Úvod do TI - logika
1. přednáška

Marie Duží
marie.duzi@vsb.cz

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Úvod do TI - logika

Učební texty: http://www.cs.vsb.cz/duzi

Courses

Introduction to Logic: Informace pro studenty

Učební texty: Kapitoly:

- Úvod
- Výroková logika
  - Sémantický výklad
  - Rezoluční metoda
- Predikátová logika
  - Sémantický výklad
  - Obecná rezoluční metoda
- Příklady na cvičení + doplňkové texty + Presentace přednášek

Úvod

Co je to logika? Čím se logika zabývá?

Logika je věda o správném usuzování, neboli o umění správné argumentace

Co je to úsudek (argument)?

Úsudek: na základě pravdivosti předpokladů (premis) $P_1,\ldots,P_n$ je možno soudit, že je pravdivý i závěr Z:

$$\frac{P_1, \ldots, P_n}{Z}$$

Příklad: Na základě toho, že je čtvrtek, *soudím*, že se koná přednáška *„Úvod do logiky“*:

čtvrtek $\Rightarrow$ přednáška

Úvod: správné (platné) úsudky

Budeme se zabývat pouze *deduktivně platnými úsudky*:

$$P_1,\ldots,P_n \models Z$$

kdy závěr Z *logicky vyplývá* z předpokladů (premis) $P_1,\ldots,P_n$.

Definice 1:

Závěr Z ***logicky*** *vyplývá z předpokladů* $P_1,\ldots,P_n$, značíme $P_1,\ldots,P_n \models Z$, jestliže za *žádných* ***okolností*** *nemůže* nastat případ takový, že *předpoklady* (premisy) by byly *pravdivé* a *závěr nepravdivý*.

Úvod: správné (platné) úsudky

Příklad: Na základě toho, že je úterý, soudím, že se koná přednáška *„Úvod do logiky“*:

Dnes je úterý
—
Dnes je přednáška z logiky.

neplatný

Je to deduktivně platný úsudek? Není. Třeba je Duží nemocná a přednáška se nekoná, i když je úterý (chybí předpoklad, že každé úterý ...).

Každé úterý je přednáška z logiky.
Dnes je úterý.
—
Dnes je přednáška z logiky.

platný

Deduktivně nesprávné úsudky: generalizace (indukce), abdukce

Nebudeme se zabývat úsudky *generalizací (indukce), abduktivními,* a jinými *–dukcemi* ⇒ umělá inteligence (nemonotónní usuzování)

Příklad:

Doposud vždy v úterý byla logika.
——
Logika bude i toto úterý

indukce, neplatný

Všechny labutě v Evropě jsou bílé
——
Všechny labutě na světě jsou bílé

indukce, neplatný

Deduktivně nesprávné úsudky: generalizace (indukce), abdukce

Příklady:

Všichni králíci v klobouku jsou bílí.
Tito králíci jsou z klobouku.
⇒ Tito králíci jsou bílí.

Dedukce, platný

Tito králíci jsou z klobouku.
Tito králíci jsou bílí.
⇒ (asi) Všichni králíci v klobouku jsou bílí.

Generalizace, Indukce, neplatný

Všichni králíci v klobouku jsou bílí.
Tito králíci jsou bílí.
⇒ (asi) Tito králíci jsou z klobouku.

Abdukce, neplatný
Hledání předpokladů (příčin) jevů, diagnostika „poruch“

Příklady deduktivně správných (platných) úsudků

1.

Je doma nebo šel na pivo.
Je-li doma, pak se naučí na zkoušku.
Ale na zkoušku se nenaučil.
——————————————— Tedy
Šel na pivo.

Někdy se zdá, jako bychom žádnou logiku nepotřebovali. Vždyť: Nenaučil-li se na zkoušku (dle 3. premisy), pak nebyl doma dle 2. premisy, a dle 1. premisy šel na pivo. Všichni běžně logiku používáme a potřebujeme. Bez ní bychom nepřežili:

2.

Všechny muchomůrky zelené jsou prudce jedovaté.
Houba, kterou jsem našla je muchomůrka zelená.
———————————————
Houba, kterou jsem našla je prudce jedovatá.

Spolehnu se na logiku a nebudu zkoumat (jak bych to dělala?), zda je ta houba jedovatá.

Příklady deduktivně správných (platných) úsudků

3.

Všechny muchomůrky zelené jsou prudce jedovaté.
Tato tužka je muchomůrka zelená.
——————————————————— Tedy $\Rightarrow$
Tato tužka je prudce jedovatá.

Úsudek je *správný*. Závěr je však *nepravdivý*.
Tedy alespoň jedna premisa je nepravdivá (zjevně ta druhá).

Okolnosti (dle Definice 1) jsou různé ***interpretace*** (dle expresivní síly logického systému). Logické spojky (‘*a*’, ‘*nebo*’, ‘jestliže, *…pak…*’) mají pevný význam, ***interpretujeme elementární výroky*** nebo jejich části.

V našem případě, kdyby byly „tato tužka“ a „muchomůrka zelená“ interpretovány tak, aby byla druhá premisa pravdivá, byla by zaručena pravdivost závěru.

Říkáme také, že úsudek má správnou *logickou formu*

Deduktivně správné (platné) úsudky

Logika je *nástroj,* který pomáhá *objevovat vztah logického vyplývání,* řešit úlohy typu „Co vyplývá z daných předpokladů“?, a pod.

P_1: Je-li tento kurs dobrý, pak je užitečný.

P_2: Buď je přednášející přísný, nebo je tento kurs neužitečný.

P_3: Ale přednášející není přísný.

———————————————————————— Tedy

Z: Tento kurs není dobrý.

Pomáhá naší intuici, která může někdy selhat.

- Premisy mohou být složitě formulované, „zapletené do sebe a do negací“, vztah vyplývání pak není na první pohled patrný.
- Podobně jako všichni rodilí mluvčí jazyka používají gramatická pravidla, aniž by znali gramatiku. Ale někdy je dobré se podívat do mluvnice jazyka českého (zejména v soutěži 1 proti 100).

Příklady úsudků

P_1: Všichni muži mají rádi fotbal a pivo.

P_2: Někteří milovníci piva nemají rádi fotbal.

P_3: Xaver má rád pouze milovníky fotbalu a piva.

––––––––––––––––––––––––––––––––

Z: Některé ženy nemá Xaver rád.

Nutně, jsou-li pravdivé všechny Předpoklady, pak musí být pravdivý i Závěr.
Je však tento úsudek platný?

Jistě, má-li Xaver rád pouze milovníky fotbalu a piva (3.), pak nemá rád některé milovníky piva (ty co nemají rádi fotbal (2.)), tedy nemá rád (dle 1.) některé **„ne-muže“, t.j. ženy**.

Dle **Definice 1** však platný není: úsudek je platný, pokud je **nutně, tj. za všech okolností (interpretací) kdy jsou pravdivé předpoklady, pravdivý i závěr.**

Ale: v našem příkladě ta individua, která ***nejsou muži*** by nemusela být interpretována jako ***ženy***.

Chybí zde premisa, že *„kdo není muž, je žena“*, podobně ještě potřebujeme premisu *„kdo je milovník něčeho, ten to má rád“.*

Příklady deduktivně správných (logicky platných) úsudků

Tedy: musíme uvádět všechny předpoklady nutné pro odvození závěru.

P_1: Všichni muži mají rádi fotbal a pivo.
P_2: Někteří milovníci piva nemají rádi fotbal.
P_3: Xaver má rád pouze milovníky fotbalu a piva.
P_4: Kdo není muž, je žena.
P_5: Kdo je milovník něčeho, ten to má rád.
———————————————————————
Z: Některé ženy nemá Xaver rád.

Nyní je úsudek logicky platný, má ***platnou logickou formu***.

Závěr logicky vyplývá z předpokladů
(je v nich „informačně, dedukčně obsažen“).

Platné úsudky v matematice

Úsudek A:

Žádné prvočíslo není dělitelné třemi.
Číslo 9 je dělitelné třemi.
------------------------------ logicky *platný*
Číslo 9 není prvočíslo

Úsudek B:

Žádné prvočíslo není dělitelné šesti.
Číslo osm není prvočíslo.
----------------------------- logicky *neplatný*
Číslo osm není dělitelné šesti

Ve druhém případě (Úsudek B) se sice nemůže stát, že by byly premisy pravdivé a závěr nepravdivý, avšak, závěr v případě B ***nevyplývá logicky*** z předpokladů.

Kdyby byl výraz „osm“ interpretován jako číslo 12, byly by předpoklady pravdivé, ale závěr nepravdivý.

(Závěr s předpoklady „přímo nesouvisí“, není v nich deduktivně obsažen)

Sémantická věta o dedukci

Je-li úsudek $P_1,\dots,P_n \models Z$ logicky platný, pak je *analyticky nutně pravdivý* také výrok tvaru:

$$\models P_1 \wedge \dots \wedge P_n \supset Z$$

Nutně, jestliže jsou pravdivé všechny premisy $P_1,\dots,P_n$, pak je pravdivý i závěr Z. Tedy platí:

$P_1,\dots,P_n \models Z \quad \Leftrightarrow$ (právě když)

$P_1,\dots,P_{n-1} \models P_n \supset Z \quad \Leftrightarrow$

$P_1,\dots,P_{n-2} \models (P_{n-1} \wedge P_n) \supset Z \quad \Leftrightarrow$

$P_1,\dots,P_{n-3} \models (P_{n-2} \wedge P_{n-1} \wedge P_n) \supset Z \quad \Leftrightarrow \dots$

$\models (P_1 \wedge \dots \wedge P_n) \supset Z$

Logická analýza jazyka

Správnost úsudku je dána *významem* (interpretací) jednotlivých tvrzení, která analyzujeme (formalizujeme) dle expresivní síly logického systému:

- *Výroková logika*: analyzuje jen do úrovně skladby složeného výroku z elementárních výroků, jejichž skladbu již dále nezkoumá. Elementární výroky vstupují jen svou pravdivostní hodnotou: Pravda – 1, Nepravda – 0 (algebra pravdivostních hodnot)
- *Predikátová logika 1. řádu*: analyzuje navíc elementární výroky do úrovně vlastností individuí a vztahů mezi nimi.
- *Predikátová logika 2. řádu*: analyzuje navíc vlastnosti vlastností a funkcí a vztahy mezi nimi.
- *Modální logiky (nutně, možná), epistémické logiky (znalosti, hypotézy), deontické logiky (příkazy)*, ...
- *Transparentní intensionální logika* (snad **nejsilnější** systém) – je náplní kursu „Inteligentní systémy“.

Vlastnosti deduktivních úsudků

- Platný (správný) úsudek může mít *nepravdivý závěr*:
    - Všechna prvočísla jsou lichá
    - 2 není liché číslo
    - $\Rightarrow$ Tedy 2 není prvočíslo

Pak ale musí být alespoň jeden předpoklad nepravdivý.

V tom případě říkáme také, že úsudek není „sound“ (přesvědčivý). Avšak je to platný argument, a také je užitečný (důkaz *ad absurdum* – chceme-li někomu ukázat, že v argumentaci používá nepravdivé předpoklady, ukážeme mu, že z jeho předpokladů vyplývá evidentně nepravdivý závěr).

- *Monotónnost*: je-li úsudek platný, pak rozšíření množiny předpokladů o další předpoklad nevede ke změně platnosti úsudku.

Vlastnosti deduktivních úsudků

- *Ze sporných předpokladů* (které nemohou být nikdy všechny najednou pravdivé) vyplývá *jakýkoli závěr.*

  Jestliže se budu pilně učit, pak uspěji u zkoušky.
  U zkoušky jsem neuspěl, ačkoliv jsem se pilně učil.

  (*třeba že*) Můj pes hraje na piano.

- *Reflexivita*: je-li A jeden z předpokladů $P_1,\ldots,P_n$, pak

  $P_1,\ldots,P_n \models A$.

- *Transitivita*: jestliže

  $P_1, \ldots, P_n \models Z$ a $Q_1, \ldots, Q_m, Z \models Z'$, pak

  $P_1, \ldots, P_n, Q_1, \ldots, Q_m \models Z'$.

Naivní teorie množin

- Co je to množina ?
  - Množina je soubor prvků a je svými prvky plně určena; množinu s prvky *a, b, c* značíme: $\{a, b, c\}$.
  - Prvkem množiny může být ***opět množina,*** množina nemusí mít ***žádné prvky*** (značíme Φ) !
- *Příklady*: Φ, $\{a, b\}$, $\{b, a\}$, $\{a, b, a\}$, $\{\{a, b\}\}$, $\{a, \{b, a\}\}$, $\{\Phi, \{\Phi\}, \{\{\Phi\}\}\}$.
- Množiny jsou identické, právě když mají stejné prvky (princip extenzionality).
  - *Značení:* $x \in M$ – „*x* je prvkem *M*“
  - $a \in \{a, b\}$, $a \notin \{\{a, b\}\}$, $\{a, b\} \in \{\{a, b\}\}$, $\Phi \in \{\Phi, \{\Phi\}, \{\{\Phi\}\}\}$, $\Phi \in \{\Phi, \{\Phi\}\}$, ale: $x \notin \Phi$ pro žádné (tj. všechna) *x.*
  - $\{a, b\} = \{b, a\} = \{a, b, a\}$, ale: $\{a, b\} \neq \{\{a, b\}\} \neq \{a, \{b, a\}\}$

Množinové operace
(vytvářejí z množin nové množiny)

- Sjednocení: $A \cup B = \{x \mid x \in A$ ***nebo*** $x \in B\}$.

  Čteme: „Množina všech *x* takových, že *x* je prvkem A nebo *x* je prvkem B.“
  - $\{a, b, c\} \cup \{a, d\} = \{a, b, c, d\}$
  - {sudá čísla} ∪ {lichá čísla} = {přirozená čísla} – značíme *Nat.*

- $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i$ pro ***nějaké*** $i \in I\}$.
  - Nechť $A_i = \{x \mid x = 2.i$ pro nějaké $i \in \mathrm{Nat}\}$.
  - $\bigcup_{i \in Nat} A_i =$ *množina všech sudých čísel.*

Množinové operace
(vytvářejí z množin nové množiny)

- Průnik: $A \cap B = \{x \mid x \in A$ ***a*** $x \in B\}$.

  Čteme: „Množina všech *x* takových, že *x* je prvkem A ***a současně*** *x* je prvkem B."

  - $\{a, b, c\} \cap \{a, d\} = \{a\}$
  - {sudá čísla} ∩ {lichá čísla} = Φ

- $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i$ pro ***každé*** $i \in I\}$.
  - Nechť $A_i = \{x \mid x \in \mathrm{Nat}, x \geq \mathrm{i}\}$.
  - Pak $\bigcap_{i \in Nat} A_i = \Phi$.

Vztahy mezi množinami

- Množina A je podmnožinou množiny B, značíme $A \subseteq B$, právě když každý prvek A je také prvkem B.

- Množina A je vlastní podmnožinou množiny B, značíme $A \subset B$, právě když každý prvek A je také prvkem B a **ne naopak**.

  $\{a\} \subseteq \{a\} \subset \{a, b\} \not\subset \{\{a, b\}\}$!!!

- Platí: $A \subset B$, právě když $A \subseteq B$ a $A \neq B$

- Platí: $A \subseteq B$, právě když $A \cup B = B$, právě když $A \cap B = A$

Další množinové operace

- Rozdíl: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ a } x \notin B\}$
  - $\{a, b, c\} \setminus \{a, b\} = \{c\}$.

- Doplněk (komplement): Nechť $A \subseteq M$. Doplněk A *vzhledem* k M je množina $A' = M \setminus A$.

- Kartézský součin: $A \times B = \{\langle a,b \rangle \mid a \in A, b \in B\}$,
  kde $\langle a,b \rangle$ je **uspořádaná dvojice (záleží na pořadí).**
  - Platí: $\langle a,b \rangle = \langle c,d \rangle$ právě když $a = c$, $b = d$.
  - **Ale**: $\langle a,b \rangle \neq \langle b,a \rangle$, ačkoliv $\{a,b\} = \{b,a\}$!!!

- Zobecnění: $A \times \ldots \times A$ množina n-tic, značíme také A^n.

Další množinové operace

- Potenční množina: $2^A = \{B \mid B \subseteq A\}$, značíme také P(A).

  $2^{\{a,b\}} = \{\Phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

  $2^{\{a,b,c\}} = \{\Phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

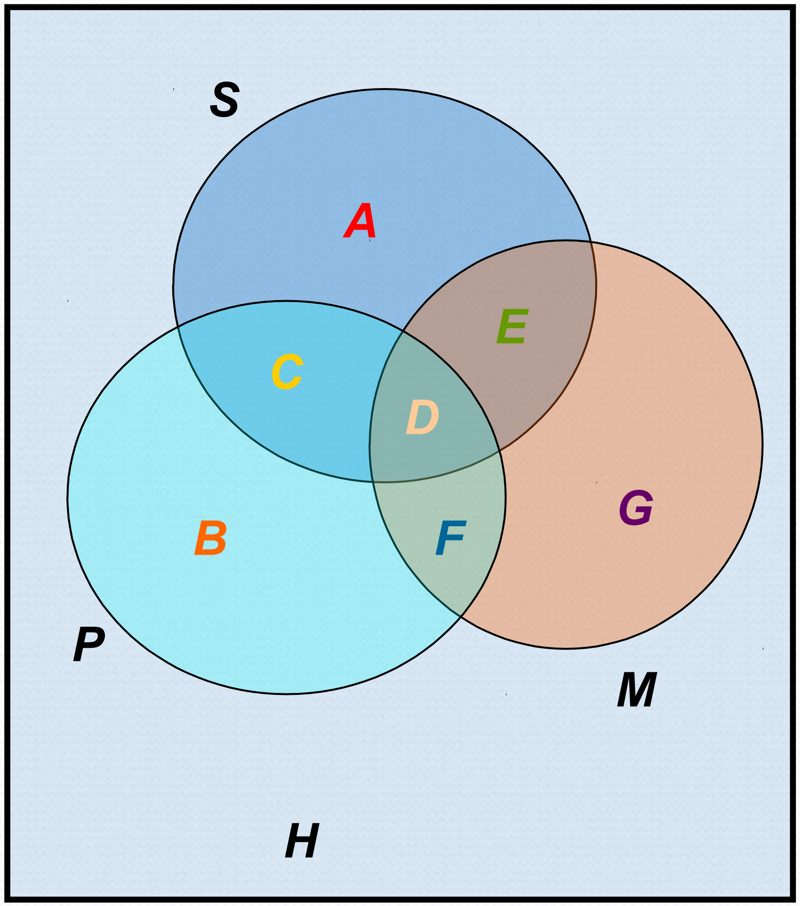
  Kolik prvků má množina 2^A?

  Je-li |A| počet prvků (kardinalita) množiny A, pak 2^A má $2^{|A|}$ prvků

  (proto takové značení).

  $2^{\{a,b\} \times \{a\}} = \{\Phi, \{\langle a,a\rangle\}, \{\langle b,a\rangle\}, \{\langle a,a\rangle, \langle b,a\rangle\}\}$

Grafické znázornění (v universu U)



A: $S \setminus (P \cup M) = (S \setminus P) \cap (S \setminus M)$

$S(x) \wedge \neg(P(x) \vee M(x)) \Leftrightarrow S(x) \wedge \neg P(x) \wedge \neg M(x)$

B: $P \setminus (S \cup M) = (P \setminus S) \cap (P \setminus M)$

$P(x) \wedge \neg(S(x) \vee M(x)) \Leftrightarrow P(x) \wedge \neg S(x) \wedge \neg M(x)$

C: $(S \cap P) \setminus M$

$S(x) \wedge P(x) \wedge \neg M(x)$

D: $S \cap P \cap M$

$S(x) \wedge P(x) \wedge M(x)$

E: $(S \cap M) \setminus P$

$S(x) \wedge M(x) \wedge \neg P(x)$

F: $(P \cap M) \setminus S$

$P(x) \wedge M(x) \wedge \neg S(x)$

G: $M \setminus (P \cup S) = (M \setminus P) \cap (M \setminus S)$

$M(x) \wedge \neg(P(x) \vee S(x)) \Leftrightarrow M(x) \wedge \neg P(x) \wedge \neg S(x)$

H: $\mathbf{U \setminus (S \cup P \cup M) = (U \setminus S \cap U \setminus P \cap U \setminus M)}$

$\neg(S(x) \vee P(x) \vee M(x)) \Leftrightarrow \neg S(x) \wedge \neg P(x) \wedge \neg M(x)$

Russellův paradox

- Je pravda, že každý (tj. libovolným způsobem **zadaný**) soubor prvků lze považovat za množinu?

- Normální je, že množina a její prvky jsou objekty různých typů. Tedy „*normální množina*“ není prvkem sebe sama.

- Nechť tedy $\boldsymbol{N}$ je množina ***všech*** normálních množin:

  $\boldsymbol{N} = \{M \mid M \notin M\}$.
- *Otázka*: Je $\boldsymbol{N} \in \boldsymbol{N}$?
  - **Ano**?
    Ale pak dle zadání platí, že $\boldsymbol{N}$ je normální, tj. $\boldsymbol{N} \notin \boldsymbol{N}$.
  - **Ne?**
    Ale pak $\boldsymbol{N} \notin \boldsymbol{N}$, tedy $\boldsymbol{N}$ je normální a patří do N, tj. $\boldsymbol{N} \in \boldsymbol{N}$.
  - Obě odpovědi vedou ke sporu, jedná se o „špatné zadání“, které nezadává takový soubor prvků, jenž bychom mohli považovat za množinu.