

Úvod do TI - logika

Predikátová logika 1.řádu

(4.přednáška)

Marie Duží
marie.duzi@vsb.cz



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Jednoduché úsudky, kde VL nestačí

- Všechny opice mají rády banány
- Judy je opice
- \Rightarrow Judy má ráda banány

Z hlediska VL jsou to **jednoduché výroky**

p, q, r a z p, q nevyplývá r

- Všichni studenti jsou chytrí
- Karel není chytrý
- \Rightarrow Karel není student

Jaké je zde platné úsudkové schéma?

Úsudková schémata

Schéma připomíná platná schémata VL:

$$p \supset q, p \not\vdash q \quad \text{či} \quad p \supset q, \neg q \not\vdash \neg p$$

Ale ve VL nemůžeme (roz)analyzovat tyto jednoduché výroky. Zkusme je přeformulovat:

- Každé individuum, je-li Opice, pak má rádo Banány
- Judy je individuum s vlastností být Opice
- \Rightarrow Judy je individuum s vlastností mít rádo Banány

$$\forall x [O(x) \supset B(x)], O(J) \not\vdash B(J),$$

kde x je individuová proměnná, O , B predikátové symboly, J (nulární) funkční symbol.

Jde opět o schéma: Za O , B , J můžeme dosadit jiné vlastnosti či jiné individuum, např. po řadě člověk, smrtelný, Karel. O , B , J jsou zde pouze **symboly** zastupující vlastnosti a individua

Formální jazyk PL1 - Abeceda

- Logické symboly

- individuové proměnné: x, y, z, \dots
- Symboly pro spojky: $\neg, \wedge, \vee, \supset, \equiv$
- Symboly pro kvantifikátory: \forall, \exists

- Speciální symboly

- Predikátové: P_n, Q_n, \dots n - arita = počet argumentů.
- Funkční: f_n, g_n, h_n, \dots n - arita = počet argumentů.

- Pomocné symboly: závorky $(,), \dots$

Formální jazyk PL1 - Gramatika

- **Termy:**

1. každý symbol proměnné x, y, \dots je term.
2. jsou-li t_1, \dots, t_n ($n \geq 0$) termy a je-li f n -ární funkční symbol, pak výraz $f(t_1, \dots, t_n)$ je term;
pro $n = 0$ se jedná o individuovou konstantu (značíme a, b, c, \dots).
3. jen výrazy dle 1. a 2. jsou termy

Formální jazyk PL1 - Gramatika

- **Atomické formule:**

- je-li P n -ární predikátový symbol a jsou-li t_1, \dots, t_n termy, pak výraz $P(t_1, \dots, t_n)$ je atomická formule.

- **Formule:**

- každá atomická formule je formule.
- je-li výraz A formule, pak $\neg A$ je formule.
- jsou-li výrazy A a B formule, pak výrazy $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \supset B)$, $(A \equiv B)$ jsou formule.
- je-li x proměnná a A formule, pak výrazy $\forall x A$ a $\exists x A$ jsou formule.

Formální jazyk PL1 - 1. řád

- Jediné proměnné, které můžeme používat s kvantifikátory, jsou *individuové proměnné*.
- Nemůžeme kvantifikovat přes proměnné *vlastností* či *funkcí*.
- *Příklad*: Leibnizova definice rovnosti.
 - Mají-li dvě individua všechny vlastnosti stejné, pak je to jedno a totéž individuum.
 - $\forall P [P(x) \equiv P(y)] \supset (x = y)$
 - jazyk **2. řádu**, kvantifikujeme přes vlastnosti.

Příklad: jazyk aritmetiky

Má tyto (speciální) **funkční** symboly:

- nulární symbol: **0** (konstanta nula) - konstanta je nulární funkční symbol.
- unární symbol: **s** (funkce následník).
- binární symboly: **+** a **×** (funkce sčítání a násobení).

- Příkladem **termů** jsou (používáme infixní notaci pro + a ×):

$0, s(x), s(s(x)), (x + y) \times s(s(0)),$ atd.

- **Formulemi** jsou např. výrazy: (= je zde speciální predikátový symbol)

$s(0) = (0 \times x) + s(0), \exists x (y = x \times z), \forall x [(x = y) \supset \exists y (x = s(y))]$

Převod z přirozeného jazyka do jazyka PL1

- „všichni“, „žádný“, „nikdo“, ... \forall
- „někdo“, „něco“, „někteří“, „existuje“, ... \exists
- Větu musíme často ekvivalentně přeformulovat
- **Pozor:** v češtině **dvojitý zápor** !
- Žádný student není důchodce: $\forall x [S(x) \supset \neg D(x)]$
- Ale, „všichni studenti nejsou důchodci“ čteme jako „ne všichni studenti jsou důchodci“:

$$\neg \forall x [S(x) \supset D(x)] \Leftrightarrow \exists x [S(x) \wedge \neg D(x)]$$

Převod z přirozeného jazyka do jazyka PL1

- Pomocné pravidlo: $\forall + \supset, \exists + \wedge$ (většinou).

- $\neg \forall x [P(x) \supset Q(x)] \Leftrightarrow \exists x [P(x) \wedge \neg Q(x)]$

Není pravda, že všechna P jsou Q \Leftrightarrow Některá P nejsou Q.

- $\neg \exists x [P(x) \wedge Q(x)] \Leftrightarrow \forall x [P(x) \supset \neg Q(x)]$

Není pravda, že některá P jsou Q \Leftrightarrow Žádné P není Q.

(de Morganovy zákony v PL1).

Převod z přirozeného jazyka do jazyka PL1

- **Pouze** zaměstnanci používají výtah.

$$\forall x [V(x) \supset Z(x)]$$

- Všichni zaměstnanci používají výtah.

$$\forall x [Z(x) \supset V(x)]$$

- Marie má ráda **pouze** vítěze:

Tedy pro všechny platí: pokud má Marie někoho ráda, pak je to vítěz:

$$\forall x [R(m, x) \supset V(x)],$$

„mít rád“ je binární vztah, ne vlastnost !!!

Převod z přirozeného jazyka do jazyka PL1

- Everybody loves somebody sometimes.

$$\forall x \exists y \exists t L(x, y, t)$$

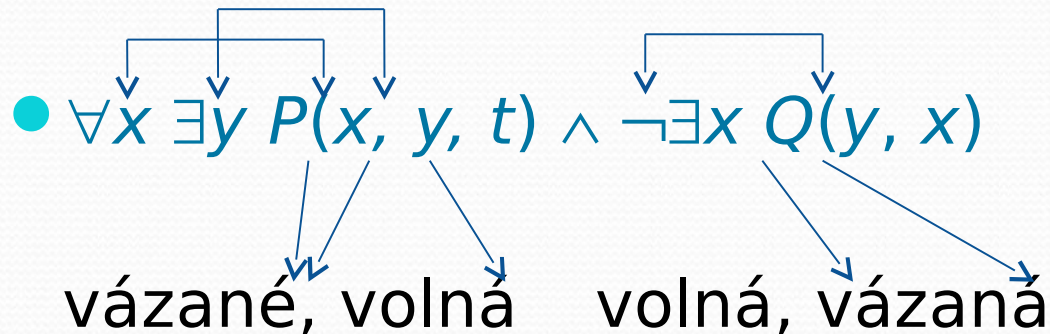
- Everybody loves somebody sometimes but Hitler doesn't like anybody.

$$\forall x \exists y \exists t L(x, y, t) \wedge \neg \exists z L'(h, z)$$

- Everybody loves nobody – 1 zápor.
(nikdo nemá nikoho rád) – 3 zápory.

$$\forall x \forall y \neg L'(x, y) \Leftrightarrow \forall x \neg \exists y L'(x, y)$$

Volné, vázané proměnné



Formule s *čistými proměnnými*: pouze volné výskyty nebo pouze vázané, ale každý kvantifikátor má své proměnné. Např. x ve druhém konjunktě je jiné než v prvním, tak proč jej nazývat stejně?

• $\forall x \exists y P(x, y, t) \wedge \neg \exists z Q(u, z)$

Substituce termů za proměnné

$A(x/t) \rightarrow$ vznikne z A **korektní substitucí termu t za proměnnou x .**

Má-li být substituce korektní, musí splňovat následující dvě pravidla:

- Substituovat lze *pouze za volné výskyty* proměnné x ve formuli A a při substituci nahrazujeme *všechny volné výskyty* proměnné x ve formuli A termem t .
- Žádná individuová proměnná vystupující v termu t se po provedení substituce x/t *nesmí stát ve formuli A vázanou* (v takovém případě **není** term t za proměnnou x ve formuli A **substituovatelný**).

Substituce, příklad

- $A(x): P(x) \supset \forall y Q(x, y)$, term $t = f(y)$

- Provedeme-li substituci $A(x/f(y))$, dostaneme:

$$P(f(y)) \supset \forall y Q(f(y), y).$$

- Term $f(y)$ není substituovatelný za x v dané formuli A .

- Změnili bychom smysl formule.

- Např. v interpretaci nad přirozenými čísly P \square být nejmenší; Q \square menší nebo rovno (\leq); f \square funkce identita ($=$) mají obě formule rozdílný „smysl“:

- „Je-li číslo x nejmenší, pak $x \leq y$ pro všechna y .“

- „Je-li číslo y nejmenší, pak $y \leq y$ pro všechna y .“

Sémantika PL1

$$P(x) \supset \forall y Q(x, y)$$

Je tato formule pravdivá?

Nesmyslná otázka, vždyť nevíme, co znamenají symboly P , Q . Jsou to jen symboly, za které můžeme dosadit jakýkoli predikát.

$$P(x) \supset P(x)$$

Je tato formule pravdivá?

ANO, je, a to vždy, za všech okolností, tj. v každé interpretaci.

Sémantika PL1

$$\forall x P(x, f(x)) \quad \exists x P(x, f(x))$$

Musíme se dohodnout, jak budeme tyto formule chápat.

- O čem mluví, přes co „rangují“ proměnné: zvolíme universum diskursu, jakákoli **neprázdná** množina $\mathbf{U} \neq \Phi$.
- Co označuje symbol P ; je binární, má dva argumenty, tedy musí označovat nějakou **binární relaci** $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{U} \times \mathbf{U}$.
- Co označuje symbol f ; je unární, má jeden argument, tedy musí označovat nějakou funkci $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{U} \times \mathbf{U}$, **značíme** $\mathbf{F}: \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}$.

Sémantika PL1

$$A: \forall x P(x, f(x)) \quad B: \exists x P(x, f(x))$$

Musíme se dohodnout, jak budeme tyto formule chápat.

- Nechť $U = \mathbb{N}$ (množina přirozených čísel).
- Nechť P označuje **relaci** $<$ (tj. množinu dvojic takových, že první člen je ostře menší než druhý: $\{\langle 0,1 \rangle, \langle 0,2 \rangle, \dots, \langle 1,2 \rangle, \dots\}$).
- Nechť f označuje funkci druhá mocnina x^2 , tedy množinu dvojic, kde druhý člen je druhá mocnina prvního: $\{\langle 0,0 \rangle, \langle 1,1 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \dots, \langle 5,25 \rangle, \dots\}$.

Nyní můžeme teprve vyhodnotit pravdivostní hodnotu formulí A, B.

Sémantika PL1

$$A: \forall x P(x, f(x)) \quad B: \exists x P(x, f(x))$$

Vyhodnocujeme „zevnitř“:

Nejprve vyhodnotíme term $f(x)$. Každý term označuje prvek universa. Který? Záleží na *valuaci* e proměnné x . Nechť $e(x) = 0$, pak $f(x) = x^2 = 0$.

$$e(x) = 0, \text{ pak } f(x) = x^2 = 0,$$

$$e(x) = 1, \text{ pak } f(x) = x^2 = 1,$$

$$e(x) = 2, \text{ pak } f(x) = x^2 = 4, \text{ atd.}$$

Nyní vyhodnocením $P(x, f(x))$ musíme dostat pravdivostní hodnotu:

$$e(x) = 0, 0 \text{ není } < 0 \text{ **Nepravda**}$$

$$e(x) = 1, 1 \text{ není } < 1 \text{ **Nepravda**}$$

$$e(x) = 2, 2 \text{ je } < 4 \text{ **Pravda**}$$

Sémantika PL1

A: $\forall x P(x, f(x))$ B: $\exists x P(x, f(x))$

- Formule $P(x, f(x))$ je pro některé valuace a proměnné x v dané interpretaci Pravdivá, pro jiné nepravdivá.
- Význam $\forall x$ a $\exists x$: formule musí být pravdivá pro **všechny** resp. **některé** valuace x .
- Formule A: Nepravdivá v naší interpretaci I: $\not\models_I A$.
- Formule B: Pravdivá v naší interpretaci I: $\models_I B$.

Model formule, interpretace

$$A: \forall x P(x, f(x)) \quad B: \exists x P(x, f(x))$$

- Našli jsme interpretaci I , ve které je formule B pravdivá. Interpretací struktura $\langle \mathbb{N}, <, x^2 \rangle$ splňuje formuli B pro všechny valuace proměnné x , je to **model formule B**.
- Jak upravíme interpretaci I , aby v ní byla pravdivá formule A ? Nekonečně mnoho možností, nekonečně mnoho modelů.
Např. $\langle \mathbb{N}, <, x+1 \rangle$, $\langle \{0,1\}, <, x^2 \rangle$, $\langle \mathbb{N}, \leq, x^2 \rangle$.
- Všechny modely formule A jsou také modely formule B („co platí pro všechny, platí také pro některé“).

Model formule, interpretace

$$C: \forall x P(x, f(y))$$

jaké budou modely této formule (s **volnou proměnnou y**)?

Zvolme opět:

1. Universum $U = \mathbb{N}$
2. Symbolu P přiřadíme relaci \leq
3. Symbolu f přiřadíme funkci x^2

Je struktura $IS = \langle \mathbb{N}, \leq, \text{druhá mocnina} \rangle$ modelem formule C ?
Aby tomu tak bylo, musela by být formule C pravdivá v IS **pro všechna ohodnocení proměnné y** . Tedy formule $P(x, f(y))$ by musela být pravdivá pro všechna ohodnocení x a y .

Ale to není, např. Pro $e(x) = 5$, $e(y) = 2$, 5 není $\leq 2^2$

Model formule, interpretace

$$C: \forall x P(x, f(y))$$

jaké budou modely této formule (s volnou proměnnou y)?

Struktura $\langle \mathbb{N}, \leq, x^2 \rangle$ není modelem formule C.

Modelem (triviálním) je např. $\langle \mathbb{N}, \mathbb{N} \times \mathbb{N}, x^2 \rangle$. Celý Kartézský součin $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tj. množina všech dvojic přirozených čísel, je také relace nad \mathbb{N} .

Nebo je modelem struktura $\langle \mathbb{N}, \geq, F \rangle$, kde F je funkce, zobrazení $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takové, že přiřazuje všem přirozeným číslům číslo 0.