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \,\&\, (\mathcal{A} \vee \mathcal{C})]$ obdržíme užívajíce důkazu rozborem případů a důkazu dedukcí.

Bez reálného využití předpokladu $\mathcal{A} \vee \mathcal{C}$ získáme aplikací odvozovacího pravidla důkaz užitím disjunkce dokazatelnost $\neg\mathcal{A}, (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}), (\mathcal{A} \vee \mathcal{C}) \vdash \mathcal{B}$ a analogicky rovněž dokazatelnost $\neg\mathcal{A}, (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}), (\mathcal{A} \vee \mathcal{C}) \vdash \mathcal{C}$, takže $\neg\mathsf{A}, (\mathsf{A} \vee \mathsf{B}), (\mathsf{A} \vee \mathsf{C}) \vdash \mathsf{B} \,\&\, \mathsf{C}$ podle důkazu konjunkce. Nadto $\mathcal{A}, (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}), (\mathcal{A} \vee \mathcal{C}) \vdash \mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \,\&\, \mathcal{C})$ prostým sepsáním předpokladu a užitím odvozovacích pravidel důkaz disjunkce a „vše dokázané se dá použít k dokazování“. Využívajíce důkaz neutrální formulí obdržíme dokazatelnost $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}), (\mathcal{A} \vee \mathcal{C}) \vdash \mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \,\&\, \mathcal{C})$; následně dvojnásobným užitím důkazu dedukcí prokážeme dokazatelnost $\vdash (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \to \big((\mathcal{A} \vee \mathcal{C}) \to [\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \,\&\, \mathcal{C})]\big)$ a na závěr užijeme zákon slučování premis.

Z právě prokázané ekvivalence získáme dokazatelnost formule

$$\neg[\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \,\&\, \mathcal{C})] \equiv \neg[(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \,\&\, (\mathcal{A} \vee \mathcal{C})]$$

ve výrokovém počtu na základě **VP3** a zákona transpozice. Nyní postupně aplikujeme de Morganova pravidla a důkaz ekvivalentním nahrazením a získáváme nejprve dokazatelnost $\vdash [\neg\mathcal{A} \,\&\, \neg(\mathcal{B} \,\&\, \mathcal{C})] \equiv [\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{C})]$ a následně dokazatelnost $\vdash [\neg\mathcal{A} \,\&\, (\neg\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{C})] \equiv [(\neg\mathcal{A} \,\&\, \neg\mathcal{B}) \vee (\neg\mathcal{A} \,\&\, \neg\mathcal{C})]$. Nahraďme formuli $\mathcal{A}$ formulí $\neg\mathcal{A}$ a formuli $\mathcal{B}$ formulí $\neg\mathcal{B}$, a aplikujme důkaz ekvivalentním nahrazením a zákon dvojité negace.

I-2.27 Hledané elektrické obvody mohou realizovat např. níže uvedené formule, které jsou disjunkcemi konjunkcí, nejsou však v *úplném* normálním tvaru (v bodě (b) představuje proměnná p_1 hlas předsedy, v bodě (c) představují proměnné p_1 a p_2 hlasy předsedy a místopředsedy):

(a) $(\mathrm{p}_1 \,\&\, \mathrm{p}_2) \vee (\mathrm{p}_1 \,\&\, \mathrm{p}_3) \vee (\mathrm{p}_2 \,\&\, \mathrm{p}_3)$;
(b) $(\mathrm{p}_1 \,\&\, \mathrm{p}_2) \vee (\mathrm{p}_1 \,\&\, \mathrm{p}_3) \vee (\mathrm{p}_1 \,\&\, \mathrm{p}_4) \vee (\mathrm{p}_2 \,\&\, \mathrm{p}_3 \,\&\, \mathrm{p}_4)$;
(c) $(\mathrm{p}_1 \,\&\, \mathrm{p}_2 \,\&\, \mathrm{p}_3) \vee (\mathrm{p}_1 \,\&\, \mathrm{p}_2 \,\&\, \mathrm{p}_4) \vee (\mathrm{p}_1 \,\&\, \mathrm{p}_2 \,\&\, \mathrm{p}_5) \vee$
$\vee (\mathrm{p}_1 \,\&\, \mathrm{p}_3 \,\&\, \mathrm{p}_4) \vee (\mathrm{p}_1 \,\&\, \mathrm{p}_3 \,\&\, \mathrm{p}_5) \vee (\mathrm{p}_1 \,\&\, \mathrm{p}_4 \,\&\, \mathrm{p}_5) \vee$
$\vee (\mathrm{p}_2 \,\&\, \mathrm{p}_3 \,\&\, \mathrm{p}_4) \vee (\mathrm{p}_2 \,\&\, \mathrm{p}_3 \,\&\, \mathrm{p}_5) \vee (\mathrm{p}_2 \,\&\, \mathrm{p}_4 \,\&\, \mathrm{p}_5)$.

I-2.28 Předpokládáme existenci důkazu formule $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ z předpokladů $\mathcal{T}$. Tento důkaz je tím spíše důkazem z předpokladů $\mathcal{T}, \mathcal{A}$. Prodlužme uvažovaný důkaz o dvě formule: $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$. Dostaneme opět důkaz z předpokladů $\mathcal{T}, \mathcal{A}$ — první formuli můžeme přidat, neboť je předpokladem a druhou obdržím aplikací pravidla modus ponens na dvě formule bezprostředně předcházející závěrečné formuli $\mathcal{B}$.

I-2.29 Podle zadání úkolu máme vyšetřovat čtyři možnosti:

(i) Jestliže $\mathcal{D}_i$ je axiomem výrokového počtu, je zcela evidentně $\mathcal{T} \vdash \mathcal{D}_i$. Formule $\mathcal{D}_i \to (\mathcal{A} \to \mathcal{D}_i)$ je axiomem tvaru **VP1**, pročež $\mathcal{T} \vdash \mathcal{D}_i \to (\mathcal{A} \to \mathcal{D}_i)$ a prosté užití modu ponens přinese $\mathcal{T} \vdash \mathcal{A} \to \mathcal{D}_i$.

(ii) Zcela analogicky jestliže $\mathcal{D}_i$ je předpokladem ze systému $\mathcal{T}$, je $\mathcal{T} \vdash \mathcal{D}_i$. Formule $\mathcal{D}_i \to (\mathcal{A} \to \mathcal{D}_i)$ je axiomem tvaru **VP1**, pročež $\mathcal{T} \vdash \mathcal{D}_i \to (\mathcal{A} \to \mathcal{D}_i)$ a užívajíce modu ponens obdržíme $\mathcal{T} \vdash \mathcal{A} \to \mathcal{D}_i$.

(ii′) Je-li $\mathcal{D}_i$ formulí $\mathcal{A}$, stačí si uvědomit, že formule $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ byla ve výrokovém počtu dokázána v §1.

(iii) Nyní předpokládáme, že $j, j' < i$ a že $\mathcal{D}_{j'}$ je formulí $\mathcal{D}_j \to \mathcal{D}_i$, takže indukční předpoklad nám přináší dokazatelnosti $\mathcal{T} \vdash \mathcal{A} \to \mathcal{D}_j$ a současně $\mathcal{T} \vdash \mathcal{A} \to (\mathcal{D}_j \to \mathcal{D}_i)$. Formule

$$[\mathcal{A} \to (\mathcal{D}_j \to \mathcal{D}_i)] \to [(\mathcal{A} \to \mathcal{D}_j) \to (\mathcal{A} \to \mathcal{D}_i)]$$

je axiomem výrokového počtu, a proto je dokazatelná v systému předpokladů $\mathcal{T}$. První aplikace modu ponens přinese dokazatelnost $\mathcal{T} \vdash (\mathcal{A} \to \mathcal{D}_j) \to (\mathcal{A} \to \mathcal{D}_i)$ a následně druhá aplikace pravidla modus ponens zajistí dokazatelnost $\mathcal{T} \vdash \mathcal{A} \to \mathcal{D}_i$.

I-2.30 Předpokládejme, že formule $\mathcal{C}'$ (resp. $\mathcal{D}'$) vznikne z formule $\mathcal{C}$ (resp. z formule $\mathcal{D}$) záměnou znaku & znakem $\vee$ a znaku $\vee$ znakem & a záměnou výrokové proměnné její negací. Rozlišme jednotlivé případy popsané v návodu k řešení úlohy:

(1) Formule $\mathcal{A}$ je tvaru $\neg\mathcal{C}$ (pro jakousi formuli $\mathcal{C}$). Je podstatné nahlédnout, že záměnou znaku & znakem $\vee$ a znaku $\vee$ znakem & a záměnou výrokové proměnné její negací vznikne z formule $\mathcal{A}$ formule $\neg\mathcal{C}'$. Formule $\mathcal{C}$ je jednodušší než formule $\mathcal{A}$ (má o jednu logickou spojku — totiž vnější negaci — méně). Podle indukčního předpokladu je ve výrokovém počtu dokazatelná ekvivalence formulí $\neg\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}'$. Dokazatelnost ekvivalence formulí $\neg\neg\mathcal{C}$ (tj. formule $\neg\mathcal{A}$) a $\neg\mathcal{C}'$ ve výrokovém počtu dostaneme na základě **VP3** a zákona transpozice.

(2) Předpokládejme, že formule $\mathcal{A}$ je tvaru $\mathcal{C} \,\&\, \mathcal{D}$. Podle prvního de Morganova pravidla je pak dokazatelná ekvivalence formule $\neg\mathcal{A}$, tj. formule $\neg(\mathcal{C} \,\&\, \mathcal{D})$ a formule $\neg\mathcal{C} \vee \neg\mathcal{D}$, poslední formule je navíc podle indukčního předpokladu a odvozovacího

pravidla důkaz ekvivalentním nahrazením ve výrokovém počtu ekvivalentní formuli $\mathcal{C}' \vee \mathcal{D}'$. Na závěr si stačí uvědomit, že záměnou znaku & znakem $\vee$ a znaku $\vee$ znakem & a záměnou výrokové proměnné její negací vznikne z formule $\mathcal{A}$ formule, tzn. z formule $\mathcal{C}$ & $\mathcal{D}$, právě formule $\mathcal{C}' \vee \mathcal{D}'$.

(3) Předpokládáme-li, že formule $\mathcal{A}$ je disjunkcí, postupujeme zcela analogicky jako v předcházejícím případu, jenom použijeme druhé z de Morganových pravidel.

II-1.1 Každý z prvních dvou soudů je vyjádřitelný výrokem „Neexistuje individuum, které by mělo současně jak vlastnost $\mathcal{S}$, tak také vlastnost $\mathcal{P}$“, což graficky vyjadřujeme označením čtverce I znakem 0. Kterýkoli z druhých dvou soudů můžeme vyjádřit výrokem „Existuje individuum, které má současně jak vlastnost $\mathcal{S}$, tak také vlastnost $\mathcal{P}$“, což graficky vyznačujeme zapsáním znaku 1 do čtverce I.

II-1.2 Uvažme např. skupinu s dvěma individui **I, K**, přičemž individuum **I** má jak vlastnost $\mathcal{S}$, tak také vlastnost $\mathcal{P}$ a individuum $\mathcal{K}$ má vlastnost $\mathcal{P}$ a současně nemá vlastnost $\mathcal{S}$.

II-1.3 Platný je pouze sylogismus se závěrem (3***o***) „Některé $\mathcal{S}$ není $\mathcal{P}$.“.

II-1.4 Platný je sylogismus se závěrem (3***e***) „Žádné $\mathcal{S}$ není $\mathcal{P}$.“; za předpokladu existence objektu s vlastností $\mathcal{S}$ je navíc platný sylogismus se závěrem (3***o***) „Některé $\mathcal{S}$ není $\mathcal{P}$.“.

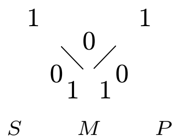

Diagram 1

II-1.5 Naše úvaha se má týkat soudů (1) Žádné $\mathcal{S}$ není $\mathcal{M}$, (2) Žádné $\mathcal{P}$ není $\mathcal{M}$, (3) Žádné $\mathcal{M}$ není $\mathcal{S}$, (4) Žádné $\mathcal{M}$ není $\mathcal{P}$, (5) Některé $\mathcal{S}$ není $\mathcal{M}$, (6) Některé $\mathcal{P}$ není $\mathcal{M}$, (7) Některé $\mathcal{M}$ není $\mathcal{S}$, (8) Některé $\mathcal{M}$ není $\mathcal{P}$. Všechny tyto soudy jsou graficky zaznamenány do diagramu 1 (soudy (1) a (3) a rovněž soudy (2) a (4) mají stejné grafické vyjádření).

II-1.6 Soudy tvaru ***a***, ***e*** zachovávají platnost, druhé dva nikoli. Zdůvodnění: (a) z premis „Každé $\mathcal{S}$ je $\mathcal{P}$“ a „Každé $\mathcal{S}'$ je $\mathcal{S}$“ vyvodíme „Každé $\mathcal{S}'$ je $\mathcal{P}$“, neboť jakýkoli objekt mající vlastnost $\mathcal{S}'$ má rovněž vlastnost $\mathcal{S}$, takže také $\mathcal{P}$; (b) z premis „Žádné $\mathcal{S}$ není $\mathcal{P}$“ a „Každé $\mathcal{S}'$ je $\mathcal{S}$“ vyvodíme „Žádné $\mathcal{S}'$ není $\mathcal{P}$“, protože jakýkoli objekt mající vlastnost $\mathcal{S}'$ má rovněž vlastnost $\mathcal{S}$, pročež nemá vlastnost $\mathcal{P}$. Protipříklady: (a) v množině se dvěma individui **D**, **E**, z nichž první má vlastnosti $\mathcal{S}'$ a $\mathcal{S}$ a nemá vlastnost $\mathcal{P}$ a druhé má vlastnosti $\mathcal{S}$ a $\mathcal{P}$ a nemá vlastnost $\mathcal{S}'$ jsou pravdivé premisy „Některé $\mathcal{S}$ je $\mathcal{P}$“ a „Každé $\mathcal{S}'$ je $\mathcal{S}$“ a není pravdivý závěr „Některé $\mathcal{S}'$ je $\mathcal{P}$“; (b) v množině se dvěma individui **B**, **G**, z nichž první má všechny tři vlastnosti $\mathcal{S}'$, $\mathcal{S}$ a $\mathcal{P}$ a druhé má pouze vlastnosti $\mathcal{S}$ jsou pravdivé premisy „Některé $\mathcal{S}$ není $\mathcal{P}$“ a „Každé $\mathcal{S}'$ je $\mathcal{S}$“ a není pravdivý závěr „Některé $\mathcal{S}'$ není $\mathcal{P}$“.

II-1.7 Ne.

II-1.8 Ano.

II-1.9 „Některá chytrá žena je hezká.“

II-1.10 „Některá chytrá žena je hezká.“, avšak pouze za předpokladu existence hezké ženy.

II-1.11 Platné: (a) „Některý rozumný muž není podnikavý.“
(b) „Některý rozumný muž je podnikavý.“
(c) „Některý rozumný muž není podnikavý.“, avšak jen za předpokladu existence rozumného muže.

II-1.12 Ano, avšak pouze za předpokladu existence učitele angličtiny.

II-1.13 Nikoli, jako protipříklad stačí vzít školu se dvěma učiteli, z nichž první učí matematiku, fyziku a češtinu, nikoli však angličtinu a druhý učí pouze češtinu a angličtinu.

II-1.14 Ano; z třetí premisy využíváme jen existenci učitele angličtiny.

II-1.15 Nikoli, a to ani za předpokladu existence učitele angličtiny — jako protipříklad stačí vzít školu se dvěma učiteli, z nichž první učí matematiku, fyziku a češtinu, nikoli však angličtinu a druhý učí pouze angličtinu.

II-1.16 Ano, avšak za předpokladu existence studenta, který rozumí fyzice. Z uvedených premis je totiž závěr „Každý student, který rozumí fyzice, je vysoký.“ vyvoditelný bez dodatečných předpokladů.

II-1.17 Ano.

II-1.18 Ano. Z premis (5) a (2) vyvodíme „Každá těžká ryba je politováníhodná.“; z předchozího a premisy (6) vyvodíme dále „Žádná těžká ryba nemá tři řady zubů.“. Pro další vyvozování použijeme právě vyvozené tvrzení a premisu (3) a získáme tvrzení „Žádná těžká ryba není žralokem.“; na závěr užijeme poslední tvrzení spolu s premisou (4) a obdržíme tvrzení „Každá těžká ryba je laskavá k dětem.“.

II-2.1 (a) x je mužem a x je dítě y $\mathcal{M}u\check{z}(x)\ \&\ \mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(x,y)$;
(b) x není mužem a existuje z takové, že y je dítě z a z je dítě x $\neg\mathcal{M}u\check{z}(x)\ \&\ (\exists z)(\mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(y,z)\ \&\ \mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(z,x))$;
(c) x není mužem a existuje z takové, že z je dítě y a x, z jsou manželé $\neg\mathcal{M}u\check{z}(x)\ \&\ (\exists z)(\mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(z,y)\ \&\ \mathcal{M}an\check{z}(x,z))$;
(d) x je mužem a existuje z takové, že x je dítě z a y je dítě z a x, y jsou *různé* $\mathcal{M}u\check{z}(x)\ \&\ (\exists z)(\mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(x,z)\ \&\ \mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(y,z)\ \&\ x \neq y)$;
(e) x není mužem a existuje u a existují z_1, z_2 od sebe *různé* děti u takové, že x je dítětem z_1 a y je dítětem z_2

$$\neg\mathcal{M}u\check{z}(x)\ \&\ (\exists u)(\exists z_1, z_2)[\mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(x,z_1)\ \&\ \mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(y,z_2)\ \&\ z_1 \neq z_2\ \& \\ \&\ \mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(z_1,u)\ \&\ \mathcal{D}\acute{\imath}t\check{e}(z_2,u)];$$

II-2.2 (a) y je dcerou x, (b) y je dědečkem x, (c) x je bratrancem y, (d) x je strýcem y, (e) x je tchyní y, (f) y je prapravnučkou x.

II-2.3 Posloupnost formulí

$$\mathcal{Q}(x,y),\ \mathcal{Q}(y,x),\ \mathcal{Q}(x,y) \rightarrow \mathcal{Q}(y,x),\ (\forall y)(\mathcal{Q}(x,y) \rightarrow \mathcal{Q}(y,x)), \\ (\forall x)(\forall y)(\mathcal{Q}(x,y) \rightarrow \mathcal{Q}(y,x)),$$

prokazuje, že první zápis je formulí jazyka **La,** neboť první zápis je podle dohody zjednodušenou formou poslední formule. Formule zachycuje symetrii predikátu $\mathcal{Q}$ a je uzavřená.

Každá z posloupností formulí sama o sobě

$$\mathcal{Q}(x,y),\ \mathcal{Q}(y,x)),\ (\exists y)\mathcal{Q}(y,x),\ \mathcal{Q}(x,y)\vee(\exists y)\mathcal{Q}(y,x),\ (\forall x)(\mathcal{Q}(x,y)\vee(\exists y)\mathcal{Q}(y,x))$$
$$\mathcal{Q}(y,x)),\ (\exists y)\mathcal{Q}(y,x),\ \mathcal{Q}(x,y),\ \mathcal{Q}(x,y)\vee(\exists y)\mathcal{Q}(y,x),\ (\forall x)(\mathcal{Q}(x,y)\vee(\exists y)\mathcal{Q}(y,x))$$

prokazuje, že druhý zápis je formulí jazyka **La.** Žádnou z uvedených posloupností již není možno zkrátit vypuštěním některého členu. První výskyt proměnné y ve druhé formuli je volný, všechny ostatní výskyty proměnných jsou vázané.

II-2.4 V prvém zápisu je do predikátu $\mathcal{P}$ dosazena formule a nikoli term, ve druhém se nerespektuje binárnost predikátu $\mathcal{Q}$, a ve třetím případě je kvantifikována rovněž konstanta a nikoli pouze proměnné.

II-2.5 První a třetí zápis jsou formulemi, druhý není správně uzávorkován a připouští více významů, v posledním je predikát predikát $\mathcal{Q}$ aplikován na zápis $\mathfrak{c}\,\&\,x$, který není termem. V první formuli jsou výskyty proměnných y, z vázané, proměnná x je volná; kvantifikace jsou nadbytečné, formule je v predikátovém počtu ekvivalentní formuli $\mathcal{Q}(\mathfrak{c}, x)$; druhá z formulí je uzavřená.

II-2.6 Minimální posloupnosti prokazující, že zápisy jsou termy jsou např. posloupnosti

$$x, \mathfrak{F}(x), \mathfrak{c}, \mathfrak{F}(\mathfrak{c}), \mathfrak{H}(\mathfrak{F}(\mathfrak{c})), \mathfrak{F}(x))$$
$$\mathfrak{c}, x, \mathfrak{F}(\mathfrak{c}), \mathfrak{F}(x), \mathfrak{H}(\mathfrak{F}(\mathfrak{c})), \mathfrak{F}(x))$$

pro zápis první a pro druhý zápis posloupnosti

$$x, y, \mathfrak{H}(x,y), \mathfrak{H}(y,x), \mathfrak{H}(\mathfrak{H}(x,y), \mathfrak{H}(y,x))$$
$$y, x, \mathfrak{H}(x,y), \mathfrak{H}(y,x), \mathfrak{H}(\mathfrak{H}(x,y), \mathfrak{H}(y,x)).$$

II-2.7 Funkce $\mathfrak{G}$ není funkcí jazyka **La,** funkce $\mathfrak{H}$ je binární; poslední zápis není správně uzávorkován.

II-2.8 Termem není pouze poslední zápis, jenž je nesprávně uzávorkován.

II-2.9 Prvý zápis je formulí jazyka **La,** v němž je proměnná y vázaná a proměnná x volná (formule je ekvivalentní formuli vzniklé vypuštěním kvantifikace). V dalších zápisech není $\mathfrak{H}(x)$ ani $\mathfrak{F}(x) = \mathfrak{c}$ termem.

II-2.10 Termy aritmetiky jsou první a poslední zápis; předposlední zápis je formulí aritmetiky, nikoli jejím termem. Druhý a třetí zápis obsahují funkce kvadrátu a podílu, které nejsou v základním jazyce aritmetiky, zápisy tedy nejsou termy základního jazyka aritmetiky. Mezi těmito funkcemi je však podstatný rozdíl: funkci kvadrátu můžeme pomocí formule $y = x \cdot x$ dodefinovat (viz závěr paragrafu), funkci podílu s vlastností $y \cdot x/y = x$ však obecně v aritmetice přirozených čísel dodefinovat nelze.

II-2.11 První zápis není formulí aritmetiky, protože rozdíl není funkcí aritmetiky přirozených čísel. Druhé zápisy formulemi aritmetiky jsou a vyjadřují, že číslo y je násobkem čísla x a že y je společným dělitelem čísel x_1, x_2. V první formuli jsou proměnné x, y volné a proměnná z vázaná a ve druhé formuli jsou proměnné x_1, x_2, y volné a proměnné z_1, z_2 vázané.

II-2.12
$$(\exists y)\big(x = y \cdot y \;\&\; y \neq \mathfrak{S}(\mathit{0}) \;\&$$
$$\& \; (\forall z, q)[x = q \cdot z \rightarrow (z = \mathfrak{S}(\mathit{0}) \vee q = \mathfrak{S}(\mathit{0}) \vee z = y)]\big).$$

II-2.13 (a) $(\exists y)\mathcal{Q}(\mathfrak{F}(\mathfrak{c}), \mathfrak{G}(\mathfrak{c}, \mathfrak{F}(y)))$, (b) $(\exists y)\mathcal{Q}(\mathfrak{F}(y), \mathfrak{G}(y, \mathfrak{F}(y)))$, (c) $(\exists y)\mathcal{Q}(\mathfrak{F}(z), \mathfrak{G}(z, \mathfrak{F}(y)))$, (d) $(\exists y)\mathcal{Q}(\mathfrak{F}(\mathfrak{F}(x)), \mathfrak{G}(\mathfrak{F}(x), \mathfrak{F}(y)))$, (e) $(\exists y)\mathcal{Q}(\mathfrak{F}(\mathfrak{G}(x, y)), \mathfrak{G}(\mathfrak{G}(x, y), \mathfrak{F}(y)))$, (f)–(i) $(\exists y)\mathcal{Q}(\mathfrak{F}(x), \mathfrak{G}(x, \mathfrak{F}(y)))$,

(a)–(e) $\mathcal{Q}(\mathfrak{c}, y) \rightarrow (\forall x)(\mathcal{Q}(x, y) \,\&\, \mathcal{P}(z))$,
(f) $\mathcal{Q}(\mathfrak{c}, \mathfrak{c}) \rightarrow (\forall x)(\mathcal{Q}(x, \mathfrak{c}) \,\&\, \mathcal{P}(z))$,
(g) $\mathcal{Q}(\mathfrak{c}, x) \rightarrow (\forall x)(\mathcal{Q}(x, x) \,\&\, \mathcal{P}(z))$,
(h) $\mathcal{Q}(\mathfrak{c}, \mathfrak{F}(x)) \rightarrow (\forall x)(\mathcal{Q}(x, \mathfrak{F}(x)) \,\&\, \mathcal{P}(z))$,
(i) $\mathcal{Q}(\mathfrak{c}, y) \rightarrow (\forall x)(\mathcal{Q}(x, y) \,\&\, \mathcal{P}(x))$,

(a) $(\forall z)(\mathcal{Q}(\mathfrak{c}, \mathfrak{c}) \vee \mathcal{Q}(\mathfrak{c}, y))$, (b) $(\forall z)(\mathcal{Q}(y, \mathfrak{c}) \vee \mathcal{Q}(\mathfrak{c}, y))$, (c) $(\forall z)(\mathcal{Q}(z, \mathfrak{c}) \vee \mathcal{Q}(\mathfrak{c}, y))$, (d) $(\forall z)(\mathcal{Q}(\mathfrak{F}(x), \mathfrak{c}) \vee \mathcal{Q}(\mathfrak{c}, y))$, (e) $(\forall z)(\mathcal{Q}(\mathfrak{G}(x, y), \mathfrak{c}) \vee \mathcal{Q}(\mathfrak{c}, y))$, (f) $(\forall z)(\mathcal{Q}(x, \mathfrak{c}) \vee \mathcal{Q}(\mathfrak{c}, \mathfrak{c}))$, (g) $(\forall z)(\mathcal{Q}(x, \mathfrak{c}) \vee \mathcal{Q}(\mathfrak{c}, x))$, (h) $(\forall z)(\mathcal{Q}(x, \mathfrak{c}) \vee \mathcal{Q}(\mathfrak{c}, \mathfrak{F}(x)))$, (i) $(\forall z)(\mathcal{Q}(x, \mathfrak{c}) \vee \mathcal{Q}(\mathfrak{c}, y))$.

V první formuli vzroste systém vázaných výskytů proměnných při nahrazeních podle bodů (b) a (e), ve druhé formuli podle bodů (g) a (h) a v poslední formuli při nahrazení podle bodu (c).

II-2.14 Formule $\varphi \vee \psi$ je pravdivá ve struktuře při daném ohodnocení, právě když není pravda, že současně není pravdivá formule φ ani formule ψ. To je však totéž jako tvrzení, že alespoň jedna z formulí φ, ψ je pravdivá v uvažované struktuře.

II-2.15 Formuli $\varphi \equiv \psi$ chápeme jako formuli $(\varphi \rightarrow \psi) \;\&\; (\psi \rightarrow \varphi)$, stačí proto užít bod (4) definice pravdivosti ve struktuře a příklad 5.

II-2.16 Hledanými formulemi jsou např. $(\forall s)(\mathcal{M}u\check{z}(s) \rightarrow \neg s \succ \mathfrak{Jan}3\mathrm{B})$, $(\exists s)(\mathfrak{Jan}3\mathrm{B} \succ s \;\&\; \neg\mathcal{M}u\check{z}(s))$ a $(\exists u)(\mathfrak{G}(u) = \mathfrak{Jan}3\mathrm{B} \;\&\; \neg\mathcal{M}u\check{z}(u))$. Druhá a poslední formule jsou pravdivé ve struktuře $\mathbb{S}$, prvá nikoli.

II-2.17 Předpokládejme nejprve, že každá bezesporná teorie má model. Jestliže formule φ není v teorii $\boldsymbol{T}$ dokazatelná, není dokazatelný ani (jakýkoli) její uzávěr ψ, takže teorie $\boldsymbol{T}, \neg\psi$ je bezesporná, má tedy model. V takovémto modelu teorie $\boldsymbol{T}$ není splněn uzávěr formule φ, tedy ani ona sama.

V žádné bezesporné teorii není dokazatelná např. formule $\varphi \;\&\; \neg\varphi$ pro jakoukoli formuli φ jejího jazyka, musí tudíž existovat model teorie $\boldsymbol{T}$ (ve kterém nadto není splněna formule $\varphi \;\&\; \neg\varphi$).

II-2.18 Důkaz implikace $\varphi \rightarrow \vartheta$ v teorii $\boldsymbol{T}$ je také důkazem implikace v teorii $\boldsymbol{T}, \varphi$; tento důkaz prodlužme nejprve přidáním nejprve formule φ (sepsání axiomu) a poté formule ϑ (modus ponens). Uzavřenost formule φ jsme nepotřebovali.

II-2.19 Dokazatelnost formule φ v teorii $\boldsymbol{T}$ zajistí dokazatelnost téže formule v teorii $\boldsymbol{T}, \neg\varphi$. V posledně jmenované teorii je evidentně dokazatelný její axiom $\neg\varphi$.

II-2.20 V teorii $\boldsymbol{T}, \varphi$ je dokazatelná disjunkce $\varphi \vee \psi$, stačí tedy užít pravidlo „vše dokázané lze použít k dokazování“.

II-2.21 Fixujme x s vlastnostmi $\mathcal{S}$ a $\mathcal{M}$. Užijme specifikaci na první premisu k získání implikace $\mathcal{M}(x) \to \neg\mathcal{P}(x)$. Užití modus ponens zabezpečí $\neg\mathcal{P}(x)$. Aplikací důkazu konjunkce získáme $\mathcal{S}(x)$ & $\neg\mathcal{P}(x)$, nakonec použijeme duální specifikaci.

K prokázání platnosti druhého sylogismu postačuje uvážit, že za předpokladu nějakého $\mathcal{M}$ implikuje premisa „Každé $\mathcal{M}$ je $\mathcal{S}$.“ *druhou* premisu našeho sylogismu „Některé $\mathcal{M}$ je $\mathcal{S}$.“ (viz příklad 8).

II-2.22 Pro libovolný objekt x použijeme specifikaci na obě premisy a získáme implikace $\mathcal{S}(x) \to \neg\mathcal{M}(x)$ a $\mathcal{P}(x) \to \mathcal{M}(x)$. Z tautologie predikátového počtu $(\mathsf{p} \to \mathsf{q}) \to (\neg\mathsf{q} \to \neg\mathsf{p})$ a z formule $\mathcal{P}(x) \to \mathcal{M}(x)$ vyvodíme užitím modus ponens formuli $\neg\mathcal{M}(x) \to \neg\mathcal{P}(x)$. K dokázání implikace $\mathcal{S}(x) \to \neg\mathcal{P}(x)$ užijeme tranzitivitu implikace a na závěr aplikujeme generalizaci.

Platnost druhého sylogismu prokážeme z platnosti prvého, předpokladu existence objektu s vlastností $\mathcal{S}$ a výsledku příkladu 8.

II-2.23 K prokázání platnosti druhého sylogismu předpokládejme existenci objektu s vlastností $\mathcal{P}$; pak můžeme na *první* premisu uplatnit výsledek příkladu 8 a následně použít platnost prvního sylogismu tohoto cvičení.

II-2.24 Oba čtverce mají stranu délky $a+b$, kde a, b jsou délky odvěsen vyšetřovaného pravoúhlého trojúhelníka. První čtverec se skládá ze čtyř trojúhelníků a z čtverce nad přeponou a druhý čtverec se skládá z týchž čtyř trojúhelníků a dvou čtverců nad jejich odvěsnami.

Popsaná úvaha nad diagramy je velmi přesvědčivá, nicméně pro zcela přesný důkaz by bylo potřeba zdůvodnit i tvrzení z náhledu jasná, např. že čtyřúhelníky v diagramech jsou čtverce (a ne pouze kosočtverce).

II-2.25 Plocha čtverce nad přeponou je součtem ploch dvou obdélníků, které mají stejnou plochu jako čtverce nad jednotlivými odvěsnami.

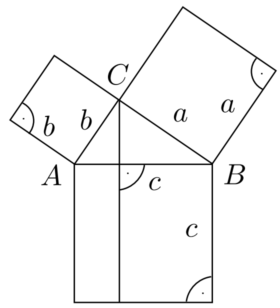

Diagram 2

III-1.1 NE, v Robinsonově aritmetice je dokazatelná negace zkoumané formule, tzn. formule

$$(\exists x, y)[x \cdot y = \mathit{0} \,\&\, \neg(x = \mathit{0} \,\&\, y = \mathit{0})].$$

Podle axiomu **RA4** je totiž dokazatelná rovnost $x \cdot \mathit{0} = \mathit{0}$ pro každé přirozené číslo x. Uvědomujete si, že ještě nejsme s odůvodňováním hotovi? — Správně, ještě musíme prokázat, že existuje alespoň jedno přirozené číslo různé od $\mathit{0}$, to však zaručuje např. formule (ra5).

III-1.2 ANO, rovnost $\mathit{0} + \mathit{0} = \mathit{0}$ plyne z axiomu **RA4,** formule je dokazatelná v ***RA***.

III-1.3 ANO, rovnosti $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$ plynou v Peanově aritmetice z axiomu **RA6** a z komutativity násobení. Naproti tomu v Robinsonově aritmetice zní odpověď NE — rovnost $x \cdot 0 = 0$ je sice opět důsledkem axiomu **RA6,** avšak formule $0 \cdot x = 0$ není v Robinsonově aritmetice dokazatelná, což prokazuje např. struktura $\mathbb{O}_4$ z úlohy 8, kde $0 \cdot_4 z = 0_{\mathbb{Z}} \cdot z = 0_{\mathbb{Z}} \neq 0$.

III-1.4 Jestliže existuje u takové, že $u + y = 0$, je $y = 0$ podle formule (ra1).

III-1.5 Za předpokladu $\mathfrak{S}(x) \leq \mathfrak{S}(y)$ musí podle axiomu **RA8** existovat přirozené číslo u takové, že $u + \mathfrak{S}(x) = \mathfrak{S}(y)$, z čehož podle **RA5** plyne rovnost $\mathfrak{S}(u + x) = \mathfrak{S}(y)$; pak však axiom **RA2** zabezpečí $u + x = y$ a následně užití **RA8** dokončí důkaz.

III-1.6 Předpoklad $x \leq y$ zajistí v důsledku **RA8** existenci u s vlastností $u + x = y$; pro toto u dostáváme $\mathfrak{S}(u + x) = \mathfrak{S}(y)$ (podle axiomu rovnosti pro funkci následovníka), takže **RA5** implikuje $u + \mathfrak{S}(x) = \mathfrak{S}(y)$. Na závěr užijeme axiom **RA8.**

III-1.7 Jazyk aritmetiky obsahuje jak konstantu 0, tak také funkci následovníka $\mathfrak{S}$, můžeme proto utvořit term $\mathfrak{S}(0)$. Jako důsledek axiomu rovnosti **R1** dostaneme $\mathfrak{S}(0) = \mathfrak{S}(0)$ a následně jako důsledek duální specifikace (a modus ponens) získáme $(\exists z)(z = \mathfrak{S}(0))$. Formule $(\forall z_1, z_2)[(z_1 = \mathfrak{S}(0) \mathbin{\&} z_2 = \mathfrak{S}(0)) \rightarrow z_1 = z_2]$ je důsledkem symetrie a tranzitivity rovnosti.

V úvaze jsme nepoužili mimologické axiomy teorie ***RA***, konstantu tudíž můžeme přidat bez obav již v teorii s jazykem aritmetiky a bez mimologických axiomů.

III-1.8 Stačí uvážit, že rovnosti $x + 1 = x + \mathfrak{S}(0) = \mathfrak{S}(x + 0) = \mathfrak{S}(x)$ jsou postupně důsledkem axiomu rovnosti pro sčítání (a axiomu definujícího konstantu 1), axiomu **RA5** a opět axiomu rovnosti, tentokrát však pro funkci následovníka, užívajícího rovnost zaručenou axiomem **RA4.**

III-1.9 V Peanově aritmetice získáme rovnosti $x \cdot 1 = x \cdot \mathfrak{S}(0) = (x \cdot 0) + x = x$ postupně z axiomu rovnosti pro násobení užívajícího rovnost definující konstantu 1 a z axiomu **RA7;** poslední rovnost je důsledkem axiomů **RA6** a **RA4**, komutativity sčítání a axiomu rovnosti pro sčítání. Nedokazatelnost rovnosti $x \cdot \mathfrak{S}(0) = x$ v Robinsonově aritmetice prokazuje např. struktura $\mathbb{O}_3$ z příkladu 9.

Předpokládáme-li $x \leq 1$, můžeme fixovat u tak, že $u + x = \mathfrak{S}(0)$ a předpoklad $x \neq 0$ umožní fixovat v s vlastností $\mathfrak{S}(v) = x$. Při těchto fixacích získáme rovnosti $\mathfrak{S}(u + v) = u + \mathfrak{S}(v) = u + x = \mathfrak{S}(0)$ v důsledku **RA5.** Takže aplikace **RA2** přinese $u + v = 0$ a užívajíce (ra1) obdržíme $v = 0$. Z předpokladu $x \neq 0$ jsme dostali $x = \mathfrak{S}(0)$.

Druhé tvrzení je dokazatelné v ***RA*** a ve cvičení III-2.22 bude podstatně zesíleno.

III-1.10 Z axiomu **RA6, RA1** a komutativity násobení získáme $x \neq 0 \mathbin{\&} y \neq 0$. Můžeme proto fixovat u, v takové, že $\mathfrak{S}(u) = x \mathbin{\&} \mathfrak{S}(v) = y$. Na základě **RA5** a **RA7** dostaneme

$$\mathfrak{S}((\mathfrak{S}(u) \cdot v) + u) = (\mathfrak{S}(u) \cdot v) + \mathfrak{S}(u) = \mathfrak{S}(u) \cdot \mathfrak{S}(v) = x \cdot y = \mathfrak{S}(0).$$

Aplikace **RA2** přinese $(\mathfrak{S}(u) \cdot v) + u = 0$ a následně získáme $u = 0 \mathbin{\&} \mathfrak{S}(u) \cdot v = 0$ jako důsledek již dokázaného (ra1). Na závěr aplikujeme (ra2) a získáme $v = 0$ (neboť $\mathfrak{S}(u) \neq 0$).

III-1.11 Uvažte, že $\mathfrak{S}(0) + x = \mathfrak{S}(0 + x) = 0 + \mathfrak{S}(x)$ podle (*iv*) a **RA5.** V důsledku (pa10) by rovnost $x = \mathfrak{S}(x)$ implikovala $\mathfrak{S}(0) = 0$, což je vyloučeno axiomem **RA1.**

III-1.12 Dokazujme např. indukcí podle proměnné z. Postupně získáme rovnosti $x\cdot(y+\mathit{0}) = x\cdot y = x\cdot y+\mathit{0} = x\cdot y+x\cdot \mathit{0}$ v důsledku dvojnásobného užití **RA4** (jednou nahradíme proměnnou x proměnnou y a podruhé termem $x\cdot y$) a axiomu **RA6** (a také axiomů rovnosti pro sčítání i násobení). Dále — předpokládajíce $x\cdot(y+z) = (x\cdot y)+(x\cdot z)$ — obdržíme

$$x\cdot(y+\mathfrak{S}(z)) = x\cdot\mathfrak{S}(y+z) = [x\cdot(y+z)]+x =$$
$$[(x\cdot y)+(x\cdot z)]+x = (x\cdot y)+[(x\cdot z)+x] = (x\cdot y)+(x\cdot\mathfrak{S}(z))$$

postupným využitím axiomu rovnosti pro násobení užívajícího axiom **RA5,** dále axiomu **RA7,** axiomu rovnosti pro sčítání využívajícího indukční předpoklad, asociativity sčítání a opět axiomu rovnosti pro sčítání tentokrát užívajícího **RA7.**

III-1.13 Asociativitu násobení lze dokazovat indukcí podle proměnné z. Evidentně $(x\cdot y)\cdot\mathit{0} = \mathit{0} = x\cdot(y\cdot\mathit{0})$ prostým vícenásobným použitím **RA6.** Druhý potřebný vztah

$$(x\cdot y)\cdot\mathfrak{S}(z) = [(x\cdot y)\cdot z]+x\cdot y = [x\cdot(y\cdot z)]+x\cdot y = x\cdot[(y\cdot z)+y] = x\cdot(y\cdot\mathfrak{S}(z))$$

dostaneme — za použití indukčního předpokladu $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$ — postupným užitím **RA7,** indukčního předpokladu, již dokázaného vztahu (pa5), tj. distributivity, a znovu **RA7.**

III-1.14 Jestliže $x \leq y$ & $y \leq z$, pak existují **RA8** přirozená čísla u, v tak, že $u+x = y$ & $v+y = z$, jest tedy (za použití asociativity sčítání (pa1))

$$(v+u)+x = v+(u+x) = v+y = z.$$

Zvolíme-li $w = v+u$, dostáváme $w+x = z$, takže $x \leq z$ podle **RA8.**

III-1.15 Není co dokazovat, implikace $x=y\rightarrow(x+z=y+z)$ je naprosto evidentní důsledek axiomu rovnosti pro sčítání. Implikace je dokazatelná v predikátovém počtu s jazykem aritmetiky, tzn. bez užití mimologických axiomů teorie ***RA***.

III-1.16 Jestliže $u+x = y$, pak $u+(x+z) = (u+x)+z = y+z$ v důsledku asociativity sčítání. K dokázání obrácené implikace zvažme, že z předpokladu $u+(x+z)=y+z$ dostaneme $(u+x)+z=y+z$ opětovně užitím asociativity sčítání a následně obdržíme rovnost $u+x=y$ užitím výsledku úlohy 6 (viz formuli (pa10)).

III-1.17 Jestliže předpokládáme $x \leq y$, můžeme fixovat v tak, že $v+x = y$; následně pak máme $(v\cdot z)+(x\cdot z) = (v+x)\cdot z = y\cdot z$ v důsledku distributivity (tj. formule (pa5) dokázané ve cvičení III-1.12). (Chceme-li být naprosto přesní musíme ještě uvést, že distributivitu pro násobení zprava získáme z distributivity pro násobení zleva a z komutativity násobení.) Nerovnost $y\cdot z \leq x\cdot z$ zajistí **RA8**, protože za požadované u můžeme zvolit term $v\cdot z$.

III-1.18 Není-li $x \leq y$, je nutně $y \leq x$ v důsledku (pa9), a v takovém případě existuje u tak, že $u+y = x$ podle **RA8**. Užívajíce distributivitu pro násobení zprava (viz řešení předchozího cvičení) získáme $(u\cdot z)+(y\cdot z) = x\cdot z$. Předpoklad $x\cdot z \leq y\cdot z$ by v důsledku **RA8** vedl k existenci v vyhovujícího rovnosti

$v + (x \cdot z) = y \cdot z$. Dohromady bychom následně získali

$$v + (u \cdot z) + (y \cdot z) = v + (x \cdot z) = y \cdot z.$$

Podle **RA4** a komutativity sčítání bychom měli dokonce

$$\mathit{0} + (y \cdot z) = y \cdot z = v + (u \cdot z) + (y \cdot z),$$

takže užití formule (pa10) by přineslo $v + (u \cdot z) = \mathit{0}$. Z předchozí rovnosti však (v důsledku (ra1)) bychom obdrželi $u \cdot z = \mathit{0}$ a následně při užití předpokladu $z \neq \mathit{0}$ bychom získali $u = \mathit{0}$ na základě (ra2). Pokud bychom se pak vrátili k volbě objektu u, nahlédli bychom, že $x = \mathit{0} + y = y$ (druhá rovnost je opět důsledkem **RA4** a komutativity sčítání). Rovnost $x = y$ je však podle (pa6) (viz úloha 7) ve sporu s předpokladem $\neg x \leq y$.

III-1.19 Je $x = y \equiv (x \leq y \ \& \ y \leq x)$ podle bodu (pa7) a (pa6). Takže (pa11) je evidentním důsledkem tvrzení (pa13), kteroužto formuli jsme již dokázali v předchozích dvou cvičeních.

III-1.20 ANO, implikace $x = y \rightarrow x \cdot z = y \cdot z$ je triviálním důsledkem axiomu rovnosti pro násobení. Pro obrácenou implikaci *nelze* antecedent vynechat, neboť $\mathfrak{S}(\mathit{0}) \cdot \mathit{0} = \mathit{0} \cdot \mathit{0}$, avšak $\mathfrak{S}(\mathit{0}) \neq \mathit{0}$ např. podle (ra5).

Uvedli jsme, že v důkazu první implikace jsme nepoužili antecedent, avšak dokonce jsme nepotřebovali ani indukci, takže formule $(\forall x, y, z)(x \leq y \rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z)$ je dokazatelná v Robinsonově aritmetice; přesně totéž platí i o formuli ze cvičení III-1.17. Kdyby bylo možno vypustit předpoklad $z \neq \mathit{0}$ ve formuli ze cvičení III-1.18, zopakovali bychom úvahu ze cvičení III-1.19 a dokázali formuli $(\forall x, y, z)(x \cdot z = y \cdot z \rightarrow x = y)$ v teorii ***PA***, o čemž však již víme, že je absurdní.

III-1.21 Musí být $\mathfrak{S}_6(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$, protože rovnost $\mathfrak{S}_6(\mathfrak{a}) = 0$ je vyloučena axiomem **RA1** a rovnost $\mathfrak{S}_6(\mathfrak{a}) = n$ je pro $n \neq 0$ rovněž vyloučena, tentokrát axiomem **RA2.** Realizace funkcí $+_6, \cdot_6$ musí vyhovovat rovnostem

(a) $\mathfrak{a} +_6 0 = \mathfrak{a}$ v důsledku požadované pravdivosti **RA4** ve struktuře $\mathbb{O}_6$;
(b) $\mathfrak{a} +_6 \mathfrak{S}_6(n) = \mathfrak{S}_6(\mathfrak{a} +_6 n) = \mathfrak{S}_6(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$; prokazování provádíme metamatematickou indukcí a při prvé rovnosti užíváme požadavku pravdivosti axiomu **RA5** a při druhé rovnosti využíváme indukční předpoklad $\mathfrak{a} +_6 n = \mathfrak{a}$;
(c) $\mathfrak{b} +_6 \mathfrak{a} = \mathfrak{b} +_6 \mathfrak{S}_6(\mathfrak{a}) = \mathfrak{S}_6(\mathfrak{b} +_6 \mathfrak{a})$; následovník žádného intuitivního přirozeného čísla není roven tomuto číslu samotnému, pročež nezbytně $\mathfrak{b} +_6 \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$;
(d) pro $\mathfrak{b} \neq 0$ máme $\mathfrak{b} \cdot_6 \mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cdot_6 \mathfrak{S}_6(\mathfrak{a}) = \mathfrak{b} \cdot_6 \mathfrak{a} +_6 \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$, neboť prostřední rovnost je důsledkem požadavku pravdivosti axiomu **RA7** ve struktuře $\mathbb{O}_6$ a protože poslední rovnosti můžeme zdůvodnit následovně: přičteme-li k intuitivnímu přirozenému číslu *nenulové* intuitivní přirozené číslo, nikdy nedostaneme číslo původní, v důsledku čehož pro nenulové přirozené číslo $\mathfrak{b}$ je $\mathfrak{b} \cdot_6 \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$; pro $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ použijeme bod (c);
(e) $\mathfrak{a} \cdot_6 0 = 0$, neboť se snažíme zaručit pravdivost axiomu **RA6** ve struktuře $\mathbb{O}_6$;
(f) $\mathfrak{a} \cdot_6 \mathfrak{S}_6(\mathfrak{b}) = \mathfrak{a} \cdot_6 \mathfrak{b} +_6 \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ v důsledku požadované pravdivosti axiomu **RA7** ve struktuře $\mathbb{O}_6$ a v důsledku již prokázaného bodu (c).

Volit tedy můžeme nanejvýše hodnotu $0 \cdot_6 \mathfrak{a}$.

III-1.22 V úvahách z příkladu 7 není zapotřebí měnit vůbec nic (kromě indexů); zkoumání součinu $0 \cdot_1 \mathfrak{S}_1(\mathfrak{a})$ je korektní i pro případ $0 \cdot_7 \mathfrak{a} \neq 0$.

Komutativita sčítání v modelu $\mathbb{O}_7$ je pravdivá právě když je pravdivá komutativita sčítání v modelu $\mathbb{M}$; násobení v modelu $\mathbb{O}_7$ je vždy nekomutativní, neboť $0 \cdot_7 \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \neq 0 = \mathfrak{a} \cdot_7 0$.

III-1.23 Realizace funkce $\mathfrak{S}$ je popsána vztahy $\mathfrak{S}_8(\mathfrak{a}_0) = \mathfrak{a}_0$ a současně $\mathfrak{S}_8(\mathfrak{a}_1) = \mathfrak{a}_1$. Realizace sčítání a násobení jsou schématicky popsány následujícími tabulkami:

$+_8$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{y}$
$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_0$
$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$
$\mathfrak{x}$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{x} +_{\mathbb{M}} \mathfrak{y}$

$\cdot_8$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_1$	0	$\mathfrak{y} \neq 0$
$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_1$	0	$\mathfrak{a}_0$
$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	0	$\mathfrak{a}_1$
0	0	0	0	$0 \cdot_{\mathbb{M}} \mathfrak{y}$
$\mathfrak{x} \neq 0$	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{x} \cdot_{\mathbb{M}} 0$	$\mathfrak{x} \cdot_{\mathbb{M}} \mathfrak{y}$.

Při první aplikaci výsledku z příkladu 7 přidáme individuum $\mathfrak{a}_0$ a obdržíme model Robinsonovy aritmetiky. Na tento model opět aplikujeme citovaný výsledek (v příkladu 7 jsme o modelu $\mathbb{M}$ předpokládali pouze, že je modelem Robinsonovy aritmetiky, aplikace je tedy přípustná) a nahlédneme, že sestrojená struktura je modelem Robinsonovy aritmetiky.

Prvek $\mathfrak{a}_0$ je přidán za všechna individua modelu $\mathbb{M}$ a individuum $\mathfrak{a}_1$ je přidáno jak za všechna individua modelu $\mathbb{M}$, tak také za individuum $\mathfrak{a}_0$. Formálněji:

$$\mathbb{O}_8 \models \mathfrak{x} \leq \mathfrak{a}_0 \;\&\; \neg \mathfrak{a}_0 \leq \mathfrak{x} \;\&\; \mathfrak{x} \leq \mathfrak{a}_1 \;\&\; \neg \mathfrak{a}_1 \leq \mathfrak{x} \;\&\; \mathfrak{a}_0 \leq \mathfrak{a}_1 \;\&\; \neg \mathfrak{a}_1 \leq \mathfrak{a}_0.$$

Je-li výchozím modelem $\mathbb{M}$ přirozený model $\mathbb{N}$, pak přímo z našich tabulek nahlédneme, že jak komutativita sčítání, tak také komutativita násobení je pravdivá ve vyšetřovaném modelu, neboť pro každé přirozené číslo n evidentně musí být $0 \cdot_{\mathbb{N}} n = 0 = n \cdot_{\mathbb{N}} 0$.

III-1.24 NE, neboť $\mathfrak{a}_0 \cdot_9 \mathfrak{S}_9(\mathfrak{a}_0) = \mathfrak{a}_0 \cdot_9 \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1 \neq \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_0 +_9 \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_0 \cdot_9 \mathfrak{a}_0 +_9 \mathfrak{a}_0$.

III-1.25 Uvažme následující rovnosti, ve kterých i, j nabývají hodnot 0,1, v nichž n je libovolné přirozené číslo a $\mathfrak{b}$ je libovolné individuum zkoumaného modelu:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}_i +_{10} \mathfrak{S}_{10}(\mathfrak{a}_j) &= \mathfrak{a}_i +_{10} \mathfrak{a}_j = \mathfrak{S}_{10}(\mathfrak{a}_i +_{10} \mathfrak{a}_j),\\
n +_{10} \mathfrak{S}_{10}(\mathfrak{a}_i) &= n +_{10} \mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{S}_{10}(\mathfrak{a}_1) = \mathfrak{S}_{10}(n +_{10} \mathfrak{a}_i),\\
\mathfrak{a}_i +_{10} \mathfrak{S}_{10}(n) &= \mathfrak{a}_i = \mathfrak{S}_{10}(\mathfrak{a}_i) = \mathfrak{S}_{10}(\mathfrak{a}_i +_{10} n),\\
\mathfrak{b} \cdot_{10} \mathfrak{S}_{10}(\mathfrak{a}_i) &= \mathfrak{b} \cdot_{10} \mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1 +_{10} \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cdot_{10} \mathfrak{a}_i +_{10} \mathfrak{b},\\
\mathfrak{a}_i \cdot_{10} \mathfrak{S}_{10}(n) &= \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1 +_{10} \mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_i \cdot_{10} n +_{10} \mathfrak{a}_i,
\end{aligned}$$

a uvědomme si, že poslední rovnost je v pořádku i pro $n = 0$, protože

$$\mathfrak{a}_1 +_{10} \mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_1 = 0 +_{10} \mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_i \cdot_{10} 0 +_{10} \mathfrak{a}_i.$$

Nahlédněme, že neexistuje individuum $\mathfrak{b}$, pro které by bylo $\mathfrak{b} +_{10} \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_0$, pročež $\mathbb{O}_{10} \models \neg \mathfrak{a}_0 \leq \mathfrak{a}_0$. Dále jest $\mathfrak{a}_1 +_{10} \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_1$ a současně také $\mathfrak{a}_0 +_{10} \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_0$, takže $\mathbb{O}_{10} \models \mathfrak{a}_0 \leq \mathfrak{a}_1 \;\&\; \mathfrak{a}_1 \leq \mathfrak{a}_0$.

III-1.26 Prověřit potřebujeme pouze vztahy týkající se násobení nulou zleva; navíc se můžeme omezit jen na rovnosti

$$0 \cdot_{11} \mathfrak{S}(\mathfrak{a}_i) = 0 \cdot_{11} \mathfrak{a}_i = 0 = 0 +_{11} 0 = 0 \cdot_{11} \mathfrak{a}_i +_{11} 0,$$

neboť rovnost $0 \cdot \mathfrak{S}(n) = 0 \cdot n + 0$ je pravdivá v přirozeném modelu.

Komutativitu násobení a nekomutativitu sčítání v modelu ověříme prostým pohlédnutím na zadání funkcí. V modelu je pravdivá formule $(\exists x)(\mathfrak{S}(x) = x)$, protože $\mathfrak{S}(\mathbf{a}_i) = \mathbf{a}_i$.

III-1.27 V následujících rovnostech každé z čísel i, j označuje buďto 0 nebo 1, avšak i, j jsou od sebe *různá*. Nechť dále n je libovolné přirozené číslo (pro každé n je $\mathfrak{S}_{10}(n) = n + 1$) a $\mathbf{b}$ označuje libovolné individuum modelu. Uvažme rovnosti:

$$\begin{gathered}
\mathbf{b} +_{12} \mathfrak{S}_{12}(\mathbf{a}_i) = \mathbf{b} +_{12} \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_j = \mathfrak{S}_{12}(\mathbf{a}_i) = \mathfrak{S}_{12}(\mathbf{b} +_{12} \mathbf{a}_i),\\
\mathbf{a}_i +_{12} \mathfrak{S}_{12}(2n) = \mathbf{a}_i +_{12} (2n+1) = \mathbf{a}_j = \mathfrak{S}(\mathbf{a}_i) = \mathfrak{S}_{12}(\mathbf{a}_i +_{12} 2n),\\
\mathbf{a}_i +_{12} \mathfrak{S}_{12}(2n+1) = \mathbf{a}_i +_{12} (2n+1+1) = \mathbf{a}_i = \mathfrak{S}_{12}(\mathbf{a}_j) = \mathfrak{S}(a_i + (2n+1)),\\
2n \cdot_{12} \mathfrak{S}_{12}(\mathbf{a}_i) = \mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_0 +_{12} 2n = 2n \cdot_{12} \mathbf{a}_i +_{12} 2n,\\
(2n+1) \cdot_{12} \mathfrak{S}_{12}(\mathbf{a}_i) = (2n+1) \cdot_{12} \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_i +_{12} (2n+1) = (2n+1) \cdot_{12} \mathbf{a}_i +_{12} (2n+1),\\
\mathbf{a}_i \cdot_{12} \mathfrak{S}_{12}(\mathbf{b}) = \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i +_{12} \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i \cdot_{12} \mathbf{b} +_{12} \mathbf{a}_i
\end{gathered}$$

a uvědomme si, že poslední rovnost na poslední řádce je v pořádku i pro $\mathbf{b} = 0$, protože $\mathbf{a}_i +_{12} \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i = 0 +_{12} \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i \cdot_{12} 0 +_{12} \mathbf{a}_i$.

O hodnotě součtu individuí $\mathbf{a}_0$ a $\mathbf{a}_1$ „rozhoduje druhý sčítanec“, pročež neexistuje individuum $\mathbf{b}$ tak, aby $\mathbf{b} +_{12} \mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_1$ nebo $\mathbf{b} +_{12} \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_0$. Takže v modelu není pravdivá formule (pa9). Naproti tomu individua $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1$ jsou ve smyslu relace $\leq$ až za přirozenými čísly a nadto $\mathbb{O}_{12} \models \mathbf{a}_i \leq \mathbf{a}_i$. Tato fakta zajišťují pravdivost formulí (pa6)–(pa8) v modelu $\mathbb{O}_{12}$.

III-1.28 Každé z čísel i, j budiž buďto nulou nebo jedničkou a nechť $i \neq j$. Pak

$$\begin{gathered}
\mathbf{a}_i +_{13} \mathfrak{S}(\mathbf{a}_j) = \mathbf{a}_i +_{13} \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_0 = \mathfrak{S}(\mathbf{a}_1) = \mathfrak{S}(\mathbf{a}_i +_{13} \mathbf{a}_j),\\
\mathbf{a}_i +_{13} \mathfrak{S}(\mathbf{a}_i) = \mathbf{a}_i +_{13} \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_1 = \mathfrak{S}(\mathbf{a}_0) = \mathfrak{S}(\mathbf{a}_i +_{13} \mathbf{a}_i),\\
n +_{13} \mathfrak{S}(\mathbf{a}_i) = n +_{13} \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_j = \mathfrak{S}(\mathbf{a}_i) = \mathfrak{S}(n +_{13} \mathbf{a}_i),\\
\mathbf{a}_i +_{13} \mathfrak{S}(2n) = \mathbf{a}_i +_{13} (2n+1) = \mathbf{a}_j = \mathfrak{S}(\mathbf{a}_i) = \mathfrak{S}(\mathbf{a}_i +_{13} 2n),\\
\mathbf{a}_i +_{13} \mathfrak{S}(2n+1) = \mathbf{a}_i +_{13} (2n+1+1) = \mathbf{a}_i = \mathfrak{S}(\mathbf{a}_j) = \mathfrak{S}(\mathbf{a}_i +_{13} (2n+1)),\\
\mathbf{a}_0 \cdot_{13} \mathfrak{S}(\mathbf{a}_i) = \mathbf{a}_0 \cdot_{13} \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_0 +_{13} \mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_0 \cdot_{13} \mathbf{a}_i +_{13} \mathbf{a}_0,\\
\mathbf{a}_1 \cdot_{13} \mathfrak{S}(\mathbf{a}_i) = \mathbf{a}_1 \cdot_{13} \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_i +_{13} \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1 \cdot_{13} \mathbf{a}_i +_{13} \mathbf{a}_1,\\
0 \cdot_{13} \mathfrak{S}(\mathbf{a}_i) = 0 \cdot_{13} \mathbf{a}_j = 0 = 0 +_{13} 0 = 0 \cdot_{13} \mathbf{a}_i +_{13} 0,\\
2n \cdot_{13} \mathfrak{S}(\mathbf{a}_i) = 2n \cdot_{13} \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_0 +_{13} 2n = 2n \cdot_{13} \mathbf{a}_i +_{13} 2n \qquad \text{pro } 2n \neq 0,\\
(2n+1) \cdot_{13} \mathfrak{S}(\mathbf{a}_i) = (2n+1) \cdot_{13} \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_i +_{13} (2n+1) = (2n+1) \cdot_{13} \mathbf{a}_i +_{13} (2n+1),\\
\mathbf{a}_i \cdot_{13} \mathfrak{S}(0) = \mathbf{a}_i \cdot_{13} 1 = \mathbf{a}_i = 0 +_{13} \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i \cdot_{13} 0 +_{13} \mathbf{a}_i,\\
\mathbf{a}_i \cdot_{13} \mathfrak{S}(2n) = \mathbf{a}_i \cdot_{13} (2n+1) = \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_0 +_{13} \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i \cdot_{13} 2n +_{13} \mathbf{a}_i \qquad \text{pro } 2n \neq 0,\\
\mathbf{a}_i \cdot_{13} \mathfrak{S}(2n+1) = \mathbf{a}_i \cdot_{13} (2n+1+1) = \mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_i +_{13} \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i \cdot_{13} (2n+1) +_{13} \mathbf{a}_i.
\end{gathered}$$

Reflexivita predikátu $\leq$ plyne z rovností $\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_0$ a $\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1$ a negace slabé antisymetrie z rovností $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_1$ a $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_0$.

III-1.29 Implikace není splněna např. ve struktuře $\mathbb{O}_{12}$, neboť

$$\mathbb{O}_{12} \models \mathbf{a}_0 \leq \mathbf{a}_0 \mathbin{\&} \neg \mathbf{a}_0 \leq \mathbf{a}_1 \mathbin{\&} \mathbf{a}_1 = \mathfrak{S}(\mathbf{a}_0).$$

III-2.1 Má také rekord v počtu rekordů.

III-2.2 Jednoznačně je třeba matce doporučit odpověď „ne“. Pokud matka odpoví „ano“, může krokodýl dítě vrátit i nevrátit a vždy dostojí svému slibu; odpoví-li žena „ne“, nedostojí krokodýl svému slibu nikdy. Když jsem přednášel o logice gymnaziálním studentům jeden z nich nabídl obraz, který se mi zalíbil: krokodýl pak strne, tak jako občas „strne“ počítač a šťastná matka odebere dítě z tlamy nehýbajícího se krokodýla.

III-2.3 Prótagorás by měl svého žáka zažalovat u soudu. Jestliže vyhraje, obdrží peníze z rozhodnutí soudu. Po právu by však měl prohrát, protože Euathlos přesně dodržuje dohodu. Po vyhraném soudu by měl podle dohody Euathlos zaplatit zbytek peněz za výuku. Pokud to neudělá, zažaluje ho Protagoras ještě jednou. Tentokrát by již po právu měl soudní spor vyhrát a z rozhodnutí soudu dostat spornou částku.

III-2.4 Přesvědčit ostatní, že někdy mluvíte pravdu a někdy lžete, můžete jednak pravdivým tvrzením „Někdy lžu.“ nebo nepravdivým tvrzením „Vždy lžu.“. Uvedená tvrzení nemůže vyslovit ani pravdomluvný, ani lhář.

III-2.5 Vezměme nějaké tvrzení, o němž nikdo neví, zda je pravdivé — např. „Všechny rozumné bytosti žijí na naší planetě.“. Vytvořme výrok „Vždy lžu nebo současně všechny rozumné bytosti žijí na naší planetě a já někdy říkám pravdu a někdy lžu.“ Důsledkem prvního disjunktu je, že někdy říkám pravdu a někdy lžu podle předchozího cvičení, uvedené tvrzení plyne i z druhého disjunktu neboť druhý disjunkt je konjunkcí, jejímž členem je uvedené tvrzení. Protože nikdo neví zda tvrzení „Všechny rozumné bytosti žijí na naší planetě.“ je pravdivé, nemůže nikdo vědět zda druhý disjunkt je pravdivý. První disjunkt je nepravdivý, takže nikdo není schopen rozhodnout o pravdivosti celé disjunkce.

III-2.6 Žádný systém výroků nemůže přesvědčit ostatní, že vždy mluvíte pravdu, nebo vždy lžete, neboť tytéž výroky může vyslovit i ten, který někdy mluví pravdu a někdy lže (i když pravdivostní hodnota výroku pronášeného tím, kdo někdy mluví pravdu a někdy lže, se leckdy může lišit od pravdivostní hodnoty téhož tvrzení pronášeného vámi, který jste buďto pravdomluvný, nebo lhář).

III-2.7 Podobizna je ve stříbrné skřínce, zlatá skřínka je prázdná. (Nápis na zlaté skřínce implikuje nápis na stříbrné skřínce, musí tedy být nepravdivý; za předpokladu pravdivosti nápisu na stříbrné skřínce nahlédneme, že podobizna není ve zlaté skřínce, neboť by na ní byl pravdivý nápis.)

III-2.8 Opětovně je podobizna ve stříbrné skřínce, zlatá skřínka je prázdná. (Kdyby byl nápis na zlaté skřínce nepravdivý, byly by obě skřínky prázdné, což je ve sporu s negací nápisu na stříbrné skřínce.)

III-2.9 Obě skřínky jsou prázdné. (Pravdivost nápisu na stříbrné skřínce vylučuje pravdivost nápisu na zlaté skřínce.)

III-2.10 V obou skřínkách jsou podobizny. (Nepravdivost nápisu na stříbrné skřínce vylučuje nepravdivost nápisu na zlaté skřínce.)

III-2.11 Zlatá skřínka je prázdná, podobizna je ve stříbrné skřínce. (Nápis na stříbrné skřínce nemůže být pravdivý.)

III-2.12 Ve zlaté skřínce je podobizna, stříbrná je prázdná. (Uložení portrétu do zlaté skřínky vylučuje negaci nápisu na stříbrné skřínce; není-li ve zlaté skřínce portrét, nesmí být ani ve stříbrné; pak nápis na stříbrné skříňce má být pravdivý — spor.)

III-2.13 Zlatá skříňka je prázdná, podobizna je ve stříbrné skříňce. (Pravdivost nápisu na stříbrné skříňce by zajistila pravdivost nápisu na zlaté skříňce, pročež ve stříbrné skříňce by musela být podobizna — spor. Nepravdivost nápisu na stříbrné skříňce zabezpečí jak neprázdnost stříbrné, tak i prázdnost zlaté skříňky. Následně je negace nápisu na zlaté skříňce skutečně pravdivá.)

III-2.14 Podobizna je ve zlaté skříňce, stříbrná je prázdná. (Pravdivost nápisu na stříbrné skříňce zabezpečí pravdivost nápisu na zlaté skříňce, takže stříbrná musí být prázdná. Nepravdivost zápisu na stříbrné skříňce by vynucovala jednak podobiznu ve stříbrné skříňce a jednak nepravdivost nápisu na zlaté skříňce, což vede ke sporu.)

III-2.15 Nápis „Tato skříňka je prázdná.“ při současném zadání nemůže být připevněn na zlatou skříňku. Nápis „Obě skříňky jsou prázdné.“ musí být nepravdivý a zlatá skříňka musí být proto prázdná. Následně musí být ve stříbrné skříňce podobizna.

III-2.16 Nápisy na zlaté a olověné skříňce nemohou být současně pravdivé, takže jsou všechny nápisy nepravdivé. Podobizna je tudíž jak v olověné, tak i ve zlaté skříňce a stříbrná skříňka je prázdná.

III-2.17 Kdyby byly nápisy na stříbrné a olověné skříňce pravdivé, nemohl by být pravdivý nápis na zlaté skříňce, pročež jsou všechny nápisy nepravdivé. Zlatá a stříbrná skříňka jsou proto prázdné a olověná skrývá podobiznu.

Pokud provedeme naznačenou záměnu slov na olověné skříňce, je řešením vložit podobizny do všech skříněk — pak jsou všechny nápisy pravdivé. Kdyby byly nápisy na stříbrné a olověné skříňce nepravdivé, nebyla by podobizna v žádné skříňce a nápis na zlaté skříňce by byl pravdivý.

III-2.18 Podobizna je ve zlaté skříňce. (Ve stříbrné skříňce podobizna určitě nemůže být, neboť pak by musel být na ní pravdivý nápis. Kdyby byla podobizna v olověné skříňce, byly by nápisy na ostatních skříňkách pravdivé, což zadání vylučuje.)

III-2.19 Kdyby na nápadníkovu otázku byla pravdivá odpověď „ano“, nevěděli bychom nic o pravdivosti nápisu na osmé skříňce, takže bychom se nikterak nepřiblížili k jednoznačnému řešení, kde hledat podobiznu. Určitě tedy není v osmé skříňce dopis na rozloučenou. V osmé skříňce nemůže být podobizna, protože v takovém případě by musel být nápis na této skříňce pravdivý. Tudíž osmá skříňka je prázdná a nápis na ní je nepravdivý. Prvý konjunkt je však pravdivý, pročež je nutně nepravdivý druhý konjunkt a devátá skříňka neobsahuje dopis. Podobně devátá skříňka nesmí obsahovat podobiznu, je proto prázdná a nápis na ní je nepravdivý. Zjistili jsme, že nápis na šesté skříňce je pravdivý, pročež nápis na třetí skříňce je nepravdivý. Následně je jednak nepravdivý nápis na páté skříňce, a jednak je pravdivý nápis na skříňce VII. Nepravdivost nápisu na skříňce V zaručuje nepravdivost nápisu na druhé i čtvrté skříňce. Nepravdivost nápisu na skřínce IV zabezpečuje pravdivost nápisu na první skřínce. Shrneme-li předchozí výsledky, zjistíme, že pravdivé jsou pouze nápisy na skřínkách označených čísly I, VI a VII; jen v těchto skřínkách se může nacházet podobizna. Pravdivost prvého nápisu vyloučí šestou skřínku; pravdivost sedmého nápisu zajistí, že se podobizna nenachází v první skřínce. Nápadník má tedy otevřít sedmou skřínku.

Mimochodem, víte, co obsahuje první a druhá skřínka?

III-2.20 Při prokazování metamatematickou indukcí dle m (a při pevně zvoleném n) dokažme nejprve v ***RA*** rovnosti

$$\overline{n} + \overline{0} = \overline{n} + \mathsf{o} = \overline{n} = \overline{n + 0}.$$

(První rovnost je zřejmým důsledkem definice $\overline{0}$, druhou získáme použitím axiomu **RA4** a poslední rovnost je prostě důsledkem intuitivního přičítání metamatematického čísla 0).

K prokázání indukčního kroku si uvědomíme, že v Robinsonově aritmetice jsou dokazatelné rovnosti

$$\overline{n} + \overline{m+1} = \overline{n} + \mathfrak{S}(\overline{m}) = \mathfrak{S}(\overline{n} + \overline{m}) = \mathfrak{S}(\overline{n+m}) = \overline{(n+m)+1} = \overline{n + (m+1)}$$

podle definice FORMALIZACE metamatematického následovníka, axiomu **RA5**, axiomu rovnosti pro následovníka užívajícího indukčního předpokladu, definice FORMALIZACE metamatematického následovníka a v důsledku asociativity sčítání metamatematických přirozených čísel.

III-2.21 Prokazujme podle návodu metamatematickou indukcí dle m (při fixovaném n) v Robinsonově aritmetice. Dokazatelnost druhé rovnosti ze systému rovností

$$\overline{n} \cdot \overline{0} = \overline{n} \cdot \mathsf{o} = \mathsf{o} = \overline{0} = \overline{n \cdot 0}$$

je v teorii ***RA*** je zaručena axiomem **RA6.** (První a třetí rovnost je zabezpečena definicí $\overline{0}$ a poslední rovnost je prostě důsledkem intuitivního násobení metamatematickou nulou.) Navíc jsou v teorii ***RA*** dokazatelné rovnosti

$$\overline{n} \cdot \overline{m+1} = \overline{n} \cdot \mathfrak{S}(\overline{m}) = (\overline{n} \cdot \overline{m}) + \overline{n} = \overline{n \cdot m} + \overline{n} = \overline{n \cdot m + n} = \overline{n \cdot (m+1)}.$$

První z nich získáme z definice FORMALIZACE následovníka, druhá rovnost je důsledkem axiomu **RA7**, třetí obdržíme z axiomu rovnosti pro sčítání užívajíce indukčního předpokladu, předposlední rovnost je je zaručena předchozím cvičením a poslední rovnost je důsledkem distributivity pro metamatematická přirozená čísla.

III-2.22 Zprava doleva: Je-li m menší nebo rovno n a je-li k rozdíl čísel n a m, je v Robinsonově aritmetice dokazatelná rovnost $\overline{k} + \overline{m} = \overline{n}$ dle cvičení III-2.20, na závěr užijeme axiom **RA8.**

Zleva doprava: Metamatematickou indukcí dle n. Je-li n rovno 0, pak užijeme část formule (ra3) dokázanou ve cvičení III-1.4.

Pro prokázání indukčního kroku pracujme v teorii $\boldsymbol{RA}$, $x \leq \mathfrak{S}(\overline{n})$. Pro využití indukčního předpokladu se jeví výhodné přijmout ještě dodatečný předpoklad $x \neq \mathsf{o}$ a využít ho — při užití axiomu **RA3** — k fixaci y takového, že $x = \mathfrak{S}(y)$. Po této fixaci obdržíme $\mathfrak{S}(y) \leq \mathfrak{S}(\overline{n}))$, z čehož podle formule (ra4) dokázané v minulém paragrafu vyvodíme $y \leq \overline{n}$. Použití indukčního předpokladu přináší $y = \mathsf{o} \vee \ldots \vee y = \overline{n}$, tzn. $x = \mathfrak{S}(\mathsf{o}) \vee \ldots \vee x = \mathfrak{S}(\overline{n})$. Celkem jsme tedy prokázali

$$\boldsymbol{RA} \vdash x \leq \mathfrak{S}(\overline{n}) \rightarrow (x = \mathsf{o} \vee x = \mathfrak{S}(\mathsf{o}) \vee \ldots \vee x = \mathfrak{S}(\overline{n})).$$

IV-1 Jest $t = 0$, protože mezi činiteli je rovněž $x - x$.

IV-2 Za dvacet devět.

IV-3 Nejvýše jeden.

IV-4 Na první můj syn, na druhé můj otec.

IV-5 Nejdříve jeden z lidojedů převeze postupně druhé dva lidojedy na druhý břeh a nakonec ukotví loďku u prvního břehu. Pak přejedou dva běloši, *vrátí se běloch a lidojed* a poté přejedou dva běloši. V závěru se lidojedi převezou navzájem.

IV-6 Přejede psovod se psem, vrátí se sám. Psovod převeze jednoho příznivce Olomouce a vrátí se i se psem. Slávista převeze druhého příznivce Olomouce, vrátí se sám. Fanoušek Brna převeze Slávistu, vrátí se sám. Přejede psovod se psem, vrátí se Slávista, potom fanoušek Brna opět převeze Slávistu, vrátí se sám. Pak fanoušek Brna převeze prvního Sparťana a vrátí se psovod se psem. Psovod převeze druhého Sparťana a na závěr se vrátí pro psa.

IV-7 Jeden provaz zapálíte na obou koncích, druhý jen na jednom. V okamžiku, kdy se plameny na prvním provazu setkají, tj. když uplynulo 1/2 hodiny, zapálíte zbývající konec druhého provazu. Jakmile se na druhém provaze plameny setkají, uplynula další čtvrthodina.

IV-8 Nejprve si uvědomme, že na dvojstraně je jedno číslo sudé a druhé liché. Pořadí sudé-liché se nemění v celé knize. Je zvykem, že vpravo je číslo liché, avšak dokonce i kdybychom na to nebrali ohled, přinutí nás k tomu naše zadání, jež by se stalo nejednoznačným, kdybychom připustili sudé číslo vpravo (dvojice čísel 25, 26 se součtem 51 a rovněž dvojice 45, 46 se součtem 91 vyhovují zadání). Na levé straně se mohou vyskytovat čísla sudá od 6 do 48. (Součet 50 + 51 je již trojciferný). Některé součty jsou vyloučeny, neboť obrácením pořadí číslic nezískáme číslo menší a u jiných číslo vzniklé obrácením pořadí čísel není součtem *sudého* čísla a jeho následovníka. Jediným řešením je dvojstrana 18, 19.

IV-9 První vyvolaný řekne např. „bílá“ právě když vidí lichý počet bílých čapek. Tato strategie dává prvnímu poloviční pravděpodobnost k záchraně, ostatní jsou zachráněni (umí-li počítat). První vyvolaný sdělil totiž všem, zda vidí sudý nebo lichý počet bílých čapek na hlavách všech ostatních; každý další vidí všechny čapky kromě své, zjistí tedy barvu své čapky (čapku prvního vyvolaného nezapočítává, o té první nemluvil).

IV-10 Každý z rukojmích bude vidět lichý počet čapek, takže jedna barva bude převažovat. Rukojmí se dohodnou, že jeden každý z nich bude hlasovat jako kdyby měl čapku převažující barvy. Pokud bude přesně stejný počet čapek obou barev, budou rukojmí při této strategii hlasovat špatně. Ve všech ostatních případech se zachrání. Čapek převažující barvy je alespoň o dvě více než čapek druhé barvy. Každý, kdo má čapku převládající barvy proto odpovídá správně. Pročež při hlasování bude více správných odpovědí než špatných.

IV-11 Kartičky s písmenem „A“ a s číslem „2“.

IV-12 Své hodiny natáhnu před odchodem na návštěvu přítele a poznamenám si čas. U přítele si poznamenám nejen čas odchodu, avšak také dobu u něj strávenou. Po návratu zjistím, kolik času uplynulo od mého odchodu, odečtu dobu strávenou u přítele, zbylý čas vydělím dvěma a zjistím tak, jak dlouho mi trvala cesta zpět.

IV-13 Pokud máte tři mince s jednou lehčí, zjistíte falešnou prostým zvážením dvou mincí. Jsou-li v rovnováze, je falešná ta třetí; pokud je jedna z nich lehčí, je falešná.

V prvním vážením zvážíte dvě trojice mincí. Jsou-li v rovnováze, je falešná mezi zbylými třemi a určíte ji postupem popsaným před okamžikem. Jestliže trojice mincí v rovnováze nejsou, je falešná v trojici, která je lehčí. Opět stačí užít výše popsaný postup.

IV-14 Nejprve zvážíme dvě čtveřice mincí.

(1) Jsou-li čtveřice mincí v rovnováze, je falešná mince ve zbývající pětici. Vezmeme z nich tři a na druhou misku vah položíme tři pravé mince (určené předchozím vážením). (1a) Jestliže jsou tyto trojice mincí v rovnováze, je falešná mince mezi dvěma dosud neváženými. Stačí zvážit pravou minci s jednou z nich a podle výsledku určíme tu falešnou. (1b) Nejsou-li trojice v rovnováze, nachází se falešná mince mezi třemi na vahách a srovnáním s pravými mincemi víme, zda je lehčí nebo těžší. Na závěr užijeme úvahu z počátku řešení předchozí hádanky.

(2) Jestliže nejsou čtveřice mincí při prvém vážení v rovnováze, je falešná mince mezi těmito osmi. Z obou misek sundáme po jedné minci, na první misce ponecháme dvě mince a jednu přesuneme na druhou misku, na druhé misce ponecháme jednu minci a dvě přesuneme na první misku a druhou misku doplníme dvěma pravými mincemi. (2a) Pokud jsou váhy v rovnováze, je falešná mince jedna ze dvou sejmutých. Při posledním vážení srovnáme jednu sejmutou minci s pravou mincí. (2b) Vychylují-li se váhy stejně jako při prvním vážení, je falešná mince v trojici nepřemístěných a (2c) jestliže se váhy vychylují opačně než při prvém vážení, nachází se falešná mince mezi přesunutými. V obou případech jsou dvě mince z této trojice na jedné misce vah. Při posledním vážení srovnáme tyto mince mezi sebou. Váží-li stejně, je falešná zbývající mince z trojice. Jestliže dvě naposled vážené mince mají různou váhu, je falešná mince některá z nich. Zda je to ta lehčí nebo těžší, usoudíme z druhého vážení.

IV-15 Na jednu misku vah položíme *pět* mincí, na druhou čtyři a misku doplníme pravou mincí.

(1) Jsou-li pětice mincí v rovnováze, je falešná mince ve zbývající čtveřici.

Na první misku vah položíme dvě z čtveřice a na druhou misku vah dáme jednu z čtveřice a doplníme pravou mincí. (1a) Jestliže jsou tyto dvojice mincí v rovnováze, je falešná mince ta jediná dosud nevážená. Posledním vážením určíme, zda je lehčí nebo těžší než pravá. (1b) Nejsou-li dvojice v rovnováze, nachází se falešná mince mezi těmi třemi na vahách, o kterých nevíme s jistotou jestli jsou pravé. V posledním vážení srovnáme dvě mince na první misce. Jsou-li při tomto vážení váhy v rovnováze, je falešná mince na druhé misce. Z výsledku druhého vážení usoudíme, zda je těžší nebo lehčí než pravá. Pokud při posledním vážení nejsou váhy v rovnováze, je falešná mince na vahách. Která to je, je opět určeno výsledkem druhého vážení.

(2) Jestliže pětice mincí nejsou v rovnováze, je falešná mince na vahách a je různá od zadané pravé mince. Z první misky sundáme dvě mince a ze druhé jednu dosud neurčenou minci, na první misce ponecháme dvě mince a jednu přesuneme na druhou misku, na druhé misce ponecháme jednu dosud neurčenou minci, dvě dosud neurčené přesuneme na první misku a druhou misku doplníme ještě jednou pravou mincí. (2a) Pokud jsou váhy v rovnováze, je falešná mince jedna ze tří sejmutých. Vezmeme dvě mince sejmuté z různých misek a srovnáme je s pravými. Jsou-li misky v rovnováze, je falešná zbývající sejmutá a její relativní váhu určíme podle prvního vážení. V opačném případě je falešná mince na vahách a víme, zda je lehčí nebo těžší, což ji umožní určit na základě prvního vážení. (2b) Vychylují-li se váhy stejně jako při prvním vážení, je falešná mince v trojici nepřemístěných a (2c) jestliže se váhy vychylují opačně než při prvém vážení, nachází se falešná mince mezi přesunutými. V obou případech jsou dvě mince z této trojice na jedné misce vah. Při posledním vážení srovnáme tyto mince mezi sebou. Váží-li stejně, je falešná zbývající mince z trojice, její relativní váhu určíme z druhého vážení. Jestliže dvě naposled vážené mince mají různou váhu, je falešná mince některá z nich. Zda je to ta lehčí nebo těžší, usoudíme opět z druhého vážení.

IV-16 Dva vypínače nutně musí být shodně buďto zapnuty, nebo vypnuty. Po vstupu do druhé místnosti nemohu v prvém případě rozhodnout, který ze zapnutých vypínačů patří k té které rozsvícené žárovce a ve druhém případě nemohu určit, který z vypnutých vypínačů ovládá tu kterou zhasnutou žárovku. Prakticky však vyřeším úlohu snadno: na chvíli zapnu jeden vypínač a po chvíli ho zase vypnu. Pak zapnu další vypínač a přejdu do druhé místnosti. Vypínač zapnutý jen chvíli ovládá zhasnutou žárovku, která je teplá. (Při důkazu teoretické „nemožnosti“ jsme nevzali v úvahu, že úloha nevylučuje užití vhodných fyzikálních zákonů.)

IV-17 Stejně jako vaše partnerka — se čtyřmi.

Nikdo si nemohl třást rukou s devíti účastníky, neboť si netřese rukou ani sám se sebou ani se svou partnerkou. Odpovědi jsou tedy čísla od 0 do 8. Uvažujme účastníka, jenž si potřásl rukou s osmi účastníky. Jeho partner si nepotřásl rukou s nikým, neboť víme, že existuje účastník, který si s nikým rukou nepotřásl, a to nemůže být nikdo jiný než partner maximálního potřásače. Vynecháme-li tento pár z úvah a budete-li se dotazovat, kolikrát si kdo potřásl rukou v rámci zbývajících párů, dostanete zase různé odpovědi (tentokrát 0–6).

Na závěr rekurze si uvědomme, že setkáváte-li se s partnerkou s jediným dalším párem, musí si vaše partnerka potřást rukou právě s jedním účastníkem (jinak dostanete dvě stejné odpovědi). Abyste od partnerů ve druhém páru dostal odpovědi „s nikým“ a „se dvěma“ musíte si potřást rukou přesně se stejným účastníkem jako vaše partnerka.

IV-18 Není potřeba sčítat řadu vzdáleností nalétaných vlaštovkou mezi vlaky. Vlaky se setkají za hodinu a vlaštovka tedy nalétá 100 km. V okamžiku setkání jsou od kteréhokoli města čela obou vlaků stejně daleko.

IV-19 Protože v obou nádobách po dvojím přelití je vždy stejně tekutiny, musí být po dvojím přelití stejně vína v první nádobě jako vody v nádobě druhé. Toto se nemůže změnit ani desetinásobným přeléváním.

Po prvním dvojitém přelévání musí být v první nádobě více vody než ve druhé, neboť po prvním přelití obsahuje směs ve druhé nádobě více vína než „směs“ v nádobě první. Přesně stejně tomu bude po každém následujícím dvojitém přelití. Takže nikdy nemůže být v žádné nádobě přesně tolik vína jako vody. Jediná možnost by byla přelít *celý* obsah první nádoby do druhé, to však zadání nepovoluje.

Tvrzení předchozího odstavce je založeno na matematickém předpokladu, že tekutiny jsou donekonečna dělitelné. Martina Gardnera, který poprvé úlohu uveřejnil, upozornil jeden čtenář, že při přijetí předpokladu existence atomů, jež se přeléváním nedělí, se pohled změní. (Nicméně pokud je vína nebo vody lichý počet molekul, nemůže ani při atomistickém pohledu být množství vína a vody v jedné sklenici nikdy stejné; pokud vám vadí pojem „molekuly vína“ změňte v zadání „víno“ na nějakou homogenní látku.)

IV-20 Jestliže součin let synů je 36, je jejich věk popsán některou z osmi trojic čísel: $\langle 1,1,36\rangle$; $\langle 1,2,18\rangle$; $\langle 1,3,12\rangle$; $\langle 1,4,9\rangle$; $\langle 1,6,6\rangle$; $\langle 2,2,9\rangle$; $\langle 2,3,6\rangle$ a $\langle 3,3,4\rangle$. Součet let synů neurčuje jednoznačně trojici pouze v případě, že je roven třinácti. I v tomto případě jsou však možné pouze dvě trojice $\langle 1,6,6\rangle$ a $\langle 2,2,9\rangle$. Existuje-li nejmladší syn, dovršil právě první rok života a sourozenci jsou šestiletá dvojčata. Pokud by naopak existoval nejstarší syn, byl by devítiletý a bratři by byli dvouletá dvojčata.

IV-21 Rozhovor se musel udát 29. února, v každý jiný den v roce je řešení více. Synové mají 4, 8 a 12 let. (Zadání je pojištěno i proti těm, kteří by chtěli oponovat jednoznačnosti tvrzením, že se mohou slavit i narozeniny právě narozeného: nejmladší měl minulý týden rýmu a nemůže proto být právě narozený.)

IV-22 Kdybyste prostě volil ze dvou dveří a pak byl dotázán, zda chcete volbu změnit, bylo by to jedno: pravděpodobnost, že jste poprvé volil správně je 1/2, pročež pravděpodobnost, že si volbou polepšíte, je rovněž 1/2.

V popsané televizní soutěži však byla situace složitější a při uvedeném zadání se vřele doporučuje volbu změnit. Na počátku volil výherce ze tří dveří, takže pravděpodobnost, že zvolil dveře se skutečnou cenou, je 1/3, změnou volby by si pohoršil v 1/3 případů. Pravděpodobnost, že první volbou volil dveře s cenou útěchy, je 2/3. V tomto případě moderátor otevřel *druhé dveře s cenou útěchy.* Za zbývajícími zavřenými dveřmi se proto musela nalézat skutečná cena.

IV-23 Kdybychom náhodně volili z celého systému kuliček najednou, byl by výběr černé kuličky stejně pravděpodobný jako výběr kuličky bílé. V naší úloze však volíme nejprve osudí a pak kuličku v něm. První osudí zvolíme s pravděpodobností 1/2, černou kuličku v něm s pravděpodobností 2/5. Pravděpodobnost zvolení černé kuličky touto cestou je součin uvedených pravděpodobností, tzn. 1/5. Druhé osudí zvolíme také s pravděpodobností 1/2, černou kuličku v něm s pravděpodobností 2/3, pročež pravděpodobnost výběru černé kuličky touto cestou je 1/3. Celkovou pravděpodobnost vybrání černé kuličky dostaneme jako součet pravděpodobností jejího výběru oběma cestami, což činí $(3+5)/15 = 8/15 > 1/2$.

IV-24 Ne. Každá strategie zaručí přesně poloviční pravděpodobnost výhry. K prokázání si představme malou modifikaci hry, ve které po slově „dost" otočíme nikoli vrchní kartu zbývajícího paklíčku, avšak kartu spodní (z hlediska pravděpodobnosti je to jedno, karty jsou dobře zamíchány). Při takovéto hře je zcela jedno, kdy řeknete „dost", pravděpodobnost je vždy přesně jedna polovina.

IV-25 Medvěd je bílý.

Hledáme na Zemi tři místa A, B a C, taková, že A je na sever jak od místa B, tak také od místa C, vzdálenost mezi místy A, B je 100 m a místo C je sto metrů na východ od místa B. Jednou z možností je, že A je severním pólem a místa B a C mají tutéž zeměpisnou šířku, jsou 100 metrů na jih od severního pólu a od sebe vzdáleny 100 metrů. V Arktidě žijí jen bílí medvědi (snad někdy některý zabloudí až na pól). Další možností je, že body B a C splývají a bod B je u jižního pólu v takové vzdálenosti, že ujde-li lovec sto metrů na východ, dostane se do výchozího bodu. Přitom může pól obejít jednou, dvakrát, atd. Bod A je pak přesně sto metrů na sever od bodu B. Přestože možných poloh medvěda by tentokrát bylo nekonečně mnoho, nemusí nás tyto případy zajímat: v Antarktidě ještě nebyl objeven žádný medvěd.

IV-26 Pokud zbudou jen dva nejmladší piráti, nemůže se druhý nejmladší zachránit žádným návrhem na dělení majetku. Musí tudíž v předchozích hlasováních hlasovat tak, aby k této variantě nedošlo. Takže pokud by zbyli jen tři nejmladší, mohl by prostřední navrhnout, že si ponechá všech sto zlaťáků, neboť druhý nejmladší ho podpoří ze strachu o život. V okamžiku, když navrhuje dělení druhý nejstarší, ví, že prostředního uplatit nemůže, ten se jen třese na možnost druhého nejstaršího zabít a shrábnout všech sto zlaťáků. Druhý nejstarší proto musí uplatit dva nejmladší. Při dělení navrženém prostředním by nedostali nic; pročež s radostí vezmou jeden zlaťák a podpoří druhého nejstaršího. Nejstarší sice může uplatit druhého nejstaršího, ten má však možnost při svém dělení získat 98 zlaťáků, takže by mu nejstarší musel nabídnout 99 zlaťáků a úplatkem jednoho zlaťáku získat prostředního. Pak by však nejstarší nezískal ani jediný zlaťák. Co tedy zkusit uplatit prostředního: ten při návrhu druhého nejstaršího nedostane nic, takže k jeho uplacení stačí jediný zlaťák. Oba nejmladší mají naději na zlaťák při dělení, které by za okamžik navrhoval druhý nejstarší. Bude-li nejstarší podpořen prostředním, stačí mu si zajistit podporu kteréhokoli z nejmladších pirátů a k tomu postačuje jednomu z nich nabídnout dva zlaťáky. Nejstarší tedy může sám sobě navrhnout dokonce podíl 97 zlaťáků.

IV-27 V první části sestrojovaného algoritmu budeme předpokládat, že je otočen navrch pannou sudý počet mincí. Protože partner hru neukončil okamžitě, nejsou všechny mince otočeny pannou navrch. Nejprve zkusíme zda nejsou všechny mince otočeny orlem navrch, tj. převrátíme všechny mince. Pokud partner hru neukončil, prozkoumáme, zda nejsou v rozích jedné diagonály mince navrch orlem a na druhé diagonále navrch pannou, tj. nejprve převrátíme mince na jedné diagonále a potom všechny mince. Zatím jsme otáčeli mincemi třikrát.

Byl-li na počátku sudý počet mincí otočen pannou navrch, je tomu tak dosud a navíc neukončil-li partner dosud hru, nebyly a nejsou na diagonálách souhlasně otočené mince. Otočme nyní dvě mince na jedné straně čtverce. Pokud na obou diagonálách byly dosud mince otočeny nesouhlasně, budou nyní otočeny souhlasně. Zopakujme všechny kroky algoritmu popsané doposud. Náš algoritmus měl dosud sedm kroků.

Dosud jsme popsali algoritmus, jenž povede k ukončení hry v případě, že na počátku byl sudý počet mincí otočených pannou nahoru a při každém kroku tohoto algoritmu jsme zachovali sudost počtu mincí otočených pannou nahoru (i když konkrétní počet se mohl změnit). Předpokládejme, že partner hru stále ještě neukončil. Pak na počátku byl a dosud je lichý počet mincí otočených pannou nahoru. Otočme nyní libovolnou minci, tím bude počet mincí otočených pannou nahoru zcela jistě sudý. Opakujme výše popsaný sedmikrokový algoritmus; v jeho průběhu, anebo po jeho dokončení náš partner hru ukončí.

IV-28 Úsečky protínající každou přímku procházející čtvercem $ABCD$, avšak neřešící úlohu: (a) tři strany čtverce; součet délek úseček je 6 (b) obě úhlopříčky; součet délek větší než 5,65 a menší než 5,66 (neboť $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$); (c) dvě sousedící strany čtverce a polovina úhlopříčky vycházející ze čtvrtého vrcholu; součet délek je větší než 5,41 a menší než 5,42 (viz diagramy 3–5).

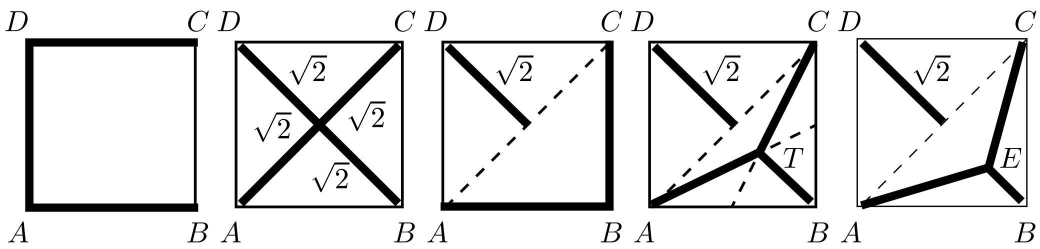

Diagram 3 Diagram 4 Diagram 5 Diagram 6 Diagram 7

Sestrojíme rovnoramenný trojúhelník AEC tak, aby vrchol E ležel uvnitř $\triangle ABC$ a úhel $\sphericalangle AEC$ byl 120^0 (viz diagram 7; následně získáme $\sphericalangle AEC = \sphericalangle AEB = \sphericalangle BEC$). Ke třem úsečkám AE, BE, CE přidáme polovinu úhlopříčky vycházející z vrcholu D. Součet délek těchto úseček je

$$\sqrt{2} \cdot [2 \cdot 1/\cos 30^0 + (1 - \operatorname{tg} 30^0) + 1]$$

a v důsledku vztahů $0.866 \leq \cos 30^0 \leq 0.867$ a $0.577 \leq \operatorname{tg} 30^0 \leq 0.578$ je proto menší než

$$1.415 \cdot [2 \cdot 1/0.866 + (1 - 0.577) + 1] \leq 1.415 \cdot [2 \cdot 1.155 + 0.423 + 1] \leq 5.283.$$

Řešením našeho zadání je také spojit vrcholy trojúhelníku ABC s těžištěm T tohoto trojúhelníku (viz diagram 6), dostaneme však o něco horší výsledek: sice menší než 5.345, avšak větší než 5.336.

IV-29 Jeden princ, např. nejstarší si představí, že má na hlavě modrý klobouk. Pak by prostřední princ uvažoval takto: „Kdybych měl na hlavě modrý klobouk, viděl by nejmladší bratr dva modré klobouky a okamžitě by prohlásil, že má na hlavě klobouk červený. On to však dosud neřekl. Tedy já, prostřední bratr, nemám modrý klobouk.“ Nejstarší se tedy znovu podívá na prostředního a čeká chvíli, zda jeho inteligentní bratr něco neřekne. Nic neříká. Takže předpoklad, že já, nejstarší princ, mám na hlavě modrý klobouk je chybný. Honem musím vstát a oznámit, že mám červený.

IV-30 *Dříve než* se setkáte s protivníkem, vypijete jed č. 1.

IV-31 Prvním výrokem vám Adam sděluje mj., že nedostal součin dvou prvočísel. Dále zcela určitě jsem mu nesdělil ani jeden ze součinů $98 \cdot 98$, $98 \cdot 99$ a $99 \cdot 99$. Tato čísla jsou totiž od sebe různá a větší než jakékoli číslo tvaru $x \cdot y$, kde $x \leq 97$ a $y \leq 99$, takže kdyby Adam dostal některý součin z uvedené trojice, znal by čísla, jež jsem si myslel.

Protože Bohouš věděl, že Adam nedostal součin dvou prvočísel, víte, že součet myšlených čísel není součtem dvou prvočísel, pročež jako možné součty jsou vyloučena čísla

$$4 = 2+2, 5 = 2+3, 6 = 3+3, 7 = 2+5, 8 = 3+5, 9 = 2+7, 10 = 3+7, 12 = 5+7, 13 = 2+11,$$
$$14=3+11, 15=2+13, 16=3+13, 18=5+13, 19=2+17, 20=3+17, 21=2+19, 22=5+17,$$
$$24=5+19, 25=2+23, 26=3+23, 28=5+23, 30=7+23, 31=2+29, 32=3+29, 33=2+31,$$
$$34=3+31, 36=5+31, 38=7+31, 39=2+37, 40=3+37, 42=5+37, 43=2+41, 44=3+41,$$
$$45 = 2 + 43, 46 = 3 + 43, 48 = 5 + 43, 49 = 2 + 47, 50 = 3 + 47, 52 = 5 + 47, 54 = 7 + 47.$$

Navíc jakékoli číslo větší než 55 a menší než 97+99+1 je možno psát ve tvaru $53+x$ nebo ve tvaru $97 + x$, kde $2 \leq x \leq 99$. Pro uvedená x je však ze součinů tvaru $53 \cdot x$ a $97 \cdot x$ rozklad $y \cdot z$ splňující $2 \leq y, z \leq 99$ jednoznačný, neboť $2 \cdot 53 > 99$. Ukázali jsme, že po první Bohoušově odpovědi již víte, že součet mu sdělený je mezi čísly ze seznamu (i).

Prozkoumejme nyní několik možných součinů zadaných Adamovi a ukažme, že v těchto případech by Adam po první Bohoušově odpovědi již znal původně myšlená čísla (neboť existuje jediný rozklad součinu na dva činitele různé od 1 takový, že součet těchto činitelů je mezi čísly seznamu (i)).

součin	součet činitelů	jiný rozklad	součet činitelů	jiný rozklad	součet činitelů
$2 \cdot 9$	11	$6 \cdot 3$	9		
$3 \cdot 8$	11	$6 \cdot 4$	10	$12 \cdot 2$	14
$4 \cdot 13$	17	$2 \cdot 26$	28		
$4 \cdot 19$	23	$2 \cdot 38$	40		
$10 \cdot 13$	23	$2 \cdot 65$	67	$5 \cdot 26$	31
$2 \cdot 25$	27	$5 \cdot 10$	15		
$4 \cdot 23$	27	$2 \cdot 46$	48		
$6 \cdot 23$	29	$2 \cdot 69$	71	$3 \cdot 46$	49
$7 \cdot 22$	29	$2 \cdot 77$	79	$11 \cdot 14$	25
$6 \cdot 29$	35	$2 \cdot 87$	89	$3 \cdot 58$	61
$14 \cdot 19$	35	$2 \cdot 133$	135	$7 \cdot 38$	45
$8 \cdot 29$	37	$2 \cdot 116$	118	$4 \cdot 58$	62
$6 \cdot 31$	37	$2 \cdot 93$	95	$3 \cdot 62$	65
$4 \cdot 37$	41	$2 \cdot 74$	76		
$7 \cdot 34$	41	$2 \cdot 119$	121	$14 \cdot 17$	31
$4 \cdot 43$	47	$2 \cdot 86$	88		
$6 \cdot 41$	47	$2 \cdot 123$	125	$3 \cdot 82$	85
$4 \cdot 47$	51	$2 \cdot 94$	96		
$10 \cdot 41$	51	$2 \cdot 205$	207	$5 \cdot 82$	87
$6 \cdot 47$	53	$2 \cdot 141$	143	$3 \cdot 94$	97
$10 \cdot 43$	53	$2 \cdot 215$	217	$5 \cdot 86$	91

Je vyloučeno, aby Bohouš dostal jiné číslo než 17, protože pro každé jiné číslo existuje možnost zadání Adamovi dvou součinů, které umožní jednoznačné určení původně zadaných čísel, což vylučuje pravdivost druhé Bohoušovy odpovědi. Zadanými čísly mohou být pouze čísla 4 a 13, nicméně přesvědčme se ještě, že tato čísla opravdu umožňují pravdivost druhé Bohoušovy odpovědi, tj. prokažme, že pro každý součin $x \cdot y$, kde $x + y = 17$ a $\{x, y\} \neq \{4, 13\}$ & $x \neq 1$ & $y \neq 1$, existuje ještě jiný rozklad na dva činitele různé od 1, jejichž součet je v seznamu (i).

$$2 \cdot 15 = 5 \cdot 6,\ 3 \cdot 14 = 2 \cdot 21,\ 5 \cdot 12 = 3 \cdot 20,\ 6 \cdot 11 = 2 \cdot 33,\ 7 \cdot 10 = 2 \cdot 35,\ 8 \cdot 9 = 3 \cdot 24.$$

Myslel jsem si čísla 4 a 13.

IV-32 Prvním tvrzením sděluje Adam mj., že nedostal jako součin prvočíslo, rozklad by totiž byl jednoznačný. Takže Bohouš ve své první výpovědi vyhlašuje mj., že jeho součet není následovníkem prvočísla. Dále Adam nemohl dostat součin rovný 1, pročež Bohouš nemohl obdržet jako možný součet číslo 2.

Navíc jakékoli číslo větší nebo rovno 55 a menší nebo rovno 97+99 je možno psát ve tvaru $53 + x$ nebo ve tvaru $97 + x$, kde $2 \leq x \leq 99$. Pro uvedená x je však ze součinů tvaru $53 \cdot x$ a $97 \cdot x$ rozklad $y \cdot z$ splňující $1 \leq y, z \leq 99$ jednoznačný, neboť $2 \cdot 53 > 99$.

Nadto Adam nemohl dostat součin dvou prvočísel, který je větší než 99 (pokud je součin větší než 99, nemohl jsem si myslet tento součin a číslo 1). Pročež z Bohoušova prvního tvrzení se dovídáme, že nedostal ani součty

$$11 + 11, 11 + 17, 11 + 23, 11 + 29, 11 + 41, 13 + 13, 13 + 23, 13 + 37, 17 + 29.$$

Adamovi jsem však podle jeho první výpovědi nemohl dát ani dvojnásobek součinu dvou stejných prvočísel, pokud součin těchto stejných prvočísel by byl větší než 99. Bohoušova první výpověď tudíž vylučuje i součty $33 = 2 \cdot 11 + 11$, 39 a 51. Ukázali jsme, že po první Bohoušově odpovědi již víte, že součet mu sdělený je mezi čísly ze seznamu (i).

Adam dostal nějaký součin prvočísel x a k tomuto součinu mohl vytvořit množinu čísel, do které zařadil následovníka obdrženého součinu, tj. číslo $x+1$ a všechny součty $y+z$, dvou čísel y,z, pro které jest $x = y\cdot z \;\&\; 1 < y,z \le 99$. Jestliže by se nacházelo mezi čísly (i) právě jedno číslo z uvažované množiny, uměl by Adam ze znalosti čísla x určit čísla y,z nebo čísla $1,x$ jako ta, která jsem si myslel. Pročež první část druhé Bohoušovy výpovědi vylučuje, že pro součet s, který dostal, existují čísla x,y,z s popsanými vlastnostmi a taková, že $s = y+z$ nebo $s = x+1$.

Úvahu z předchozího odstavce aplikujme na několik konkrétních příkladů.

(a) K vyloučení $s = 5$ zvolíme $y = 2, z = 2$. Sestrojená množina se skládá z čísel $y\cdot z+1 = 2\cdot 2+1 = 5$ a $2+2$; v seznamu (i) je právě číslo 5. Analogicky k vyloučení *následovníků* součinů $3\cdot 3$ a $3\cdot 5$ budeme volit uvedené činitele jako čísla y,z. Nadto k vyloučení čísla $s = 9$ volíme $x = 2\cdot 2\cdot 2$ (tři činitelé).

(b) K vyloučení čísla $s = 21$ zvolme čísla $y = 2, z = 19$ (pak $x = 2\cdot 19$ je součinem dvou činitelů). Sestrojená množina se skládá z čísel $y\cdot z+1 = 2\cdot 19+1 = 39, 2+19 = 21$; v seznamu (i) je právě číslo 21. Analogicky k vyloučení čísla $s = 15$ zvolme čísla $y = 8, z = 7$ (pak $x = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 7$ je součinem čtyř činitelů). Popsaná množina se skládá z čísel $y\cdot z+1 = 57, 2+28, 4+14, 8+7$; v seznamu (i) je právě číslo 15. Podobně k vyloučení následujících součtů zvolíme jako čísla y,z uvedené sčítance:

$$19 = 8+11, 23 = 4+19, 25 = 8+17, 27 = 4+23, 29 = 16+13, 31 = 2+29, 35 = 4+31,$$
$$37 = 8+29, 41 = 4+37, 43 = 2+41, 45 = 2+43, 47 = 4+43, 49 = 2+47, 53 = 6+47.$$

Popsaným vynecháním čísel získáme seznam (ii).

Jsou tři možnosti, jak mohlo vzniknout číslo 7 jako součet: 7=6+1=5+2=4+3. V prvém případě dostal Adam součin $2\cdot 3$ a po první části druhé Bohoušovy odpovědi umí myšlená čísla jednoznačně určit. Na proti tomu v druhých dvou případech dostal Adam součiny $2\cdot 5$ a $2\cdot 2\cdot 3$ a v obou těchto případech má kromě čísla 7 právě *jeden* možný součet, který je v seznamu (ii): 11=10+1 v případě prvém a v případě druhém 13=12+1. Takže kdyby Bohouš obdržel číslo 7, byla by jeho žádost o dodatečnou informaci nesmyslná. Při své třetí odpovědi už Adam ví, že Bohouš má některé z čísel 11, 13, 17.

Pokud Bohouš obdržel číslo 11, musí připustit, že vzniklo jako některý ze součtů 11=10+1=9+2=8+3= =7+4=6+5. Ve všech případech kromě posledního zbývá Adamovi jediná možnost, jak rozložit zadaný součin a získat součtem číslo z trojice 11, 13, 17. Takže svou poslední odpovědí Adam vylučuje všechny uvedené možnosti kromě poslední. V posledním případě dostal Adam součin $2\cdot 3\cdot 5$ a příslušné součty jsou tři: 17=2+15, 13=3+10 a 11=5+6.

Pokud by Bohouš obdržel součet 13 nebo 17, musel by zvážit, že Adam mohl dostat mj. součiny $2\cdot 3\cdot 5$ a $2\cdot 3\cdot 7$, neboť 13=3+10=6+7 a 17=2+15=3+14. Žádnou z těchto možností by Bohouš nemohl po třetí výpovědi Adama vyloučit a proto by nemohl prohlásit, že myšlená čísla zná.

Myslel jsem si čísla 5 a 6.

TABULKY K ÚLOHÁM §3 KAP. I

p	q	p → q	¬p	¬p ∨ q	¬q	p & ¬q	¬(p & ¬q)
0	0	1	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1	0	0	1

Tabulka B

p	¬p	¬¬p	¬¬p → p	p → ¬¬p
0	1	0	1	1
1/2	1/2	1/2	1	1
1	0	1	1	1

Tabulka C

p	q	¬p	p → q	¬p → (p → q)
1/2	0	1/2	0	0

Tabulka D

p	q	¬p	¬q	p → q	p → ¬q	(p → ¬q) → ¬p	$\mathcal{A}$
1/2	1/2	1/2	1/2	1	1	1/2	1/2

Tabulka E

p	q	¬p	¬q	¬p → q	¬p → ¬q	(¬p → ¬q) → p	$\mathcal{B}$
1/2	1/2	1/2	1/2	1	1	1/2	1/2

Tabulka F

p	q	q → p	**VP1**	¬p	¬q	¬q → ¬p	p → q	**VP3**
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1/2	1/2	1	1	1/2	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1
1/2	0	1	1	1/2	1	1/2	1/2	1
1/2	1/2	1	1	1/2	1/2	1	1	1
1/2	1	1/2	1	1/2	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0	0	1
1	1/2	1	1	0	1/2	1/2	1/2	1
1	1	1	1	0	0	1	1	1

Tabulka G

p	q	r	q → r	p → (q → r)	p → r	p → q	(p → q) → (p → r)	**VP2**
1/2	1/2	0	1/2	1	1/2	1	1/2	1/2

Tabulka H

p	q	r	$p \to r$	$q \to r$	$(q \to r) \to (p \to r)$	$p \to q$	$(p \to q) \to [(q \to r) \to (p \to r)]$
0	0	0	1				1
0	0	1/2	1				1
0	0	1	1				1
0	1/2	0	1				1
0	1/2	1/2	1				1
0	1/2	1	1				1
0	1	0	1				1
0	1	1/2	1				1
0	1	1	1				1
1/2	0	0	1/2	1	1/2	1/2	1
1/2	0	1/2	1				1
1/2	0	1	1				1
1/2	1/2	0	1/2	1/2	1		1
1/2	1/2	1/2	1				1
1/2	1/2	1	1				1
1/2	1	0	1/2	0	1		1
1/2	1	1/2	1				1
1/2	1	1	1				1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1/2	1/2	1	1/2	0	1
1	0	1	1				1
1	1/2	0	0	1/2	1/2	1/2	1
1	1/2	1/2	1/2	1	1/2	1/2	1
1	1/2	1	1				1
1	1	0	0	0	1		1
1	1	1/2	1/2	1/2	1		1
1	1	1	1				1

Tabulka I

p	$\neg p$	$p \to \neg p$	$(p \to \neg p) \to p$	$[(p \to \neg p) \to p] \to p$
0	1	1	0	1
1/2	1/2	1	1/2	1
1	0	0	1	1

Tabulka J

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg q \to \neg p)$	$(p \to q)$	**VP3**
0	0	1	1	1	1	1
0	1/2	1	1/2	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1/2	0	1/2	1	0	0	1
1/2	1/2	1/2	1/2	1	1	1
1/2	1	1/2	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1/2	0	1/2	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

Tabulka K

p	q	$(q \to p)$	**VP1**
1/2	1	0	0

Tabulka L

p	q	r	(p → r)	(p → q)	[(p → q) → (p → r)]	(q → r)	[p → (q → r)]	**VP2**
0	0	0	1					1
0	0	1/2	1					1
0	0	1	1					1
0	1/2	0	1					1
0	1/2	1/2	1					1
0	1/2	1	1					1
0	1	0	1					1
0	1	1/2	1					1
0	1	1	1					1
1/2	0	0	0	0	1			1
1/2	0	1/2	1					1
1/2	0	1	1					1
1/2	1/2	0	0	1	0	0	0	1
1/2	1/2	1/2	1					1
1/2	1/2	1	1					1
1/2	1	0	0	1	0	0	0	1
1/2	1	1/2	1					1
1/2	1	1	1					1
1	0	0	0	0	1			1
1	0	1/2	0	0	1			1
1	0	1	1					1
1	1/2	0	0	0	1			1
1	1/2	1/2	0	0	1			1
1	1/2	1	1					1
1	1	0	0	1	0	0	0	1
1	1	1/2	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1					1

Tabulka M

p	q	(q → p)	**VP1**	¬p	¬q	(¬q → ¬p)	(p → q)	**VP3**
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1/2	0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1
1/2	0	1	1	0	1	0	0	1
1/2	1/2	1	1	0	0	1	1	1
1/2	1	1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0	0	1
1	1/2	1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0	1	1	1

Tabulka N

p	q	r	$(p \to r)$	$(p \to q)$	$[(p \to q) \to (p \to r)]$	$(q \to r)$	$[p \to (q \to r)]$	**VP2**
0	0	0	1					1
0	0	1/2	1					1
0	0	1	1					1
0	1/2	0	1					1
0	1/2	1/2	1					1
0	1/2	1	1					1
0	1	0	1					1
0	1	1/2	1					1
0	1	1	1					1
0	0	0	1					1
1/2	0	0	0	0	1			1
1/2	0	1/2	1					1
1/2	0	1	1					1
1/2	1/2	0	0	1	0	0	0	1
1/2	1/2	1/2	1					1
1/2	1/2	1	1					1
1/2	1	0	0	1	0	0	0	1
1/2	1	1/2	1					1
1/2	1	1	1					1
1	0	0	0	0	1			1
1	0	1/2	1					1
1	0	1	1					1
1	1/2	0	0	1	0	0	0	1
1	1/2	1/2	1					1
1	1/2	1	1					1
1	1	0	0	1	0	0	0	1
1	1	1/2	1					1
1	1	1	1					1

Tabulka O

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \to \neg p$	$p \to q$	**VP3**
1/2	0	1/2	1	1	0	0

Tabulka P

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \to \neg p$	$p \to q$	**VP3**
1	1/2	0	0	1	1/2	1/2
1/2	0	0	1	0	0	1

Tabulka Q

p	$\neg p$	$\neg\neg p$	$p \to \neg\neg p$
0	1	0	1
1/2	0	1	1
1	0	1	1

Tabulka R

p	q	$\neg p$	$p \to q$	$\neg p \to (p \to q)$	$\neg q$	$p \to \neg q$	$(p \to \neg q) \to \neg p$	$\mathcal{A}$
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1/2	1	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1	1
1/2	0	0	0	1	1	1	0	1
1/2	1/2	0	1	1	0	0	1	1
1/2	1	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1
1	1/2	0	1/2	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0	1	1

Tabulka S

p	q	$\neg p$	$\neg\neg p$	$\neg\neg p \to p$	$\neg q$	$\neg p \to q$	$\neg p \to \neg q$	$(\neg p \to \neg q) \to p$	$\mathcal{B}$
1/2	1/2	0	1	1/2	0	1	1	1/2	1/2

Tabulka T

LITERATURA

VYBRANÉ PRÁCE Z LOGIKY

[Ben] K. Bendová, Sylogistika, Karolinum, Praha 1998

[B-H] G. Bizám a J. Herczeg, Hra a logika v 85 příkladech, ALFA, Bratislava 1972

[Ca] L. Carroll, The game of Logic 1896, český překlad: Logika hrou, nakladatelství ČTK, Praha 1972

[Ga1] F. Gahér, Logické hádanky, hlavolamy a paradoxy, IRIS, Bratislava 1997

[Ga2] F. Gahér, Logika pre každého, IRIS, Bratislava 1998

[D-M] M. Duží a J. Markl, Matematická logika, katedra informatiky VŠB-Technická universita Ostrava

[Ch-K] C.C. Chang a H.J. Keisler, Model Theory, North-Holland Publ. Company, Amsterdam-London 1973, ruský překlad: Мир, Moskva 1977

[J-V] P. Jirků a J. Vejnarová, Formální logika Neformální výklad základů formální logiky, VŠE 2000

[Ml] M. Mleziva, Neklasické logiky, Svoboda, Praha 1970

[Pe] J. Peregrin, Logika a logiky, Academia, Praha 2004

[Sh] J.R. Shoenfield, Mathematical Logic, Adison-Wesley, Reading 1967, ruský překlad: Наука, Moskva 1975

[So] A. Sochor, Klasická matematická logika, Karolinum, Praha 2001

[Sm] R.M. Smullyan, What is the Name of this Book, Prentice-Hall, New Jersey 1978, český překlad: Jak se jmenuje tahle knížka?, Mladá Fronta, Praha 1986

[Št] P. Štěpánek, Matematická logika, skripta MFF UK, SPN, Praha 1982

[Šv] V. Švejdar, Logika - neúplnost, složitost a nutnost, Academia, Praha 2002

[T1] A. Tarski, Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences, Oxford University Press, 3. vydání New York 1965, český překlad: Academia, Praha 1966

[Zi] 0. Zich a kol., Moderní logika, Malá moderní encyklopedie, Orbis, Praha 1958

HISTORICKÉ PRAMENY — Práce s původními matematickými výsledky

[A1] Aristoteles, První analytiky (Organon III), Nakladatelství ČSAV, Praha 1961; Druhé analytiky (Organon IV), tamtéž 1962

[A2] Aristoteles, Topiky (Organon V), Academia, nakladatelství ČSAV, Praha 1975

[A3] Aristotelés, Metafyzika, Nakladatelství Petr Rezek, Praha 2003

[Bel] E. Beltrami, Theoria fondamentale delgi spazil di curvatura constanta, Annali. di Mat., ser. II 2 (1868), 232–255

[Bol1] Wissenschaftslehre, Versuch einer ausführlichen und grösstenteils neuen Darstellung der Logik mit steter Rücksicht auf deren bisherige Bearbeiter. 4 vols. Sulzbach, 1837 český překlad: Vědosloví (Výbor) Akademia, Praha 1981

[Bol2] B. Bolzano, Paradoxien des Unendlichen, Leibzig 1851, český překlad: Paradoxy nekonečna, Nakladatelství ČSAV, Praha 1963

[Boo1] G. Boole, The Mathematical Analysis of Logic, Cambridge, 1847

[Boo2] G. Boole, An Investigation of the Laws of Thought, London 1854

[Br] L.E.J. Brouwer, Intuitionisme en formalisme, Amsterdam 1912

[Ch] A. Church, Introduction to mathematical logic, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey 1956, ruský překlad: Издавательство иностранновИ литературы, Moskva 1960

[Euk] Eukleidés, Základy, Jednota českých matematiků, Praha 1907

[Eul] L. Euler, Lettres à une Princesse d'Allemagne (Dopisy jedné německé princezně), St. Petersburg 1768

[Fre] G. Frege, Begriffschrift eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens, Halle 1879

[G1] K. Gödel, Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, Monatshefte für Mathematik und Physik 37 (1930), 349–360

[G2] K. Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, Monatshefte für Mathematik und Physik 38 (1931), 173–198

[G3] K. Gödel, Zur intuitionistischen Aritmetik und Zahlentheorie, Ergeb. Math. Koll 4 (1931–2), Wien

[Gr] A. Grzegorczyk, Zarys logiki matematycznej, Państwowe wydawnictwo naukowe, Warszawa 1961

[Há1] P. Hájek, Metamathematics of fuzzy logic, Kluwer 1998

[Hi1] D. Hilbert, Mathematische Probleme, Archiv f. Math. u. Phys. 3. Reihe, Bd. 1 (1991), 44–63, 213–237

[Hi2] D. Hilbert, Die logischen Grundlagen der Matematik, Mathem. Annalen 88 (1923), 151–165

[K-P] L. Kirby a J. Paris, Accessible independence results for Peano aritmetic, Bull. London Math. Soc. 14 (1982), 285–293

[Kri] S.A. Kripke, A Completenes Theorem in Modal Logic, Journ. Symb. Logic 24 (1959), 1–14

[Le1] G.W. Leibniz, Dissertatio de arte combinatoria 1690

[Ł1] J. Łukasiewicz, Resumé referátu v Polskim Towarzystwie Filozoficznym we Lwowie, Ruch filozoficzny V. (1920)

[Ł2] J. Łukasiewicz, Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen der Aussagenkalküls, Sprawozdania Towarzystwa Naukowego Warszawskiego 1930

[Me] C. A. Meredith, Single Axioms for the System (C,N), (C,O) and (A,N) of the two-valued propositional calculus, Journal of Computational Systems 3 (1953), 155–164

[Mos] A. Mostowski, On models of axiomatic systems, Fund. Math. 39 (1952), 133-158

[Mor] A. de Morgan, Formal Logic, London 1847

[Pa] J. Paris, Some independence results for Peano arithmetic, Journ. Symb. Logic 43 (1978), 725–731

[Po] E. Post, Introduction to a general theory of elementary propositions, Amer. Jour. Math. 43 (1921)

[Pr] M. Presburger, Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt, in: Sprawozdanie z 1 Kongresu Matematyków Krajow Słowiańskich (1929), Książnica Atlas, Varšava 1930, 92–101 a 395

[Ri] L. Rieger, O některých základních otázkách matematické logiky, Časopis pro pěstování matematiky, 81 (1956), 342–351

[Rob] A. Robinson, Non-standard Analysis, North-Holland Publ. Company, Amsterdam 1966

[Ros] J. B. Rosser, Extensions of some theorems of Gödel and Church, Journ. Symb. Logic 1 (1936), 87–91

[Ru] B. Russell, Mathematical Logic as based on the Theory of Types, American Journal of Mathematics, 30 (1908), 59–102

[RN] C. Ryll-Nardzewski, The role of the Axiom of Induction in the Elementary Arithmetic, Fund. Math. 39 (1953)

[Sl] J. Słupecki, Der volle dreiwertige Aussagenkalkül, Com. rend. Soc. Sci. Lett. de Varsovie, 1936

[T2] A. Tarski, Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych, Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Nr. 34, Wydzial III, Warszawa 1933

[T-M-R] A. Tarski, A. Mostowski and R. M. Robinson, Undecidable Theories, North-Holland Publ. Company, Amsterdam 1953

[Ve] J. Venn, Symbolic Logic, London 1881

[V1] P. Vopěnka, Mathematics in the Alternative Set Theory, TEUBNER TEXTE, Leipzig 1979

[W-R] A. N. Whitehead a B. Russell, Principia Mathematica, Cambridge University Press, Cambridge 1910–1913

[W] M. Wajsberg, Axiomatyzacja trójwartościowego rachunku zdań, Com. rend. Soc. Sci. Lett. de Varsovie, 1932

[Za] L. A. Zadeh, Fuzzy Sets, Information and Control 8 (1965), 338-353

PRÁCE O DĚJINÁCH LOGIKY NEBO MATEMATIKY

[Boch] I.M. Bocheński, Ancient Formal Logic, North-Holland Publ. Company, Amsterdam 1951

[Sou] P. Sousedík, Logika pro studenty humanitních oborů, Vyšehrad, 1999

[Kn-Kn] W. Kneale a M. Kneale, The development of logic, Clarendon Press, Oxford 1984

[V2] P. Vopěnka, Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci, Práh, Praha 2000

[V3] P. Vopěnka, Podivuhodný květ českého baroka, Karolinum, Praha 1998

OSTATNÍ CITACE

[An] Anselm z Canterbury, Fides quærens intellectum, Kalich, Praha 1990

[Al] P.S. Alexandrov, Úvod do teorie grup, Mir, Moskva 1985

[B-Š] B. Balcar a P. Štěpánek, Teorie množin, Academia, Praha 1986, 2. opravené a rozšířené vydání 2000

[B-B-C] I. Bušek, L. Boček a E. Calda, Matematika pro gymnázia, Základní poznatky z matematiky, Prometheus, Praha 1994

[Ce] S.M. Cervantes, Důmyslný rytíř Don Quijote de la Mancha, Svoboda, Praha 1982

[Č] K. Čapek, Kritika slov, Svoboda, Praha 1969, 4. vydání

[Fra] A. Fraenkel, Zu dem Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre, Math. Ann. 86 (1922), 230–237

[Há2] P. Hájek, Gödelův důkaz existence Boha, v: Kurt Gödel, ed. J. Malina a J. Novotný, Nadace universitas Masarykiana, Brno 1996, 117–129

[EM] A. Rossiová Dell'Acqua, Encyklopedie matematiky, Mladá fronta, Praha 1988

[Le2] G.W. Leibniz, Monadologie a jiné práce, Svoboda, Praha 1982

[Mi] D. Mirimanoff, Les antinomies de Russell et de Burali-Forti, L'Enseignement Matetḥmatique, 1917, 37–52

[Sp] B. Spinoza, Ethika, Česká akademie věd a umění, Praha 1926

[Sl] Slovník školské matematiky, SPN, Praha 1981

[TA] Tomáš Akvinský, Theologická summa, Edice Kristal, Olomouc 1937

[Ze] E. Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, Mathematische Annalen, 65 (1908), 261–281

REJSTŘÍK JMENNÝ

Poznámka: při psaní řeckých jmen dodržujeme délku samohlásek podle Slovníku antické kultury, Svoboda, Praha 1974

REJSTŘÍK VĚCNÝ

REJSTŘÍK SYMBOLŮ

Terminologická poznámka: Užití slova „plyne“ jako ekvivalentu slova „implikuje“ (např. ve spojení „z formule φ plyne formule ψ“ je v souhlase s publikacemi [B-B-C], [Sl] a zejména s terminologickou středoškolskou normou [NZ]; v encyklopedii [EM] se pro implikaci používá dokonce obratu „Z ... vyplývá ...“. Poznamenejme, však že někteří autoři (např. [D-M]) používají slov „plyne“, „vyplývá“ v poněkud jiném významu: spojení „z prvního výroku vyplývá výrok druhý“ užívají jen v případě, že pravdivost prvního výroku zaručuje pravdivost druhého výroku, tj. jestliže implikace je *dokazatelná*) — protože však je pak velice obtížné najít vhodné sloveso pro vyjádření implikace, je asi nejlepší kompromisně užívat slovo „plyne“ pro implikaci a slovo „vyplývá“ vyhradit pro význam uvedený jako druhý.