INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0216, OPVK)

Úvod do logiky (PL): predikátová logika druhého řádu

doc. PhDr. Jiří Raclavský, Ph.D.

(raclavsky@phil.muni.cz)

14. Predikátová logika druhého řádu

V PL2 jsou na rozdíl od PL1 povoleny i predikátové proměnné, které nabývají jako hodnoty množiny (tj.podmnožiny univerza), a navíc tyto predikátové proměnné mohou být kvantifikovány. Příkladem výrazu PL2 je např. zápis Leibnizovy identity nerozlišitelných entit: $\forall x \forall y\ (x=y) \leftrightarrow \forall P(P(x) \leftrightarrow P(y))$, tedy že x a y jsou identické právě tehdy, když mají všechny vlastnosti stejné. Předmětem PL2 jsou zejména vlastnosti binárních relací.

Relace

Zde podávaný přehled binárních relací podávaný níže je ukázkou množinových souvislostí: např. doplněk relace R vyznačuje množinu těch uspořádaných dvojic (z produktu kartézského součinu nad univerzem), které nejsou v „rozsahu" relace R (interpretace relace R je množina uspořádaných dvojic), tedy jde o ty dvojice x, y, o nichž není pravda, že jsou v relaci R.

V našem zápisu relací neužíváme mnohde používané infixové notace (xRy); používáme notaci výše zavedenou v gramatice. R není relace, ale proměnná (2. řádu)

Doplněk relace	$\mathrm{R}'(x,y) =_{df}$	$\neg \mathrm{R}(x,y)$
Inkluze relací	$\mathrm{R} \subseteq \mathrm{S} =_{df}$	$\forall xy\ (\mathrm{R}(x,y) \rightarrow \mathrm{S}(x,y))$
Rovnost relací	$\mathrm{R} = \mathrm{S} =_{df}$	$\forall xy\ (\mathrm{R}(x,y) \leftrightarrow \mathrm{S}(x,y))$
Sjednocení relací	$\mathrm{R} \cup \mathrm{S}(x,y) =_{df}$	$\mathrm{R}(x,y) \vee \mathrm{S}(x,y)$
Průnik relací	$\mathrm{R} \cap \mathrm{S}(x,y) =_{df}$	$\mathrm{R}(x,y) \wedge \mathrm{S}(x,y)$
Univerzální relace	$\mathrm{U}(x,y) =_{df}$	$\mathrm{R}(x,y) \vee \neg \mathrm{R}(x,y)$
Prázdná relace	$\varnothing(x,y) =_{df}$	$\mathrm{R}(x,y) \wedge \neg \mathrm{R}(x,y)$
Inverzní relace	$\mathrm{R}^{-1}(x,y) =_{df}$	$\mathrm{R}(y,x)$
Kompozice relací	$\mathrm{R} \,.\, \mathrm{S}(x,y) =_{df}$	$\exists z\ (\mathrm{R}(x,z) \wedge \mathrm{S}(z,y))$

Vlastnosti binárních relací

Reflexivita	$\mathrm{Refl(R)} =_{df}$	$\forall x\ \mathrm{R}(x,x)$
Poloreflexivita	$\mathrm{Polorefl(R)} =_{df}$	$\exists x\ \neg\mathrm{R}(x,x) \wedge \exists x\ \mathrm{R}(x,x)$
Antireflexivita	$\mathrm{Antirefl(R)} =_{df}$	$\neg\forall x\ \mathrm{R}(x,x)$
Ireflexivita	$\mathrm{Irefl(R)} =_{df}$	$\forall x\ \neg\mathrm{R}(x,x)$
Symetrie	$\mathrm{Sym(R)} =_{df}$	$\forall xy\ (\mathrm{R}(x,y) \rightarrow \mathrm{R}(y,x))$
Polosymetrie	$\mathrm{Polosym(R)} =_{df}$	$\exists xy\ (\ (\mathrm{R}(x,y)\wedge\neg\mathrm{R}(y,x)) \wedge (\mathrm{R}(x,y)\wedge\mathrm{R}(y,x))\ )$
Asymetrie	$\mathrm{Asym(R)} =_{df}$	$\forall xy\ (\mathrm{R}(x,y) \rightarrow \neg\mathrm{R}(y,x))$
Antisymetrie	$\mathrm{Antisym(R)} =_{df}$	$\forall xy\ (\ (\mathrm{R}(x,y)\wedge\mathrm{R}(y,x)) \rightarrow (x=y)\ )$
Tranzitivita	$\mathrm{Trans(R)} =_{df}$	$\forall xyz\ (\ (\mathrm{R}(x,y)\wedge\mathrm{R}(y,z)) \rightarrow \mathrm{R}(x,z)\ )$
Polotranzitivita	$\mathrm{Polotrans(R)} =_{df}$	$\exists xyz\ (\ (\mathrm{R}(x,y)\wedge\mathrm{R}(y,z)\wedge\mathrm{R}(x,z)) \wedge \mathrm{R}(x,y)\wedge\mathrm{R}(y,z)\wedge\neg\mathrm{R}(x,z))\ )$
Intranzitivita	$\mathrm{Intrans(R)} =_{df}$	$\forall xyz\ (\ (\mathrm{R}(x,y)\wedge\mathrm{R}(y,z)) \rightarrow \neg\mathrm{R}(x,z)\ )$
Konexnost	$\mathrm{Con(R)} =_{df}$	$\forall xy\ (\ (x\neq y) \rightarrow (\mathrm{R}(x,y)\wedge\mathrm{R}(y,x))\ )$
Inkonexnost	$\mathrm{Incon(R)} =_{df}$	$\exists xy\ (\ (x\neq y) \wedge \neg\mathrm{R}(x,y) \wedge \neg\mathrm{R}(y,x)\ )$

Speciální relace

Relace typu ekvivalence:	$\mathrm{Refl(R)} \wedge \mathrm{Sym(R)} \wedge \mathrm{Trans(R)}$
Ostré uspořádání:	$\mathrm{Refl(R)} \wedge \mathrm{Asym(R)} \wedge \mathrm{Trans(R)}$
Částečné uspořádání:	$\mathrm{Refl(R)} \wedge \mathrm{Antisym(R)} \wedge \mathrm{Trans(R)}$

Například každá reflexivní relace je množinou dvojic $<\alpha,\alpha>$, $<\beta,\beta>$, $<\gamma,\gamma>$… Příklad výrazu, který výmluvně vyjadřuje reflexivní relaci je: „být identický se sebou". „Milovat" nechť je příkladem relace, která je symetrická (x miluje y a y miluje x) a také reflexivní (x může milovat i sebe sama). „Platonicky milovat" je zjevně příkladem relace asymetrické (x miluje y a y nemiluje x).