

Úvod do TI - logika

Výroková logika (2.přednáška)

Marie Duží

marie.duzi@vsb.cz



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Výroková logika

- Analyzuje způsoby skládání jednoduchých výroků do výroků složených pomocí logických spojek.
- Co je to výrok? *Výrok je tvrzení, o němž má smysl prohlásit, zda je pravdivé či nepravdivé.*
- Princip dvouhodnotovosti – *tercium non datur* – *dvouhodnotová logika* (existují však vícehodnotové logiky, logiky parciálních funkcí, fuzzy logiky, ...)
- Triviální definice? Jsou všechna (oznamovací) tvrzení výroky?
Ne, není pravda, že všechna tvrzení jsou výroky:
 - *Francouzský král je holohlavý*
 - *Přestal jste bít svou ženu?*
(zkuste odpovědět ano nebo ne, pokud jste nikdy nebyl ženatý nebo nikdy svou ženu nebil).

Výroková logika: sémantický výklad

(sémantika = význam)

- **Výroky** dělíme na:
 - **Jednoduché** – žádná vlastní část jednoduchého výroku již není výrokem.
 - **Složené** – výrok má vlastní část(i), která je výrokem.
- **Princip kompozicionality**: význam složeného výroku je funkcí významu jeho složek.
- Význam jednoduchých výroků redukuje VL na Pravda (1), Nepravda (0).
- Proto je výroková logika vlastně algebrou pravdivostních hodnot.

Výroková logika: příklady složených výroků

- V Praze prší **a** v Brně je hezky.



- **Není pravda**, že v Praze prší.



Výroková logika: Definice 2.1.1.

(jazyk VL)

- **Formální jazyk** je zadán *abecedou* (množina výchozích symbolů) a *gramatikou* (množina pravidel, která udávají, jak vytvářet „Dobře utvořené formule“ - DUF).
- **Jazyk výrokové logiky**
 - **Abeceda:**
 - Výrokové symboly: $p, q, r, \dots$ (případně s indexy)
 - Symboly logických spojek (funktorů): $\neg, \vee, \wedge, \supset, \equiv$
 - Pomocné symboly (závorky): $(,), [,], \{, \}$
 - Výrokové symboly zastupují elementární výroky
 - Symboly $\neg, \vee, \wedge, \supset, \equiv$ nazýváme po řadě **negace** ($\neg$), **disjunkce** ($\vee$), **konjunkce** ($\wedge$), **implikace** ($\supset$), **ekvivalence** ($\equiv$).

Výroková logika: Definice 2.1.1.

(jazyk VL)

- **Gramatika** (definuje rekurzivně dobře utvořené formule DUF)

Induktivní definice nekonečné množiny DUF:

1. Výrokové symboly **$p, q, r, \dots$** jsou (*dobře utvořené*) *formule* (báze definice).
2. Jsou-li výrazy A, B formule, pak jsou (DU) *formulemi* i výrazy **$(\neg A), (A \wedge B), (A \vee B), (A \supset B), (A \equiv B)$** (indukční krok definice).
3. Jiných formulí výrokové logiky, než podle bodů (1), (2) není. (uzávěr definice).

Jazyk výrokové logiky je množina všech dobře utvořených formulí výrokové logiky.

Pozn.: Formule dle bodu (1) jsou **atomické formule**. Formule dle bodu (2) jsou **složené formule**.

Výroková logika: Dobře utvořené formule

Poznámky:

Symbols A, B jsou *metasymbols*. Můžeme za ně dosadit kteroukoli DUF již vytvořenou dle definice.

Pro spojky se někdy užívají jiné symboly:

symbol	alternativně
—	
$\supset$	$\Rightarrow, \rightarrow$
$\equiv$	$\Leftrightarrow, \leftrightarrow$
$\wedge$	$\&$
$\neg$	$\sim$

Priorita logických spojek: $\neg, \wedge, \vee, \supset, \equiv$ (v tomto pořadí).

Příklad: $(p \supset q) \wedge p$ *není ekvivalentní* $p \supset q \wedge p$!

Druhá formule je $p \supset (q \wedge p)$!

Proto raději **nezneužívat priority** a psát závorky!

Příklad: $(p \supset q) \wedge p$ je DUF (vnější závorky vynechány)
 $(p \vee) \neg \equiv q$ není DUF

Sémantika (význam) formulí (Definice 2.1.2.)

Pravdivostní ohodnocení (valuace) výrokových symbolů je zobrazení v , které ke každému výrokovému symbolu p přiřazuje pravdivostní hodnotu, tj. hodnotu z množiny $\{1,0\}$, která kóduje množinu {Pravda, Nepravda}: $\{p_i\} \rightarrow \{1,0\}$

Pravdivostní funkce formule výrokové logiky je funkce w , která pro každé pravdivostní ohodnocení v výrokových symbolů p přiřazuje formuli její pravdivostní hodnotu. Tato hodnota je určena induktivně takto:

- Pravdivostní hodnota elementární formule: $w(p)_v = v(p)$ pro všechny výrokové proměnné p .
- Jsou-li dány pravdivostní funkce formulí A, B , pak pravdivostní funkce formulí $\neg A, A \wedge B, A \vee B, A \supset B, A \equiv B$ jsou dány následující tabulkou 2.1:

Pravdivostní funkce (Tabulka 2.1.)

A	B	$\neg A$	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \supset B$	$A \equiv B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Převod z přirozeného jazyka do jazyka výrokové logiky, spojky.

- Elementární výroky: překládáme symboly $p, q, r, \dots$
- Spojky přirozeného jazyka: překládáme pomocí symbolů pro spojky:

- **Negace:**

- „není pravda, že“: $\neg$ (unární spojka)

- **Konjunkce:**

- „a“: $\wedge$ (binární, komutativní) spojka;
- *Praha je velkoměsto* **a** *2+2=4*: $p \wedge q$
ne vždy, ne každé „a“ je logická konjunkce.
Např. „*Jablka a hrušky se pomíchaly*“.

- **Disjunkce:**

- „nebo“: $\vee$ (binární, komutativní) spojka;
Praha **nebo** *Brno je velkoměsto*. („nevylučující se“): $p \vee q$
- V přirozeném jazyce často ve smyslu *vylučujícím se* „bud', anebo“
(*Půjdu do školy* **(a)nebo** *zůstanu doma.*)
 - Vylučující se „nebo“ je non-ekvivalence

Spojka implikace

- **Implikace**

- „jestliže, pak“, „když, tak“, „je-li, pak“: $\supset$ (binární, **ne**komutativní) spojka;
První člen implikace **antecedent**, druhý **konsekvent**.
- Implikace (ani žádná jiná spojka) nepředpokládá *žádnou obsahovou souvislost* mezi antecedentem a konsekventem, proto bývá někdy nazývána *materiálová implikace* (středověk *suppositio materialis*).
- Implikace tedy (na rozdíl od častých případů v přirozeném jazyce) **nezachycuje ani příčinnou ani časovou vazbu**.
 - „Jestliže $1+1=2$, pak železo je kov“ (pravdivý výrok): $p \supset q$
 - „Jestliže existují ufoni, tak jsem papež“: $p \supset r$
(co tím chce dotyčný říct? Nejsem papež, tedy neexistují ufoni)
- Pozn.: **Spojce “protože” neodpovídá logická spojka implikace!**
 - “Hokejisté prohráli semifinálový zápas, **proto** se vrátili z olympiády předčasně”.
 - „**Protože** jsem nemocen, zůstal jsem doma“. „nemocen“ $\supset$ „doma“ ?
Ale to by muselo být pravda, i když nejsem nemocen (slide 24). 11
 - Mohli bychom to analyzovat pomocí *modus ponens*: $[p \wedge (p \supset q)] \supset q$

Spojka ekvivalence

- **Ekvivalence:**

- "právě tehdy, když", "tehdy a jen tehdy, když", apod. , ale ne "tehdy, když" – to je implikace!
- "Řecká vojska vyhrávala boje **tehdy (a jen tehdy), když** o jejich výsledku rozhodovala fyzická zdatnost": $p \equiv q$
- Používá se nejčastěji v matematice (v definicích), v přirozeném jazyce řidčeji.

- *Příklad:*

a) "Dám ti facku, když mě oklameš."

$okl \supset facka$

b) "Dám ti facku tehdy a jen tehdy, když mě oklameš."

$okl \equiv facka$

Situace: Neoklamal jsem. Kdy mohu dostat facku?

Ad a) – můžu dostat facku, ad b) – nemůžu dostat facku.

Splnitelnost formulí, tautologie, kontradikce, model (Definice 2.1.3.)

- **Model formule A:** ohodnocení výrokově logických proměnných $p, q, \dots$ (valuace) v takové, že formule A je v tomto ohodnocení v pravdivá: $w(A)_v = 1$.
- **Formule je splnitelná**, má-li alespoň jeden model.
- **Formule je nespjitelná (kontradikce)**, nemá-li žádný model.
- **Formule je tautologie**, je-li každé ohodnocení v jejím modelem.
- **Množina formulí $\{A_1, \dots, A_n\}$ je splnitelná**, existuje-li ohodnocení v , které je modelem každé formule A_i , $i = 1, \dots, n$.

Splnitelnost formulí, tautologie, kontradikce, model

- *Příklad: Formule **A** je tautologie, $\neg A$ kontradikce, formule $(p \supset q)$, $(p \wedge \neg q)$ jsou splnitelné.*

Formule **A**: $\neg(p \supset q) \equiv (p \wedge \neg q)$

p	q	$p \supset q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \supset q)$	$\neg(p \supset q) \equiv (p \wedge \neg q)$	$\neg A$
1	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0

Výrokově logické vyplývání

Formule A **výrokově logicky vyplývá** z množiny formulí M , značíme $M \models A$, jestliže A je pravdivá v každém modelu množiny M .

Poznámka: **Okolnosti** (definice 1) jsou zde mapovány jako **ohodnocení** (Pravda - 1, Nepravda - 0) **elementárních výroků**:

- *Za všech okolností (při všech ohodnoceních), kdy jsou pravdivé předpoklady, je pravdivý i závěr !*

Příklady: Logické vyplývání

P1: Je doma (d) nebo šel na pivo (p)

P2: Je-li doma (d), pak nás očekává (o)

⇒ Z: Jestliže nás neočekává, pak šel na pivo.

			P1	P2	Z	
d	p	o	$d \vee p$	$d \supset o$	$\neg o \supset p$	
1	1	1	1	1	1	M1
1	1	0	1	0	1	M2
1	0	1	1	1	1	M3
1	0	0	1	0	0	
0	1	1	1	1	1	M4
0	1	0	1	1	1	M5
0	0	1	0	1	1	M6
0	0	0	0	1	0	

Závěr je
pravdivý ve
všech čtyřech
modelech
předpokladů.
(M1, M3, M4, M5)

M1: $d=1, p=1, o=1$;

M3: $d=1, p=0, o=1$;

Příklady: Logické vyplývání

P1: Je doma (d) nebo šel na pivo (p)

P2: Je-li doma (d), pak nás očekává (o)

$\Rightarrow$ Z: Jestliže nás neočekává, pak šel na pivo p.

$$d \vee p, d \supset o \models \neg o \supset p$$

- **Tabulka má 2^n řádků!** Proto **důkaz sporem**.

- Předpokládejme, že úsudek **není správný**. Pak tedy mohou být všechny předpoklady pravdivé a závěr nepravdivý:

$d \vee p$		$d \supset o$		$\models$		$\neg o \supset p$	
	1		1				
						0	
1	0	0	0			1	0
							0

SPOR

(Výrokově)Logické vyplývání

- Všechny úsudky se **stejnou logickou formou** jako platný úsudek jsou platné:

$$d \vee p, d \supset o \vdash \neg o \supset p$$

Za proměnné d , p , o můžeme dosadit kterýkoli elementární výrok:

Hraje na housle nebo se učí. (P1)

Jestliže hraje na housle, pak hraje jako Kubelík.
(P2)

Tedy $\Rightarrow$ Jestliže nehraje jako Kubelík, pak se učí. (Z)

Platný úsudek – stejná logická forma.

(Výrokově)Logické vyplývání

- Jestliže platí, že je správný úsudek:

$$P_1, \dots, P_n \models Z,$$

pak platí, že je tautologie formule tvaru implikace:

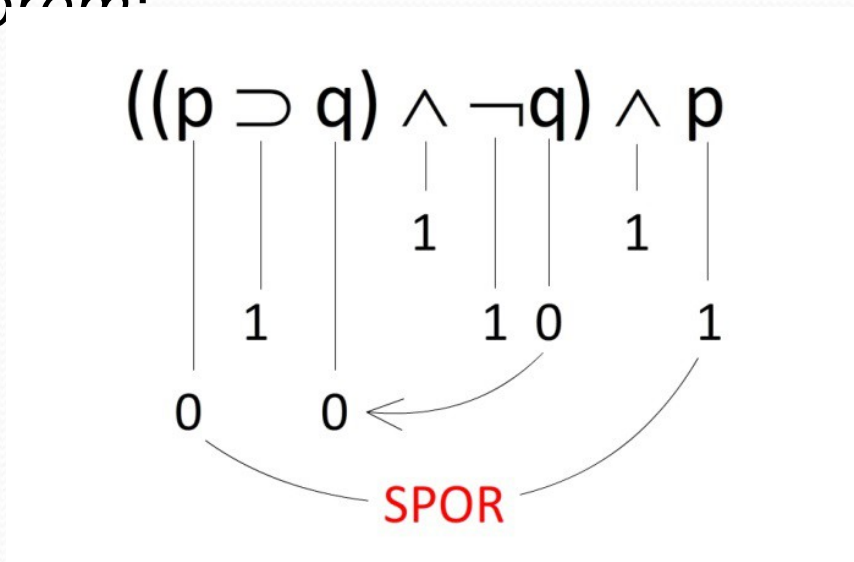
$$\models (P_1 \wedge \dots \wedge P_n) \supset Z.$$

- **Důkaz**, že formule je **tautologie**, nebo že závěr **Z** **logicky vyplývá** z předpokladů :
 - Přímo – např. pravdivostní tabulkou
 - Nepřímo, sporem: $P_1 \wedge \dots \wedge P_n \wedge \neg Z$ je kontradikce, čili množina $\{P_1, \dots, P_n, \neg Z\}$ je sporná (nekonzistentní, *nemá model*: neexistuje ohodnocení v , ve kterém by byly všechny formule této množiny pravdivé).

Důkaz tautologie

$$\models ((p \supset q) \wedge \neg q) \supset \neg p$$

Sporem:



Negovaná formule musí být kontradikce. Pokus, zda může vyjít 1.

Při žádném ohodnocení není **negovaná** formule **pravdivá**, tedy původní formule je **tautologie**.

Nejdůležitější tautologie VL

Tautologie s jedním výrokovým symbolem:

$$\models p \equiv p$$

$$\models p \vee \neg p$$

$$\models \neg(p \wedge \neg p)$$

$$\models p \equiv \neg\neg p$$

zákon vyloučeného třetího

zákon sporu

zákon dvojí negace

Algebraické zákony pro konjunkci, disjunkci a ekvivalenci

$\models (p \vee q) \equiv (q \vee p)$ komutativní zákon pro $\vee$
 $\models (p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$ komutativní zákon pro $\wedge$
 $\models (p \equiv q) \equiv (q \equiv p)$ komutativní zákon pro $\equiv$

$\models [(p \vee q) \vee r] \equiv [p \vee (q \vee r)]$ asociativní zákon pro $\vee$
 $\models [(p \wedge q) \wedge r] \equiv [p \wedge (q \wedge r)]$ asociativní zákon pro $\wedge$
 $\models [(p \equiv q) \equiv r] \equiv [p \equiv (q \equiv r)]$ asociativní zákon pro $\equiv$

$\models [(p \vee q) \wedge r] \equiv [(p \wedge r) \vee (q \wedge r)]$ distributivní zákon
pro $\wedge, \vee$

$\models [(p \wedge q) \vee r] \equiv [(p \vee r) \wedge (q \vee r)]$ distributivní zákon
pro $\vee, \wedge$

Zákony pro implikaci

- ⊨ $p \supset (q \supset p)$ zákon simplifikace
- ⊨ $(p \wedge \neg p) \supset q$ zákon Dunse Scota
- ⊨ $(p \supset q) \equiv (\neg q \supset \neg p)$ **zákon kontrapozice**
- ⊨ $(p \supset (q \supset r)) \equiv ((p \wedge q) \supset r)$ **spojování předpokladů**
- ⊨ $(p \supset (q \supset r)) \equiv (q \supset (p \supset r))$ na pořadí předpokladů nezáleží

- ⊨ $(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$ hypotetický sylogismus
- ⊨ $((p \supset q) \wedge (q \supset r)) \supset (p \supset r)$ tranzitivita implikace
- ⊨ $(p \supset (q \supset r)) \equiv ((p \supset q) \supset (p \supset r))$ Fregův zákon

- ⊨ $(\neg p \supset p) \supset p$ reductio ad absurdum
- ⊨ $((p \supset q) \wedge (p \supset \neg q)) \supset \neg p$ reductio ad absurdum

- ⊨ $(p \wedge q) \supset p$, $\models (p \wedge q) \supset q$
- ⊨ $p \supset (p \vee q)$, $\models q \supset (p \vee q)$

Zákony pro převody

- ⊨ $(p \equiv q) \equiv (p \supset q) \wedge (q \supset p)$
- ⊨ $(p \equiv q) \equiv (p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg p)$
- ⊨ $(p \equiv q) \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$
- ⊨ **$(p \supset q) \equiv (\neg p \vee q)$**
- ⊨ **$\neg(p \supset q) \equiv (p \wedge \neg q)$** **Negace implikace**
- ⊨ **$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$** De Morgan zákony
- ⊨ **$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$** De Morgan zákony

Tyto zákony jsou také návodem jak **negovat**.

Negace implikace

Není pravda, že budu-li hodný, dostanu lyže.

$$\neg(p \supset q)$$

Byl jsem hodný a (stejně) jsem lyže nedostal.

$$p \wedge \neg q \text{ (nesplněný slib)}$$

Státní zástupce:

Pokud je obžalovaný vinen, pak měl společníka ($v \supset s$)

Obhájce:

To není pravda ! $\neg(v \supset s)$

Pomohl obhájce obžalovanému, co vlastně řekl?

(Je vinen a udělal to sám!)

Negace implikace

Věty v budoucnosti:

Jestliže to ukradneš, tak tě zabiju! $(p \supset q)$

To není pravda: Ukradnu to a (stejně) mě nezabiješ. $p \wedge \neg q$

Ale:

Bude-li zítra 3. světová válka, pak zahyne více jak 5 miliard lidí.

To není pravda: Bude zítra 3.sv. válka a zahyne méně než 5 miliard lidí ???

... Asi jsme nechtěli říct, že bude určitě válka.

Zamlčená modalita: **Nutně**, Bude-li zítra 3. světová válka, pak zahyne více jak 5 miliard lidí.

To není pravda: **Možná, že** Bude zítra 3.sv. válka, ale zahynulo by méně než 5 miliard lidí.

Modální logiky – nejsou náplní tohoto kursu.

Ještě úsudky

Převod z přirozeného jazyka nemusí být jednoznačný:

Jestliže má člověk vysoký tlak a špatně se mu dýchá nebo má zvýšenou teplotu, pak je nemocen.

p – „X má vysoký tlak“

q – „X se špatně dýchá“

r – „X má zvýšenou teplotu“

s – „X je nemocen“

1. možná analýza: $[(p \wedge q) \vee r] \supset s$

2. možná analýza: $[p \wedge (q \vee r)] \supset s$

Ještě úsudky

- *Jestliže má Karel vysoký tlak a špatně se mu dýchá nebo má zvýšenou teplotu, pak je nemocen.*
- *Karel není nemocen, ale špatně se mu dýchá.*

⇒ **Co z toho plyne?**

Musíme rozlišit 1. čtení a 2. čtení, protože nejsou ekvivalentní, závěry budou různé.

Analýza 1. čtení

1. analýza: $[(p \wedge q) \vee r] \supset s, \neg s, q \Rightarrow ???$

Úvahou a úpravami:

$[(p \wedge q) \vee r] \supset s, \neg s \Rightarrow \neg[(p \wedge q) \vee r]$ (transpozice)

$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r$ (de Morgan)

$\Rightarrow (\neg p \vee \neg q), \neg r$, ale platí

$q \Rightarrow \neg p, \neg r$ (důsledky)

Tedy $\Rightarrow$ *Karel nemá vysoký tlak a nemá vysokou teplotu.*

Analýza 2. čtení

2. analýza: $[p \wedge (q \vee r)] \supset s, \neg s, q \Rightarrow ???$

Úvahou a ekvivalentními úpravami:

$[p \wedge (q \vee r)] \supset s, \neg s \Rightarrow \neg [p \wedge (q \vee r)]$
(transpozice)

$\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \wedge \neg r)$ (de Morgan)

$\Rightarrow$ ale platí $q \Rightarrow$ druhý disjunkt nemůže být pravdivý $\Rightarrow$ je pravdivý první: $\neg p$ (důsledek)

Tedy $\Rightarrow$ *Karel nemá vysoký tlak* (o jeho teplotě r nemůžeme nic usoudit)

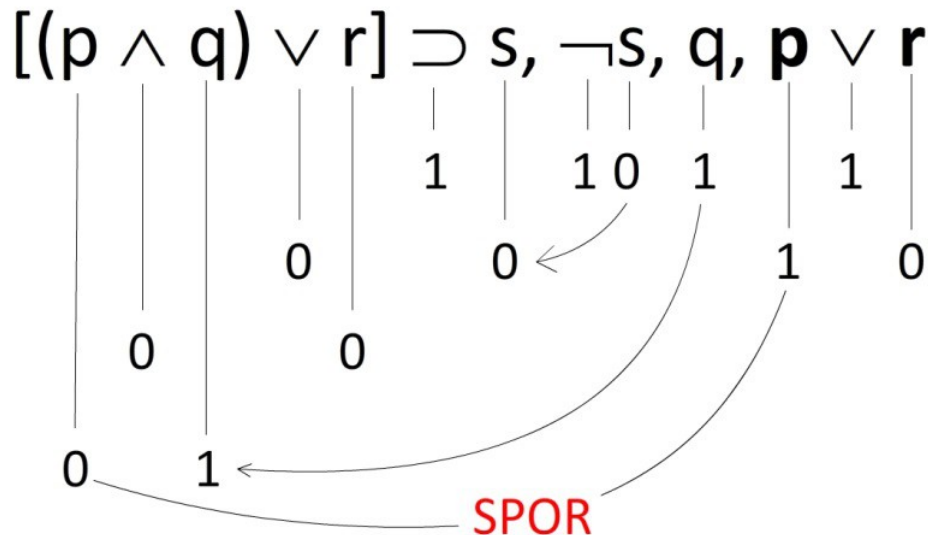
Důkaz obou případů

1. analýza: $[(p \wedge q) \vee r] \supset s, \neg s, q \models \neg p, \neg r$

2. analýza: $[p \wedge (q \vee r)] \supset s, \neg s, q \models \neg p$ D.Ú.

a) 1. případ - tabulkou D.Ú.

b) 1. případ - sporem: k předpokladům přidáme negovaný závěr $\neg(\neg p \wedge \neg r) \Leftrightarrow (p \vee r)$ a předpoklady $[(p \wedge q) \vee r] \supset s, \neg s, q, p \vee r$



Shrnutí

- Typické úlohy:
 - Ověření *platnosti úsudku*.
 - *Co vyplývá* z daných předpokladů?
 - Doplňte chybějící předpoklady.
 - Je daná formule *tautologie, kontradikce, splnitelná*?
 - Najděte *modely* formule, najděte *model množiny* formulí.
- Umíme zatím řešit:
 - Tabulkovou metodou.
 - Úvahou a ekvivalentními úpravami.
 - Sporem, nepřímým důkazem.