Úvod do TI - logika
Souhrn důkazových metod PL1

Marek Menšík

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Důkazové metody v predikátové logice 1. řádu

- **Sémantické** (metody zabývající se sémantikou, tedy významem. V PL1 je významem formule její interpretace)
  - **Vennovy diagramy** (grafická důkazová metoda navržena pro Aristotelovy sylogismy)
    - Možné i širší využití než jen Aristotelovy sylogismy. Použitelná však jen pro formule s jednoargumentovými predikáty.
  - **Relační struktury** (metoda využitelná při větší aritě predikátů než 1)
- **Syntaktické** (metody zabývající se syntaxí, tedy „tvarem“; nezajímají se o význam; automatizované dokazování)
  - **Sémantická tabla** (disjunktivní pro důkaz kontradikce a konjunktivní pro důkaz tautologie)
  - **Rezoluční metoda** (nepřímá pro důkaz nesplnitelnosti a přímá pro přímé odvození)
    - Přímá metoda je aplikovatelná pouze v případě, že se v předpokladech nevyskytují existenční kvantifikátory.

Sémantické metody – Vennovy diagramy

Algoritmus

- Obory pravdivosti predikátů zakreslíme jako (vzájemně se protínající) kroužky – každé dvě množiny mají společný průnik.
- Znázorníme situaci, kdy jsou premisy pravdivé, tj.:
  1. Vyšrafujeme plochy, které odpovídají prázdným třídám objektů (všeobecné předpoklady)
  2. Označíme křížkem plochy, které jsou jistě neprázdné (existenční předpoklady); křížek přitom klademe jen tehdy, když neexistuje jiná plocha, ”kam by mohl přijít”
- Nakonec ověříme, zda vzniklá situace znázorňuje pravdivost závěru.

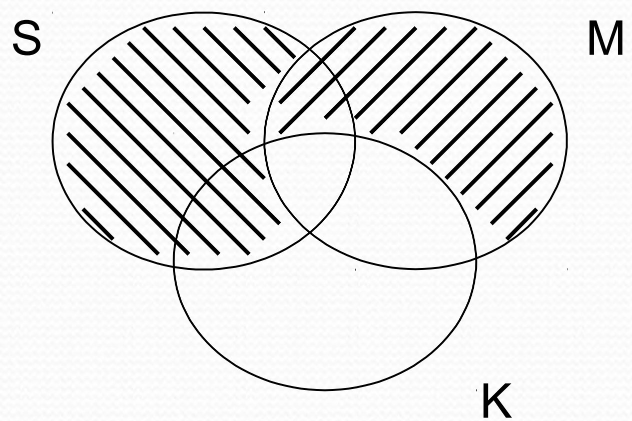
Sémantické metody – Vennovy diagramy

p_1: Všichni studenti umějí logicky myslet. $\forall x\,[S(x) \supset M(x)]$

p_2: Pouze koumáci umějí logicky myslet. $\forall x\,[M(x) \supset K(x)]$

-- ----------------------

z: Všichni studenti jsou koumáci. $\forall x\,[S(x) \supset K(x)]$



1. premisa říká, že neexistuje prvek, který by byl v množině S a nebyl v množině M (De Morgan) – tedy šrafujeme

2. premisa říká, že neexistuje prvek, který by byl v množině M a nebyl v množině K (M je podmnožinou K) – tedy šrafujeme

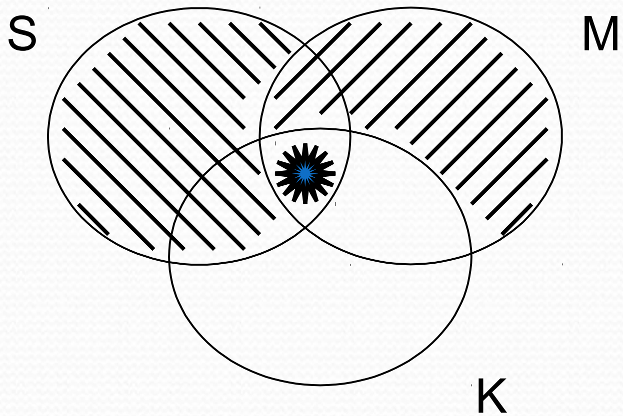
Sémantické metody – Vennovy diagramy

p_1: Všichni studenti umějí logicky myslet. $\forall x\, [S(x) \supset M(x)]$

p_2: Pouze koumáci umějí logicky myslet. $\forall x\, [M(x) \supset K(x)]$

-- ----------------------

z: Všichni studenti jsou koumáci. $\forall x\, [S(x) \supset K(x)]$



Nyní otestujeme, zda nevyšrafované oblasti vystihují pravdivost závěru.

Závěr říká, že všechny prvky ležící v množině S leží taktéž v množině K. To opravdu podle diagramu platí, tedy úsudek je **PLATNÝ.**

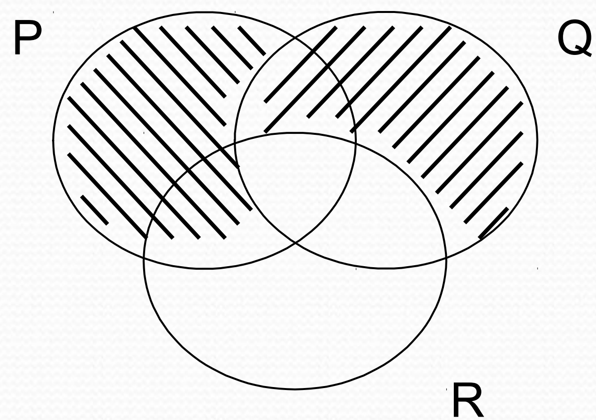
Sémantické metody – Vennovy diagramy

p_1: Všichni studenti logiky se učí logicky myslet. $\forall x\,[P(x) \supset Q(x)]$

p_2: Kdo se učí logicky myslet, ten zbohatne. $\forall x\,[Q(x) \supset R(x)]$

-- ---------------------

z: Někteří studenti logiky zbohatnou. $\exists x\,[P(x) \wedge R(x)]$



1. premisa říká, že neexistuje prvek, který by byl v množině P a nebyl v množině Q (De Morgan) – tedy šrafujeme

2. premisa říká, že neexistuje prvek, který by byl v množině Q a nebyl v množině R (De Morgan) – tedy šrafujeme

Sémantické metody – Vennovy diagramy

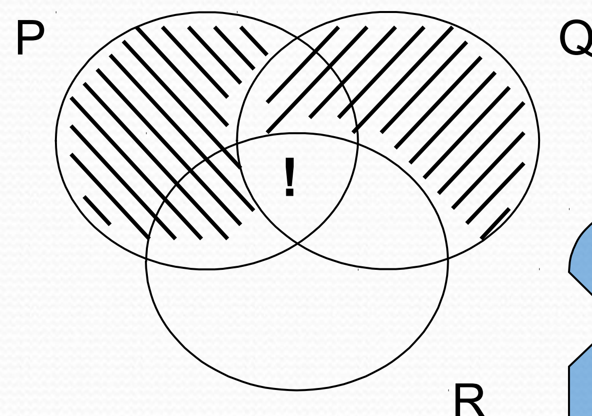
p_1: Všichni studenti logiky se učí logicky myslet. $\forall x\,[P(x) \supset Q(x)]$

p_2: Kdo se učí logicky myslet, ten zbohatne. $\forall x\,[Q(x) \supset R(x)]$

-- ----------------------

z: Někteří studenti logiky zbohatnou. $\exists x\,[P(x) \wedge R(x)]$

V tradiční Aristotelově logice je tento úsudek považován za platný. Avšak, ze všeobecných premis nemůžeme usuzovat na existenci! Nezapomeňte však, že dle Aristotela jsou zde všechny pojmy ***neprázdné***.



Nyní otestujeme, zda je opravdu úsudek platný či nikoliv.

Závěr říká, že existuje prvek v průniku množin P a R. Diagram ale toto nepotvrzuje (není křížek), proto úsudek je **NEPLATNÝ.**

Sémantické metody – Vennovy diagramy

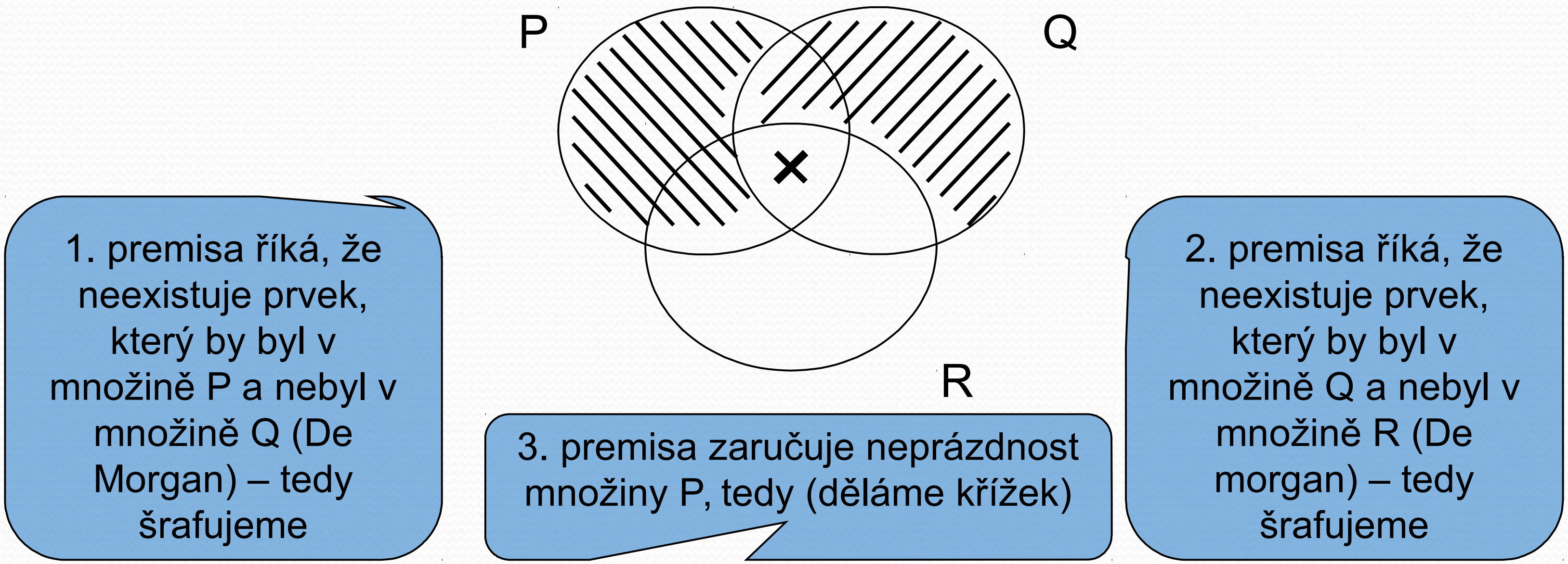
p_1: Všichni studenti logiky se učí logicky myslet. $\forall x\,[P(x) \supset Q(x)]$

p_2: Kdo se učí logicky myslet, ten zbohatne. $\forall x\,[Q(x) \supset R(x)]$

p_3: Existuje student logiky. $\exists x\, P(x)$

-- ---------------------

z: Někteří studenti logiky zbohatnou. $\exists x\,[P(x) \wedge R(x)]$

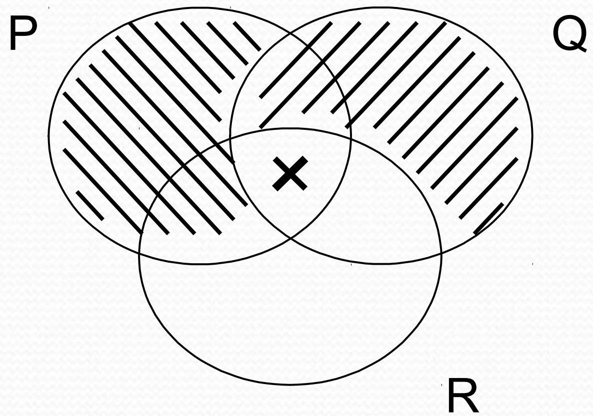


Sémantické metody – Vennovy diagramy

p_1: Všichni studenti logiky se učí logicky myslet. $\forall x\,[P(x) \supset Q(x)]$
p_2: Kdo se učí logicky myslet, ten zbohatne. $\forall x\,[Q(x) \supset R(x)]$
p_3: Existuje student logiky. $\exists x\, P(x)$

\-- ----------------------

z: Někteří studenti logiky zbohatnou. $\exists x\,[P(x) \wedge R(x)]$



Nyní otestujeme, zda je opravdu úsudek platný či nikoliv.

Závěr říká, že existuje prvek v průniku množin P a R. Diagram toto potvrzuje - úsudek je **PLATNÝ.**

Sémantické metody – Vennovy diagramy

- Vennovy diagramy byly navrženy pro Aristotelovy sylogismy, proto je tato metoda úplná (tj. dokazuje vše, co má dokazovat) pouze pro jistou podtřídu formulí PL1.

- *Obecně Vennovy diagramy nedokazují všechny platné úsudky.*

Sémantické metody – Vennovy diagramy

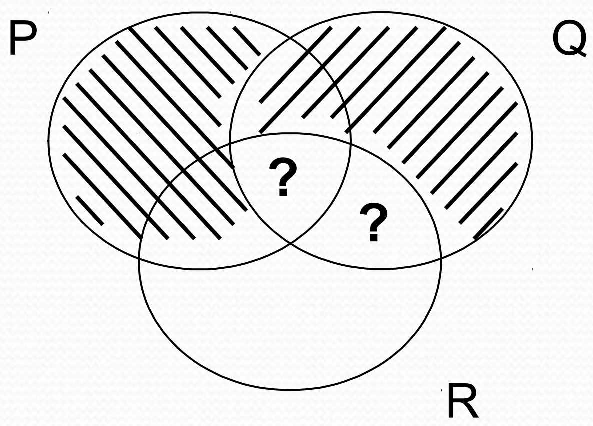
p_1: Všichni studenti logiky se učí logicky myslet. $\forall x\,[P(x) \supset Q(x)]$

p_2: Kdo se učí logicky myslet, ten zbohatne. $\forall x\,[Q(x) \supset R(x)]$

p_3: Někdo se učí logiky myslet. $\exists x\, Q(x)$

-- ----------------------

z: Někteří, kteří se učí logiky myslet, zbohatnou. $\exists x\,[Q(x) \wedge R(x)]$



1. premisa říká, že neexistuje prvek, který by byl v množině P a nebyl v množině Q (De Morgan) – tedy šrafujeme

3. premisa jednoznačně nerozhoduje, kam křížek nakreslit, proto jej nemůžeme nakreslit.

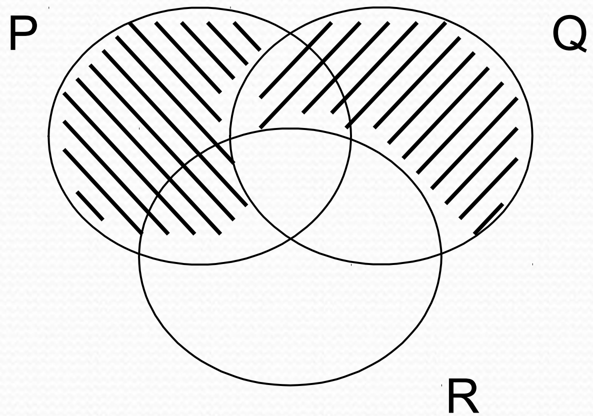
2. premisa říká, že neexistuje prvek, který by byl v množině Q a nebyl v množině R (De Morgan) – tedy šrafujeme

Sémantické metody – Vennovy diagramy

p_1: Všichni studenti logiky se učí logicky myslet. $\forall x\, [P(x) \supset Q(x)]$
p_2: Kdo se učí logicky myslet, ten zbohatne. $\forall x\, [Q(x) \supset R(x)]$
p_3: Někdo se učí logiky myslet. $\exists x\, Q(x)$

-- ----------------------

z: Někteří, kteří se učí logiky myslet, zbohatnou. $\exists x\, [Q(x) \wedge R(x)]$



Nyní otestujeme, zda je opravdu úsudek platný či nikoliv.

Závěr říká, že existuje prvek v průniku množin Q a R. Diagram toto nepotvrzuje, proto úsudek podle této metody je *neplatný*, ale úsudek je **PLATNÝ.**

Sémantické metody – Relační struktury

p_1:Marie má ráda pouze vítěze. $\forall x\, [P(a,x) \supset Q(x)]$

p_2:Karel není vítěz. $\neg Q(b)$

-- ---------------------

z: Marie nemá Karla ráda. $\neg P(a,b)$

Znázorníme, jaké budou obory pravdivosti predikátů P a Q, tj. relace P^U a Q^U, aby byly pravdivé premisy…

$P^U = \{<\alpha_1,\beta_1>,\ldots, <\alpha_n,\beta_n>,\ldots\}$

$Q^U = \{\delta_1,\ldots,\delta_m,\ldots\}$

Sémantické metody – Relační struktury

p_1: Marie má ráda pouze vítěze. $\forall x\, [P(a,x) \supset Q(x)]$

p_2: Karel není vítěz. $\neg Q(b)$

--- ---------------------

z: Marie nemá Karla ráda. $\neg P(a,b)$

Znázorníme, jaké budou obory pravdivosti predikátů P a Q, tj. relace P^U a Q^U, aby byly pravdivé premisy…

Podle 1. premisy, jestliže v relaci P je dvojice, kde první prvek je *a*, pak druhý prvek leží v množině Q.

$P^U = \{< \alpha_1,\beta_1>,\ldots, < \alpha_n,\beta_n>,\ldots, < a, \gamma>, \ldots\}$

$Q^U = \{ \delta_1,\ldots,\delta_m,\ldots, \gamma\}$

Sémantické metody – Relační struktury

p_1: Marie má ráda pouze vítěze. $\forall x\, [P(a,x) \supset Q(x)]$

p_2: Karel není vítěz. $\neg Q(b)$

-- ----------------------

z: Marie nemá Karla ráda. $\neg P(a,b)$

Podle 1. premisy, jestliže v relaci P je dvojice, kde první prvek je *a*, pak druhý prvek leží v množině Q.

Podle 2. premisy, prvek *b* neleží v množině Q

$P^U = \{< \alpha_1,\beta_1>,\ldots, < \alpha_n,\beta_n>,\ldots, < a, \gamma>, \ldots\}$

$Q^U = \{ \delta_1,\ldots,\delta_m,\ldots,\gamma,\ldots,b\}$

Sémantické metody – Relační struktury

p_1: Marie má ráda pouze vítěze. $\forall x\,[P(a,x) \supset Q(x)]$

p_2: Karel není vítěz. $\neg Q(b)$

-- ---------------------

z: Marie nemá Karla ráda. $\neg P(a,b)$

Podle 2. premisy, prvek *b* neleží v množině Q

Otázka zní: Může být v relaci P dvojice <*a*,*b*>?

$P^U = \{<\alpha_1,\beta_1>,\ldots, <\alpha_n,\beta_n>,\ldots, <a,\gamma>, \ldots, <a,b>\}$

$Q^U = \{\delta_1,\ldots,\delta_m,\ldots,\gamma,\ldots,b\}$

Sémantické metody – Relační struktury

p_1: Marie má ráda pouze vítěze. $\forall x\,[P(a,x) \supset Q(x)]$

p_2: Karel není vítěz. $\neg Q(b)$

--- ---------------------

z: Marie nemá Karla ráda. $\neg P(a,b)$

Otázka zní: Může být v relaci P dvojice $<a,b>$?

Pokud ano, pak by nutně podle 1. premisy musel prvek *b* ležet v množině Q.

$P^U = \{<\alpha_1,\beta_1>, \ldots, <\alpha_n,\beta_n>, \ldots, <a,\gamma>, \ldots, <a,b>\}$

$Q^U = \{\delta_1, \ldots, \delta_m, \ldots, \gamma, \ldots, b\}$

Sémantické metody – Relační struktury

p_1: Marie má ráda pouze vítěze. $\forall x\,[P(a,x) \supset Q(x)]$

p_2: Karel není vítěz. $\neg Q(b)$

-- ---------------------

z: Marie nemá Karla ráda. $\neg P(a,b)$

Ale to je v rozporu s 2. premisou! Tedy dvojice <*a,b*> nemůže ležet v relaci P, tedy úsudek je ***platný***.

$P^U = \{<\alpha_1,\beta_1>, \ldots, <\alpha_n,\beta_n>, \ldots, <a,\gamma>, \ldots, \cancel{<a,b>}\}$

$Q^U = \{\delta_1, \ldots, \delta_m, \ldots, \gamma, \ldots, \cancel{b}\}$

Syntaktické metody – Sémantická tabla

Sémantická tabla simulují uplatňování distributivního zákona. Jde vlastně o převod formule do konjunktivní nebo disjunktivní normální formy (KNF nebo DNF). Při převodu provádíme potřebné ekvivalentní úpravy (např. $(p \supset q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$)

- **Konjunktivní tablo**
  - Využívá se pro dokazování tautologií (logicky pravdivých formulí).
  - Výstupem je KNF dané formule.
  - Vychází z faktu, že konjunkce je pravdivá v případě pravdivosti všech konjunktů, tedy konjunkce tautologií je tautologie.
  - Přitom jednotlivé konjunkty jsou disjunkce literálů, pokud se všechny uzavřou, tj. obsahují dvojice opačných literálů, jedná se o tautologii.
- **Disjunktivní tablo**
  - Užití pro důkaz kontradikce (nepřímé důkazy).
  - Výstupem je DNF formule.
  - Vychází z faktu, že disjunkce je nepravdivá, když jsou všechny disjunkty nepravdivé, tedy disjunkce kontradikcí je kontradikce.
  - Přitom jednotlivé disjunkty jsou konjunkce literálů, pokud se uzavřou, jedná se o kontradikci.

Syntaktické metody – Sémantická tabla

Aplikaci metod VL brání to, že formule může být uzavřená kvantifikátory. Jak se jich zbavit?

Použijeme pravidla:

- $\forall x$ A(x) |– A(x / t), kde t je term substituovatelný za x ve formuli A, nejčastěji $t = x$
- $\exists$(x)A(x) |– A(a), kde a je *vhodná konstanta*

Syntaktické metody – Sémantická tabla

p_1: Každý vodník je inteligentní. $\forall x\,[P(x) \supset Q(x)]$

p_2: Všichni inteligentní jsou prozíraví. $\forall x\,[Q(x) \supset R(x)]$

--- ---------------------

z: Všichni vodníci jsou prozíraví. $\forall x\,[P(x) \supset R(x)]$

Aplikujeme větu o dedukci a větu o spojování předpokladů.
Tedy testování platnosti úsudku převedeme na testování logické pravdivosti formule.
Výsledná formule bude tvaru:

$$[\forall x\,[P(x) \supset Q(x)] \land \forall x\,[Q(x) \supset R(x)]] \supset \forall x\,[P(x) \supset R(x)]$$

Syntaktické metody – Sémantická tabla

p_1: Každý vodník je inteligentní. $\forall x\,[P(x) \supset Q(x)]$

p_2: Všichni inteligentní jsou prozíraví. $\forall x\,[Q(x) \supset R(x)]$

-- ----------------------

z: Všichni vodníci jsou prozíraví. $\forall x\,[P(x) \supset R(x)]$

Použijeme nepřímou metodu důkazu, že je daná formule tautologie.
Formuli tedy znegujeme a budeme dokazovat spornost znegované formule.

$$[\forall x\,[P(x) \supset Q(x)] \wedge \forall x\,[Q(x) \supset R(x)]] \supset \forall x\,[P(x) \supset R(x)]$$

$$[\forall x\,[P(x) \supset Q(x)] \wedge \forall x\,[Q(x) \supset R(x)]] \wedge \exists x\,[P(x) \wedge \neg R(x)]$$

Syntaktické metody – Sémantická tabla

p_1: Každý vodník je inteligentní. $\forall x\, [P(x) \supset Q(x)]$

p_2: Všichni inteligentní jsou prozíraví. $\forall x\, [Q(x) \supset R(x)]$

-- ------------------------

z: Všichni vodníci jsou prozíraví. $\forall x\, [P(x) \supset R(x)]$

Použijeme nepřímou metodu důkazu, že je daná formule tautologie. Formuli tedy znegujeme a budeme dokazovat spornost znegované formule.

Aplikujeme ekvivalentní úpravy – eliminace implikace.

$$[\forall x\, [P(x) \supset Q(x)] \;\land\; \forall x\, [Q(x) \supset R(x)]] \supset \forall x\, [P(x) \supset R(x)]$$

$$[\forall x\, [P(x) \supset Q(x)] \;\land\; \forall x\, [Q(x) \supset R(x)]] \land\; \exists x\, [P(x) \land \neg R(x)]$$

$$[\forall x\, [\neg\, P(x) \lor Q(x)] \;\land\; \forall x\, [\neg\, Q(x) \lor R(x)]] \land\; \exists x\, [P(x) \land \neg R(x)]$$

Syntaktické metody – Sémantická tabla

p_1: Každý vodník je inteligentní. $\forall x\, [P(x) \supset Q(x)]$

p_2: Všichni inteligentní jsou prozíraví. $\forall x\, [Q(x) \supset R(x)]$

-- ----------------------

z: Všichni vodníci jsou prozíraví. $\forall x\, [P(x) \supset R(x)]$

Aplikujeme ekvivalentní úpravy – eliminace implikace.

$$[\forall x\, [P(x) \supset Q(x)] \wedge \forall x\, [Q(x) \supset R(x)]] \supset \forall x\, [P(x) \supset R(x)]$$

$$[\forall x\, [P(x) \supset Q(x)] \wedge \forall x\, [Q(x) \supset R(x)]] \wedge \exists x\, [P(x) \wedge \neg R(x)]$$

$$\forall x\, [\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge \forall x\, [\neg Q(x) \vee R(x)] \wedge \exists x\, [P(x) \wedge \neg R(x)]$$

Syntaktické metody – Sémantická tabla

$\forall x\,[\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge \forall x\,[\neg Q(x) \vee R(x)] \wedge \exists x\,[P(x) \wedge \neg R(x)]$

$\ldots, \forall x\,[\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge [\neg Q(a) \vee R(a)] \wedge P(a) \wedge \neg R(a)$

Eliminace exist. kvantifikátoru a následně všeobecného.

Syntaktické metody – Sémantická tabla

$\forall x\,[\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge \forall x\,[\neg Q(x) \vee R(x)] \wedge \exists x\,[P(x) \wedge \neg R(x)]$

$\ldots, \forall x\,[\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge \underline{[\neg Q(a) \vee R(a)]} \wedge P(a) \wedge \neg R(a)$

$\ldots, \forall x\,[\neg P(x) \vee Q(x)], \neg Q(a), P(a), \neg R(a)$

$\ldots, \forall x\,[\neg P(x) \vee Q(x)], R(a), P(a), \neg R(a)$

$+$

Eliminace exist. kvantifikátoru a následně všeobecného.

Větvení na dvě větve.

Syntaktické metody – Sémantická tabla

$\forall x\,[\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge \forall x\,[\neg Q(x) \vee R(x)] \wedge \exists x\,[P(x) \wedge \neg R(x)]$

$\ldots, \forall x\,[\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge [\underline{\neg Q(a) \vee R(a)}] \wedge P(a) \wedge \neg R(a)$

$\ldots, \underline{\forall x\,[\neg P(x) \vee Q(x)]}, \neg Q(a), P(a), \neg R(a)$ $\qquad$ $\ldots, \forall x\,[\neg P(x) \vee Q(x)], R(a), P(a), \neg R(a)$

+

$\ldots, \neg P(a), \neg Q(a), P(a), \neg R(a)$ $\qquad$ $\ldots, Q(a), \neg Q(a), P(a), \neg R(a)$

+ $\qquad$ +

Eliminace všeob. kvantifikátoru a větvení.

Větvení na dvě větve.

Syntaktické metody – Sémantická tabla

$\forall x\,[\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge \forall x\,[\neg Q(x) \vee R(x)] \wedge \exists x\,[P(x) \wedge \neg R(x)]$

$\ldots, \forall x\,[\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge [\neg Q(a) \vee R(a)] \wedge P(a) \wedge \neg R(a)$

$\ldots, \forall x\,[\neg P(x) \vee Q(x)], \neg Q(a), P(a), \neg R(a)$ $\ldots, \forall x\,[\neg P(x) \vee Q(x)], R(a), P(a), \neg R(a)$

+

$\ldots, \neg P(a), \neg Q(a), P(a), \neg R(a)$ $\ldots, Q(a), \neg Q(a), P(a), \neg R(a)$

+ +

Všechny větve se nám uzavřely, tedy jedná se o disjunkci kontradikcí. Naše formule je tedy kontradikce. Proto původní je tautologie. A tedy úsudek je **platný.**

Syntaktické metody – Rezoluční metoda

- Je aplikovatelná na formuli ve spec. ***konjunktivní normální formě* (Skolemova *klauzulární forma*)**
  - $\forall x_1 \ldots \forall x_n$ [$C_1 \wedge$ **...** $\wedge\ C_m$], kde každé C_i je klauzule, tedy elementární disjunkce.
  - Převod do Skolemovy klauzulární formy není ekvivalentní, pouze zachovává splnitelnost. Převod do Skolemovy klauzulární formy je realizován pomocí algoritmu o 9 krocích (viz. skripta).
  - Nechť F^S je Skolemova klauzulární forma formule F, pak platí, že $F^S \models F$, **ale ne naopak**.
    - Viz. důkaz ve skriptech.

- Je zobecněním rezoluční metody ve výrokové logice.
  - Uplatňování pravidla rezoluce na různé literály – ***unifikace literálů*** (Robisonův unifikační algoritmus)
    - Unifikace σ klauzulí C_1 a C_2 je množina substitucí takových, že $C_1\sigma = C_2\sigma$.

- Je základem pro automatizované deduktivní metody a logické programování.

- Je základem pro programovací jazyk ***PROLOG.***

Syntaktické metody – Rezoluční metoda

Obecné rezoluční pravidlo

Nechť A, B, jsou formule (ve tvaru disjunkce literálů) a l_i literály predikátové logiky. Potom platí následující odvozovací pravidlo:

$$A \vee l_1,\ B \vee \neg l_2 \ \vdash\ A\sigma \vee B\sigma\ ,$$

kde σ je unifikace formulí l_1, l_2, tj. $l_1\sigma = l_2\sigma$.

Klauzule na levé straně odvozovacího pravidla nazýváme *rodičovskými klauzulemi* a klauzuli na pravé straně *rezolventou*.

Formule A^S v klausulární formě je nesplnitelná, právě když z ní lze opakovaným použitím obecného pravidla rezoluce odvodit prázdnou klausuli $\square$.

Základní typy problémů řešených rezoluční metodou

- Ověřování platnosti úsudků.
- Ověřování tautologičnosti formule.

Syntaktické metody – Rezoluční metoda

Základní typy problémů řešených rezoluční metodou

- **Ověřování platnosti úsudků**
  - Přímá metoda
    - Nutnost výskytu v premisách (tj. rodičovksých klauzlích) pouze všeobecných kvantifikátorů.
    - Postupným aplikováním rezolučního pravidla na klauzule generujeme rezolventy. Výsledná rezolventa (a konjunkce generovaných) logicky vyplývá z rodičovských klauzulí.
  - Nepřímá metoda
    - Znegujeme závěr a připojíme k množině předpokladů.
    - Postupným aplikováním rezolučního pravidla se snažíme dospět k prázdné klauzuli.
    - Prázdná klauzule znamená, že množina premis s negovaným závěrem je nekonzistentní (sporná), proto původní nenegovaný závěr logicky vyplývá, tedy daný úsudek je platný.
- **Ověřování tautologičnosti formule.**
  - Provádíme nepřímo, tedy znegujeme formuli, převedeme do Skolemovy klauzulární formy a aplikací rezolučního pravidla na klauzule se snažíme dospět ke sporu (prázdné klausuli).
  - Prázdná klauzule znamená spornost negace, tedy původní je tautologie.

Syntaktické metody – Rezoluční metoda

p_1: Všichni studenti logiky se učí logicky myslet. $\forall x\,[P(x) \supset Q(x)]$
p_2: Kdo se učí logicky myslet, ten zbohatne. $\forall x\,[Q(x) \supset R(x)]$
p_3: Existuje student logiky. $\exists x\,P(x)$

-- ----------------------

z: Někteří studenti logiky zbohatnou. $\exists x\,[P(x) \wedge R(x)]$

$\forall x\,[P(x) \supset Q(x)] \;\Leftrightarrow\; \forall x\,[P(x) \supset Q(x)]$
$\forall x\,[Q(x) \supset R(x)] \;\Leftrightarrow\; \forall y\,[Q(y) \supset R(y)]$
$\exists x\,P(x) \;\Leftrightarrow\; \exists z\,P(z)$

$\exists x\,[P(x) \wedge R(x)] \;\Leftrightarrow \neg \forall u\,[\neg P(u) \vee \neg R(u)]$

Znegujeme závěr a přejmenujeme proměnné.

Syntaktické metody – Rezoluční metoda

p_1: Všichni studenti logiky se učí logicky myslet. $\forall x\, [P(x) \supset Q(x)]$

p_2: Kdo se učí logicky myslet, ten zbohatne. $\forall x\, [Q(x) \supset R(x)]$

p_3: Existuje student logiky. $\exists x\, P(x)$

--- ----------------------

z: Někteří studenti logiky zbohatnou. $\exists x\, [P(x) \wedge R(x)]$

$\forall x\, [P(x) \supset Q(x)] \;\Leftrightarrow\; \forall x\, [P(x) \supset Q(x)] \;\Leftrightarrow\; \forall x\, [\neg P(x) \vee Q(x)]$

$\forall x\, [Q(x) \supset R(x)] \;\Leftrightarrow\; \forall y\, [Q(y) \supset R(y)] \;\Leftrightarrow\; \forall y\, [\neg Q(y) \vee R(y)]$

$\exists x\, P(x) \;\Leftrightarrow\; \exists z\, P(z) \;\Leftrightarrow\; P(a)$

$\exists x\, [P(x) \wedge R(x)] \;\Leftrightarrow \neg \forall u\, [\neg P(u) \vee \neg R(u)] \;\Leftrightarrow\; \forall u\, [\neg P(u) \vee \neg R(u)]$

Eliminujeme implikace a skolemizujeme.

Znegujeme závěr a přejmenujeme proměnné.

Syntaktické metody – Rezoluční metoda

p_1:Všichni studenti logiky se učí logicky myslet. $\forall x\, [P(x) \supset Q(x)]$
p_2:Kdo se učí logicky myslet, ten zbohatne. $\forall x\, [Q(x) \supset R(x)]$
p_3:Existuje student logiky. $\exists x\, P(x)$

--- -----------------------

z: Někteří studenti logiky zbohatnou. $\exists x\, [P(x) \wedge R(x)]$

$\forall x\, [P(x) \supset Q(x)] \;\Leftrightarrow\; \forall x\, [P(x) \supset Q(x)] \;\Leftrightarrow\; \forall x\, [\neg P(x) \vee Q(x)]$

$\forall x\, [Q(x) \supset R(x)] \;\Leftrightarrow\; \forall y\, [Q(y) \supset R(y)] \;\Leftrightarrow\; \forall y\, [\neg Q(y) \vee R(y)]$

$\exists x\, P(x) \;\Leftrightarrow\; \exists z\, P(z) \;\Leftrightarrow\; P(a)$

$\exists x\, [P(x) \wedge R(x)] \;\Leftrightarrow\; \neg \forall u\, [\neg P(u) \vee \neg R(u)] \;\Leftrightarrow\; \forall u\, [\neg P(u) \vee \neg R(u)]$

Nyní můžeme sepsat klauzule pod sebe a aplikovat rezoluci.

Syntaktické metody – Rezoluční metoda

p_1:Všichni studenti logiky se učí logicky myslet. $\forall x\,[P(x) \supset Q(x)]$
p_2:Kdo se učí logicky myslet, ten zbohatne. $\forall x\,[Q(x) \supset R(x)]$
p_3:Existuje student logiky. $\exists x\, P(x)$

-- ----------------------

z: Někteří studenti logiky zbohatnou. $\exists x\,[P(x) \wedge R(x)]$

$\forall x\,[\neg P(x) \vee Q(x)]$
$\forall y\,[\neg Q(y) \vee R(y)]$
$P(a)$

$\forall u\,[\neg P(u) \vee \neg R(u)]$

1. $\neg P(x) \vee Q(x)$
2. $\neg Q(y) \vee R(y)$
3. $P(a)$
4. $\neg P(u) \vee \neg R(u)$
5. $\neg R(a)$ 3.,4. u/a

Rezoluce 3. a 4. klauzule, přičemž za *u* substituujeme *a*

Syntaktické metody – Rezoluční metoda

p_1:Všichni studenti logiky se učí logicky myslet. $\forall x\,[P(x) \supset Q(x)]$
p_2:Kdo se učí logicky myslet, ten zbohatne. $\forall x\,[Q(x) \supset R(x)]$
p_3:Existuje student logiky. $\exists x\, P(x)$

-- ---------------------

z: Někteří studenti logiky zbohatnou. $\exists x\,[P(x) \wedge R(x)]$

$\forall x\,[\neg P(x) \vee Q(x)]$
$\forall y\,[\neg Q(y) \vee R(y)]$
$P(a)$

$\forall u\,[\neg P(u) \vee \neg R(u)]$

1. $\neg P(x) \vee Q(x)$
2. $\neg Q(y) \vee R(y)$
3. $P(a)$
4. $\neg P(u) \vee \neg R(u)$
5. $\neg R(a)$ 3.,4. u/a
6. $\neg Q(a)$ 2.,5. y/a

Rezoluce 2. a 5. klauzule, přičemž za *y* substituujeme *a*

Syntaktické metody – Rezoluční metoda

p_1:Všichni studenti logiky se učí logicky myslet. $\forall x\, [P(x) \supset Q(x)]$
p_2:Kdo se učí logicky myslet, ten zbohatne. $\forall x\, [Q(x) \supset R(x)]$
p_3:Existuje student logiky. $\exists x\, P(x)$

-- ----------------------

z: Někteří studenti logiky zbohatnou. $\exists x\, [P(x) \wedge R(x)]$

$\forall x\, [\neg P(x) \vee Q(x)]$
$\forall y\, [\neg Q(y) \vee R(y)]$
$P(a)$

$\forall u\, [\neg P(u) \vee \neg R(u)]$

1. $\neg P(x) \vee Q(x)$
2. $\neg Q(y) \vee R(y)$
3. $P(a)$
4. $\neg P(u) \vee \neg R(u)$
5. $\neg R(a)$ 3.,4. u/a
6. $\neg Q(a)$ 2.,5. y/a
7. $\neg P(a)$ 1.,6. x/a

Rezoluce 1. a 6. klauzule,
přičemž za *x* substituujeme *a*

Syntaktické metody – Rezoluční metoda

p_1:Všichni studenti logiky se učí logicky myslet. $\forall x\, [P(x) \supset Q(x)]$
p_2:Kdo se učí logicky myslet, ten zbohatne. $\forall x\, [Q(x) \supset R(x)]$
p_3:Existuje student logiky. $\exists x\, P(x)$

--- --------------------

z: Někteří studenti logiky zbohatnou. $\exists x\, [P(x) \wedge R(x)]$

$\forall x\, [\neg P(x) \vee Q(x)]$
$\forall y\, [\neg Q(y) \vee R(y)]$
$P(a)$

$\forall u\, [\neg P(u) \vee \neg R(u)]$

1. $\neg P(x) \vee Q(x)$
2. $\neg Q(y) \vee R(y)$
3. $P(a)$
4. $\neg P(u) \vee \neg R(u)$
5. $\neg R(a)$ 3.,4. u/a
6. $\neg Q(a)$ 2.,5. y/a
7. $\neg P(a)$ 1.,6. x/a
8. $\blacksquare$ 3.,7.

Rezoluce 1. a 6. klauzule, přičemž za *x* substituujeme *a*

Rezoluce 3. a 7. klauzule

Syntaktické metody – Rezoluční metoda

p_1:Všichni studenti logiky se učí logicky myslet. $\forall x\, [P(x) \supset Q(x)]$
p_2:Kdo se učí logicky myslet, ten zbohatne. $\forall x\, [Q(x) \supset R(x)]$
p_3:Existuje student logiky. $\exists x\, P(x)$
-- --------------------
z: Některí studenti logiky zbohatnou. $\exists x\, [P(x) \wedge R(x)]$

$\forall x\, [\neg P(x) \vee Q(x)]$
$\forall y\, [\neg Q(y) \vee R(y)]$
$P(a)$

$\forall u\, [\neg P(u) \vee \neg R(u)]$

1. $\neg P(x) \vee Q(x)$
2. $\neg Q(y) \vee R(y)$
3. $P(a)$
4. $\neg P(u) \vee \neg R(u)$
5. $\neg R(a)$ 3.,4. u/a
6. $\neg Q(a)$ 2.,5. y/a
7. $\neg P(a)$ 1.,6. x/a
8. $\blacksquare$ 3.,7.

Došli jsme k prázdné klauzuli (spor), tedy množina předpokladů s negovaným závěrem je sporná $\Rightarrow$ původní nenegovaný závěr z předpokladů vyplývá $\Rightarrow$ ***úsudek je platný.***

Rezoluce 3. a 7. klauzule

Syntaktické metody – Rezoluční metoda

p_1: Marie má ráda pouze vítěze. $\forall x\, [P(a,x) \supset Q(x)]$

p_2: Karel není vítěz. $\neg Q(b)$

-- ---------------------

z: Marie nemá Karla ráda. $\neg P(a,b)$

$\forall x\, [P(a,x) \supset Q(x)] \quad \Leftrightarrow \quad \forall x\, [P(a,x) \supset Q(x)]$

$\neg Q(b) \quad \Leftrightarrow \quad \neg Q(b)$

$\neg P(a,b) \quad \Leftrightarrow \neg\ P(a,b)$

Znegujeme závěr.

Syntaktické metody – Rezoluční metoda

p_1: Marie má ráda pouze vítěze. $\forall x\, [P(a,x) \supset Q(x)]$

p_2: Karel není vítěz. $\neg Q(b)$

-- ----------------------

z: Marie nemá Karla ráda. $\neg P(a,b)$

$\forall x\, [P(a,x) \supset Q(x)] \quad \Leftrightarrow \quad \forall x\, [P(a,x) \supset Q(x)] \quad \Leftrightarrow \quad \forall x\, [\neg P(a,x) \vee Q(x)]$

$\neg Q(b) \quad \Leftrightarrow \quad \neg Q(b) \quad \Leftrightarrow \quad \neg Q(b)$

$\neg P(a,b) \quad \Leftrightarrow \neg P(a,b) \quad \Leftrightarrow \quad P(a,b)$

Eliminujeme implikace.

Znegujeme závěr.

Syntaktické metody – Rezoluční metoda

p_1: Marie má ráda pouze vítěze. $\forall x\,[P(a,x) \supset Q(x)]$

p_2: Karel není vítěz. $\neg Q(b)$

--- ---------------------

z: Marie nemá Karla ráda. $\neg P(a,b)$

$$
\begin{array}{lll}
\forall x\,[P(a,x) \supset Q(x)] \quad \Leftrightarrow \quad \forall x\,[P(a,x) \supset Q(x)] & \Leftrightarrow & \forall x\,[\neg P(a,x) \vee Q(x)] \\
\neg Q(b) \quad \Leftrightarrow \quad \neg Q(b) & \Leftrightarrow & \neg Q(b) \\
\text{---------------------} & & \\
\neg P(a,b) \quad \Leftrightarrow \neg\ P(a,b) & \Leftrightarrow & P(a,b)
\end{array}
$$

Nyní můžeme sepsat klauzule pod sebe a aplikovat rezoluci.

Eliminujeme implikace a skolemizujeme.

Syntaktické metody – Rezoluční metoda

p_1: Marie má ráda pouze vítěze. $\forall x\, [P(a,x) \supset Q(x)]$

p_2: Karel není vítěz. $\neg Q(b)$

-- ----------------------

z: Marie nemá Karla ráda. $\neg P(a,b)$

$\forall x\, [\neg P(a,x) \vee Q(x)]$

$\neg Q(b)$

$P(a,b)$

1. $\neg P(a,x) \vee Q(x)$
2. $\neg Q(b)$
3. $P(a,b)$

4. $Q(b)$ 1.,3. x/b

Rezoluce 1. a 3. klauzule, přičemž za *x* substituujeme *b*.

Syntaktické metody – Rezoluční metoda

p_1:Marie má ráda pouze vítěze. $\forall x\,[P(a,x) \supset Q(x)]$

p_2:Karel není vítěz. $\neg Q(b)$

--- ----------------------

z: Marie nemá Karla ráda. $\neg P(a,b)$

$\forall x\,[\neg P(a,x) \lor Q(x)]$

$\neg Q(b)$

$P(a,b)$

1. $\neg P(a,x) \lor Q(x)$
2. $\neg Q(b)$
3. $P(a,b)$
4. $Q(b)$ 1.,3. x/b
5. $\blacksquare$ 2.,4.

Rezoluce 1. a 3. klauzule, přičemž za *x* substituujeme *b*

Rezoluce 2. a 4. klauzule.

Syntaktické metody – Rezoluční metoda

p_1:Marie má ráda pouze vítěze. $\forall x\, [P(a,x) \supset Q(x)]$

p_2:Karel není vítěz. $\neg Q(b)$

-- ----------------------

z: Marie nemá Karla ráda. $\neg P(a,b)$

$\forall x\, [\neg P(a,x) \vee Q(x)]$

$\neg Q(b)$

$P(a,b)$

1. $\neg P(a,x) \vee Q(x)$
2. $\neg Q(b)$
3. $P(a,b)$
4. $Q(b)$ 1.,3. x/b
5. $\blacksquare$ 2.,4.

Došli jsme k prázdné klauzuli (spor), tedy množina předpokladů s negovaným závěrem je sporná $\Rightarrow$ původní nenegovaný závěr z předpokladů vyplývá $\Rightarrow$ ***úsudek je platný.***

Rezoluce 2. a 4. klauzule.

Důkazové metody

Mohlo by se zdát, že predikátová logika 1. řádu je dost silná na to, aby mohla sloužit jako specifikační jazyk pro libovolný inferenční stroj.

Podívejme se nyní na jednoduchý úsudek, který již nelze řešit pomocí predikátové logiky 1. řádu. Závěr totiž podle PL1 logicky vyplývá, avšak ve skutečnosti tomu tak není.

Karel se chce stát prezidentem ČR.
Václav Klaus je prezident ČR.

Karel se chce stát Václavem Klausem.

Opravdu tomu tak je? Chce se Karel stát Václavem Klausem, anebo chce zastávat úřad prezidenta ČR?

Důkazové metody

Mohlo by se zdát, že predikátová logika 1. řádu je dost silná na to, aby mohla sloužit jako specifikační jazyk pro libovolný inferenční stroj.

Podívejme se nyní na jednoduchý úsudek, který již nelze řešit pomocí predikátové logiky 1. řádu. Závěr totiž podle PL1 logicky vyplývá, avšak ve skutečnosti tomu tak není.

Karel se chce stát prezidentem ČR.
Václav Klaus je prezident ČR.

Karel se chce stát Václavem Klausem.

Opravdu tomu tak je? Chce se Karel stát Václavem Klausem, anebo chce zastávat úřad prezidenta ČR?

Důkazové metody

Karel se chce stát prezidentem ČR.
Václav Klaus je prezident ČR.
--
Karel se chce stát Václavem Klausem.

Pro práci s takovýmito úsudky potřebuje silnější aparát.

Je jím expresivní systém

Transparentní intenzionální logiky,

který díky své typové hierarchii hned „rozpozná“, že daný závěr neplyne z těchto předpokladů.

Tento systém je náplní předmětu **Principy logické analýzy jazyka (PLAJ)**.