



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0216, OPVK)

Úvod do logiky (PL): ověřování platnosti úsudků sémantickou metodou protipříkladu

doc. PhDr. Jiří Raclavský, Ph.D.

(raclavsky@phil.muni.cz)

12. Ověřování platnosti úsudků sémantickou metodou protipříkladu

12.1 Příklady – bezprostřední úsudky (jednoduché tautologie PL)

Pomocí sémantické metody, tedy na základě definice vyplývání a definice interpretace, určete platnost (korektnost) následujících úsudků. V případě korektních úsudků si navíc ověřte, zda platí i vyplývání premisy ze závěru, tedy vyplývání oběma směry:

1)

Všichni jsou smrtelní.

Někteří nejsou smrtelní.

Formálně:

$\forall x S(x)$

$\exists x \neg S(x)$

Nechť:

$U = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$

$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \beta$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0):

proto např.: $\mathfrak{I}(S) = U$

$\exists x \neg S(x)$

0 1 α

0 1 β

0 1 γ

0 1 atd.

0

b) Při interpretaci premisy chceme, aby byla 1; musíme ovšem spočítat podle již získané interpretace predikátového symbolu S (nelze mít rozpor v interpretaci):

$\forall x S(x)$

1 α

1 α

1 α

1 atd.

1

Tedy: úsudek není korektní, závěr nevyplývá z premis, neboť je možná taková interpretace, při níž všechny premisy (zde pouze jedna) jsou pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

2)

Každý je smrtelný.

Není pravda, že někdo je smrtelný.

Formálně:

$\forall x S(x)$

$\neg \exists x S(x)$

Nechť:

$U = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$

$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \beta$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0):

proto např.: $\mathfrak{I}(S) = U$

$\neg \exists x S(x)$

1 α

1 { 1 β

1 γ

1 atd.

0

b) Interpretace premisy (chceme, aby 1; ale musíme spočítat podle již získané interpretace predikátového symbolu S - nelze mít rozpor v interpretaci):

$\forall x S(x)$

1 α

1 α

1 α

1 atd.

1

Tedy: úsudek není korektní, závěr nevyplývá z premis, neboť je možná taková interpretace, při níž všechny premisy (zde pouze jedna) jsou pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

3)

Každý je smrtelný.

Někdo je smrtelný.

Formálně:

$\forall x S(x)$

$\exists x S(x)$

Nechť:

$U = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$

$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \beta$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0):

proto např.: $\mathfrak{I}(S) = \emptyset$

$\exists x S(x)$

0 α

0 β

0 γ

0 atd.

0

b) Interpretace premisy (chceme, aby 1; ale musíme spočítat podle již získané interpretace predikátového symbolu S - nelze mít rozpor v interpretaci):

$\forall x S(x)$

0 α

0 α

0 α

0 atd.

0

Tedy: úsudek (*zákon partikularizace*) je korektní, závěr vyplývá z premis, neboť není možná taková interpretace, při níž všechny premisy (zde pouze jedna) jsou pravdivé a závěr přitom nepravdivý. (Pozn.: vyplývání však není platné oběma směry.)

4)

Platný však není úsudek s obráceným pořadím výroků (z výše uvedeného závěru výše uvedená premisa nevyplývá):

Někdo je smrtelný.

Každý je smrtelný.

Formálně:

$\exists x S(x)$

$\forall x S(x)$

Nechť:

$U = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$

$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \beta$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0):

proto např.: $\mathfrak{I}(S) = \emptyset$

$\forall x S(x)$

0 α

0 β

0 γ

0 atd.

0

b) Interpretace premisy (chceme, aby 1; ale musíme spočítat podle již získané interpretace predikátového symbolu S - nelze mít rozpor v interpretaci):

$\exists x S(x)$

0 α

0 α

0 α

0 atd.

0

Pozor: všimněme si, že premisa by pravdivá být mohla (což chceme), pokud poněkud upravíme interpretaci S (zachováme však nepravdivost závěru):

a') Pozměněná interpretace závěru (chceme, aby 0): proto např.: $\mathfrak{I}'(S) = \{\alpha\}$ (tj. $\mathfrak{I}'(S) \subset U$)

$\forall x S(x)$

1 α

0 β

0 γ

0 atd.

0

b') Pozměněná interpretace premisy (chceme, aby 1):

$\exists x S(x)$

1 α

0 α

0 α

0 atd.

1

Tedy: úsudek není korektní, závěr nevyplývá z premis, neboť je možná taková interpretace, při níž všechny premisy (zde pouze jedna) jsou pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

5)

Každý je omylný.

Adam je omylný

Formálně:

$\forall x O(x)$

$O(k)$

Nechť:

$U = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \gamma$

$\mathfrak{I}(a) = S(a) = \alpha$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0):

proto např.: $\mathfrak{I}(O) = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

$O(a)$

0 α

b) Interpretace premisy (chceme, aby 1; ale musíme spočítat podle již získané interpretace predikátového symbolu O - nelze mít rozpor v interpretaci):

$\forall x O(x)$

0 α

1 β

1 γ

0

Tedy: úsudek (*zákon konkretizace*) je korektní, závěr vyplývá z premis, neboť není možná taková interpretace, při níž všechny premisy (zde pouze jedna) jsou pravdivé a závěr přitom nepravdivý. (Pozn.: vyplývání však není platné oběma směry.)

6)

Platný však není úsudek s obráceným pořadím výroků (z výše uvedeného závěru výše uvedená premisa nevyplývá):

Adam je omylný.

Každý je omylný.

Formálně:

$O(a)$

$\forall x O(x)$

Nechť:

$U = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \gamma$

$\mathfrak{I}(a) = S(a) = \alpha$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0):

proto např.: $\mathfrak{I}(O) = \{\alpha\}$ (tj. $\mathfrak{I}(O) \neq U$)

$\forall x O(x)$

1 α

0 β

0 γ

0

b) Interpretace premisy (chceme, aby 1; ale musíme spočítat podle již získané interpretace predikátového symbolu O - nelze mít rozpor v interpretaci):

$O(a)$

1 α

Tedy: úsudek není korektní, závěr nevyplývá z premis, neboť je možná taková interpretace, při níž všechny premisy (zde pouze jedna) jsou pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

7)

Gödel je logik.

Někdo je logik.

Formálně:

$$L(g)$$

$$\exists x L(x)$$

Nechť:

$$U = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$$

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \beta$$

$$\mathfrak{I}(g) = S(g) = \gamma$$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0):

proto např.: $\mathfrak{I}(L) = \emptyset$

$$\exists x L(x)$$

$$0 \quad \alpha$$

$$0 \quad \beta$$

$$0 \quad \gamma$$

atd.

$$0$$

b) Interpretace premisy (chceme, aby 1; ale musíme spočítat podle již získané interpretace predikátového symbolu L - nelze mít rozpor v interpretaci):

$$L(g)$$

$$0 \quad \gamma$$

Tedy: úsudek (*zákon abstrakce*) je korektní, závěr vyplývá z premis, neboť není možná taková interpretace, při níž všechny premisy (zde pouze jedna) jsou pravdivé a závěr přitom nepravdivý. (Pozn.: vyplývání však není platné oběma směry.)

8)

Opačným směrem (po obrácení pořadí výroků) však daný úsudek platný není:

Někdo je logik.

Gödel je logik.

Formálně:

$$\exists x L(x)$$

$$L(g)$$

Nechť:

$$U = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$$

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \beta$$

$$\mathfrak{I}(g) = S(g) = \gamma$$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0):

proto např.: $\mathfrak{I}(L) = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$

$$L(g)$$

$$0 \quad \gamma$$

b) Interpretace premisy (chceme, aby 1; ale musíme spočítat podle již získané interpretace predikátového symbolu L - nelze mít rozpor v interpretaci):

$$\exists x L(x)$$

$$1 \quad \alpha$$

$$1 \quad \beta$$

$$0 \quad \gamma$$

$$1 \quad \text{atd.}$$

$$1$$

Tedy: úsudek není korektní, závěr nevyplývá z premis, neboť je možná taková interpretace, při níž všechny premisy (zde pouze jedna) jsou pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

12.2 Příklady – jednoduché úsudky s monadickými predikáty

Pomocí sémantické metody, tedy na základě definice vyplývání a definice interpretace, určete platnost následujících úsudků:

1)

Každý člověk je smrtelný.

Sokrates je člověk.

Sokrates je smrtelný.

Formálně:

$$\forall x (\check{C}(x) \rightarrow S(x))$$

$$\check{C}(s)$$

 $S(s)$

Nechť:

$$U = \{\sigma, \pi, \alpha\} \text{ (tj. Sokrates, Platón, Aristoteles)}$$

$$\mathfrak{I}(x) = \nu(x) = \pi$$

$$\mathfrak{I}(s) = S(s) = \sigma$$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0):

proto např.: $\mathfrak{I}(S) = \{\sigma, \pi, \alpha\} \neq U$

$$S(s)$$

$$0 \quad \sigma$$

b) Interpretace druhé premisy (chceme, aby 1):

proto např.: $\mathfrak{I}(\check{C}) = \{\sigma, \pi, \alpha\} = U$

$$\check{C}(s)$$

$$1 \quad \sigma$$

c) Interpretace první premisy (chceme, aby 1; ale musíme spočítat podle již získaných interpretací predikátových symbolů):

$$\forall x (\check{C}(x) \rightarrow S(x))$$

$$0 \quad \alpha \quad 1 \quad 1 \quad \alpha$$

$$0 \quad \pi \quad 1 \quad 1 \quad \pi$$

$$1 \quad \sigma \quad 0 \quad 0 \quad \sigma$$

$$0$$

Tedy: úsudek je korektní, závěr vyplývá z premis, neboť není možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý. (Rychlý postup: a) $\mathfrak{I}(S) = \emptyset$, aby byl závěr nepravdivý, b) avšak protože $\mathfrak{I}(\check{C}) = \{\sigma\}$ (tj. $\mathfrak{I}(\check{C}) \neq \emptyset$), aby druhá premisa byla

pravdivá, c) tak první premisa nemůže být pravdivá (alespoň $1 \times$ se vyskytne řádek $1 \rightarrow 0$); tudíž úsudek je korektní.)

2)

Každý hlupák je rozumbrada.

Adam je rozumbrada.

Adam je hlupák.

Formálně:

$\forall x (H(x) \rightarrow R(x))$

$R(a)$

$H(a)$

Nechť:

$U = \{\alpha\}$

$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \alpha$

$\mathfrak{I}(a) = S(a) = \alpha$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0):

proto: $\mathfrak{I}(H) = \{\alpha\} = \emptyset$

$H(a)$

0 α

b) Interpretace druhé premisy (chceme, aby 1):

proto: $\mathfrak{I}(R) = \{\alpha\} = U$

$R(a)$

1 α

c) Interpretace první premisy (chceme, aby 1; ale musíme spočítat podle již získaných interpretací predikátových symbolů):

$\forall x (H(x) \rightarrow R(x))$

0 α 1 1 α

1

Tedy: úsudek není korektní, závěr nevyplývá z premis, neboť je možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý. (Rychlý postup: a) $\mathfrak{I}(H)=\emptyset$, aby byl závěr nepravdivý, c) načež první premisa je pravdivá ($0 \rightarrow 0$ je 1), c) dále $\mathfrak{I}(R)=U$, aby druhá premisa byla pravdivá; tudíž není korektní.) Pozn.: srov. toto neplatné usuzovací schéma s platným schématem z příkladu 1).

3)

Některý filosof je moudrý.

Sokrates je filosof.

Sokrates je moudrý.

Formálně:

$\exists x (F(x) \wedge M(x))$

$F(s)$

$M(s)$

Nechť:

$U=\{\sigma, \pi, \alpha\}$ (tj. Sokrates, Platón, Aristoteles)

$\mathfrak{I}(x)=v(x)=\alpha$

$\mathfrak{I}(s)=S(s)=\sigma$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0):

proto např.: $\mathfrak{I}(M)=\{\sigma, \pi, \alpha\} \neq U$

$M(s)$

0 σ

b) Interpretace druhé premisy (chceme, aby 1):

proto např.: $\mathfrak{I}(F)=\{\sigma, \pi, \alpha\}=U$

$F(s)$

1 σ

c) Interpretace první premisy (chceme, aby 1; ale musíme spočítat podle již získaných interpretací predikátových symbolů):

$\exists x (F(x) \wedge M(x))$

$$1 \quad \alpha \quad 1 \quad 1 \quad \alpha$$

$$1 \quad \pi \quad 1 \quad 1 \quad \pi$$

$$1 \quad \sigma \quad 0 \quad 0 \quad \sigma$$

1

Tedy: úsudek není korektní, závěr nevyplývá z premis, neboť je možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

4)

Někteří učitelé jsou hudebníci.

Někteří hudebníci jsou učitelé.

Formálně:

$$\exists x (U(x) \wedge H(x))$$

$$\exists x (H(x) \wedge U(x))$$

Nechť:

$$U = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$$

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \beta$$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0):

proto např.: $\mathfrak{I}(U) = U, \mathfrak{I}(H) = \emptyset$

$$\exists x (H(x) \wedge U(x))$$

$$0 \quad \alpha \quad 0 \quad 1 \quad \alpha$$

$$0 \quad \beta \quad 0 \quad 1 \quad \beta$$

$$0 \quad \gamma \quad 0 \quad 1 \quad \gamma$$

atd. atd.

0

b) Interpretace premisy (chceme, aby 1):

$$\exists x (U(x) \wedge H(x))$$

$$1 \quad \alpha \quad 0 \quad 0 \quad \alpha$$

$$1 \quad \beta \quad 0 \quad 0 \quad \beta$$

1 γ 0 0 γ

atd. atd.

takže: 0

Tedy: úsudek je korektní, závěr vyplývá z premis, neboť není možná taková interpretace, při níž všechny premisy (zde pouze jedna) jsou pravdivé a závěr přitom nepravdivý. (Pozn.: vyplývání je platné oběma směry.)

5)

Někteří učitelé nejsou hudebníci.

Někteří hudebníci nejsou učitelé.

Formálně:

$\exists x (U(x) \wedge \neg H(x))$

$\exists x (H(x) \wedge \neg U(x))$

Nechť:

$U = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$

$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \alpha$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0):

proto např.: $\mathfrak{I}(H) = \emptyset, \mathfrak{I}(U) = U$

$\exists x (H(x) \wedge \neg U(x))$

0 α 0 0 1 α

0 β 0 0 1 β

0 γ 0 0 1 γ

atd. atd.

0

b) Interpretace premisy (chceme, aby 1):

$\exists x (U(x) \wedge \neg H(x))$

1 α 1 1 0 α

1 β 1 1 0 β

1 γ 1 1 0 γ

atd. atd.

takže: 1

Tedy: úsudek není korektní, závěr nevyplývá z premis, neboť je možná taková interpretace, při níž všechny premisy (zde pouze jedna) jsou pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

6)

Co není černé, je bílé.

Co není bílé, je černé.

Formálně:

$\forall x (\neg \check{C}(x) \rightarrow B(x))$

$\forall x (\neg B(x) \rightarrow \check{C}(x))$

Nechť:

$U = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \gamma$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0):

proto např.: $\mathfrak{I}(\check{C}) = \{\alpha, \beta\}$, $\mathfrak{I}(B) = \emptyset$

$\forall x (\neg B(x) \rightarrow \check{C}(x))$

0 1 α 0 0 α

0 1 β 0 0 β

1 0 γ 0 0 γ

0

b) Interpretace premisy (chceme, aby 1):

$\forall x (\neg \check{C}(x) \rightarrow B(x))$

1 0 α 1 1 α

1 0 β 1 1 β

1 0 γ 0 0 γ

takže: 0

Tedy: úsudek je korektní, závěr vyplývá z premis, neboť není možná taková interpretace, při níž všechny premisy (zde pouze jedna) jsou pravdivé a závěr přitom nepravdivý. (Pozn.: vyplývání je platné oběma směry.)

7)

Co není černé, je bílé.

Co je černé, není bílé.

Formálně:

$\forall x (\neg \check{C}(x) \rightarrow B(x))$

$\forall x (\check{C}(x) \rightarrow \neg B(x))$

Nechť:

$U = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \beta$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0):

proto např.: $\mathfrak{I}(\check{C}) = \{\alpha, \beta\}$, $\mathfrak{I}(B) = \{\beta, \gamma\}$

$\forall x (\check{C}(x) \rightarrow \neg B(x))$

1 α 1 1 0 α

1 β 0 0 1 β

0 γ 1 0 1 γ

0

b) Interpretace premisy (chceme, aby 1):

$\forall x (\neg \check{C}(x) \rightarrow B(x))$

0 1 α 1 0 α

0 1 β 1 1 β

1 0 γ 1 1 γ

takže: 1

Tedy: úsudek není korektní, závěr nevyplývá z premis, neboť je možná taková interpretace, při níž všechny premisy (zde pouze jedna) jsou pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

8)

Jsou-li všechna prvočísla lichá, tak 2 není prvočíslo.

2 je prvočíslo.

Některá prvočísla nejsou lichá.

Formálně:

$$\forall x ((P(x) \rightarrow L(x)) \rightarrow \neg P(2))$$

$$P(2)$$

$$\exists x (P(x) \wedge \neg L(x))$$

Nechť:

$$U = \{1, 2, 3, \dots\} \text{ (tj. přirozená čísla)}$$

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = {}_3$$

$$\mathfrak{I}(2) = S(2) = {}_2$$

a) Interpretace druhé premisy (chceme, aby 1): proto: $\mathfrak{I}(P) = \{2, \dots\}$

$$P(2)$$

$$1 \quad {}_2$$

b) Interpretace závěru (chceme, aby 0, tj. že všechna prvočísla jsou lichá):

$$\text{proto: } \mathfrak{I}(L) = \{2, \dots\}$$

$$\exists x (P(x) \wedge \neg L(x))$$

$$1 \quad {}_2 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad {}_2$$

$$0$$

c) Interpretace první premisy (chceme, aby 1; zatím se nezajímáme o $\mathfrak{I}(P(x))$ či $\mathfrak{I}(L(x))$ pro jiná individua než 2, riziková je jen dvojka:

$$\forall x ((P(x) \rightarrow L(x)) \rightarrow \neg P(2))$$

$$1 \quad {}_2 \quad 1 \quad 1 \quad {}_2 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad {}_2$$

takže: 0

Tedy: úsudek je korektní, závěr vyplývá z premis, neboť není možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

9)

Jsou-li všechna prvočísla lichá, tak 2 není prvočíslo.

Některá prvočísla nejsou lichá.

Formálně:

$$\forall x ((P(x) \rightarrow L(x)) \rightarrow \neg P(2))$$

$$\exists x (P(x) \wedge \neg L(x))$$

Nechť:

$$U = \{1, 2, 3, \dots\} \text{ (tj. přirozená čísla)}$$

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = {}_3$$

$$\mathfrak{I}(2) = S(2) = {}_2$$

a) Interpretace první premisy (chceme, aby 1, proto nesmí ani jednou nastat $1 \rightarrow 0$, protože celá premisa by byla 0); zatím se nezajímáme o $\mathfrak{I}(P(x))$ či $\mathfrak{I}(L(x))$ pro jiná individua než 2, riziková je jen dvojka: proto: $\mathfrak{I}(P) = \{2, \dots\}$, $\mathfrak{I}(L) = \{2, \dots\}$

$$\forall x ((P(x) \rightarrow L(x)) \rightarrow \neg P(2))$$

$$0 \quad {}_2 \quad 1 \quad 1 \quad {}_2 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad {}_2$$

takže: 1

b) Interpretace závěru (chceme, aby 0, tj. že všechna prvočísla jsou lichá):

$$\exists x (P(x) \wedge \neg L(x))$$

$$0 \quad {}_2 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad {}_2$$

$$0$$

Tedy: úsudek není korektní, závěr nevyplývá z premis, neboť je možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

- je třeba vyjít od závěru, např. $\mathfrak{I}(P) = \{\text{bez } 1, 3, \text{ ale obsahuje } 2\}$, $\mathfrak{I}(L) = \{\text{bez } 1, \text{ ale } 2 \text{ a } 3\}$

10)

Žádný narkoman není policistou.

Každý dealer je narkoman.

Karel je dealer.

Karel není policistou.

Formálně:

$$\forall x (N(x) \rightarrow \neg P(x))$$

$$\forall x (D(x) \rightarrow N(x))$$

$$D(k)$$

$$\neg P(k)$$

Nechť:

$$U = \{\alpha, \beta, \dots, \kappa, \dots\}$$

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \beta$$

$$\mathfrak{I}(k) = S(k) = \kappa$$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0):

proto: $\mathfrak{I}(P) = \{\kappa, \dots\}$

$$\neg P(k)$$

$$0 \quad 1 \quad \kappa$$

b) Interpretace třetí premisy (chceme, aby 1):

proto: $\mathfrak{I}(D) = \{\kappa, \dots\}$

$$D(k)$$

$$1 \quad \kappa$$

c) Interpretace druhé premisy (chceme, aby 1, proto nesmí ani jednou nastat $1 \rightarrow 0$, protože celá premisa by byla 0); zatím se nezajímáme o $\mathfrak{I}(D(x))$ či $\mathfrak{I}(N(x))$ pro jiná individua než κ :

proto: $\mathfrak{I}(N) = \{\kappa, \dots\}$

$$\forall x (D(x) \rightarrow N(x))$$

1 κ 1 1 κ

aby: 1

d) Interpretace první premisy (chceme, aby 1; ale musíme spočítat podle již získaných interpretací predikátových symbolů):

$$\forall x (N(x) \rightarrow \neg P(x))$$

zatím se nezajímáme o $\mathfrak{I}(N(x))$ či $\mathfrak{I}(P(x))$ pro jiná individua než κ

1 κ 0 0 1 κ

takže: 0

Tedy: úsudek je korektní, závěr vyplývá z premis, neboť není možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý. (Rychlý postup: a) $\mathfrak{I}(P)=U$, aby byl závěr nepravdivý, b) $\mathfrak{I}(D)=U$, aby třetí premisa byla pravdivá, c) $\mathfrak{I}(N)=U$, aby druhá premisa byla pravdivá, d) následkem je první premisa nepravdivá; tudíž úsudek je korektní.)

Pozn.: Úsudek lze ověřit Vennovými diagramy.

12.3 Příklady – jednoduché úsudky s binárním predikátem

Pomocí sémantické metody, tedy na základě definice vyplývání a definice interpretace, určete platnost následujících úsudků:

1)

Markéta má ráda pouze matematiky.

Petr je matematik.

Markéta má ráda Petra.

Formálně:

$$\forall x (R(m,x) \rightarrow M(x))$$

$M(p)$

$R(m,p)$

Nechť:

$U = \{\mu, \pi\}$ (tj. Markéta, Petr)

$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \pi$

$\mathfrak{I}(m) = S(m) = \mu$

$\mathfrak{I}(p) = S(p) = \pi$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0):

proto: $\mathfrak{I}(R) = \{\langle \mu, \pi \rangle\}$

$R(m, p)$

0 $\mu \pi$

b) Interpretace druhé premisy (chceme, aby 1):

proto: $\mathfrak{I}(M) = \{\pi\}$

$M(p)$

1 π

c) Interpretace první premisy (chceme, aby 1; ale musíme spočítat podle již získaných interpretací predikátových symbolů):

$\forall x (R(m, x) \rightarrow M(x))$

0 $\mu \mu$ 1 0 μ

0 $\mu \pi$ 1 1 π

1

Tedy: úsudek není korektní, závěr nevyplývá z premis, neboť je možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý. (Rychlý postup: a) $\mathfrak{I}(R) = \emptyset$, aby byl závěr nepravdivý, b) a dále první premisa pravdivá, c) $\mathfrak{I}(M) = \{\pi\}$ či obecně U , proto druhá premisa také pravdivá; tudíž není korektní.)

2)

Markéta má ráda všechny matematiky.

Petr je matematik.

Markéta má ráda Petra.

Formálně:

$\forall x (M(x) \rightarrow R(m, x))$

$M(p)$

$R(m,p)$

Nechť:

$U = \{\mu, \pi\}$ (tj. Markéta, Petr)

$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \pi$

$\mathfrak{I}(m) = S(m) = \mu$

$\mathfrak{I}(p) = S(p) = \pi$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0):

proto: $\mathfrak{I}(R) = \{\langle \mu, \pi \rangle\}$

$R(m,p)$

0 $\mu \pi$

b) Interpretace druhé premisy (chceme, aby 1):

proto: $\mathfrak{I}(M) = \{\pi\}$

$M(p)$

1 π

c) Interpretace první premisy (chceme, aby 1; ale musíme spočítat podle již získaných interpretací predikátových symbolů):

$\forall x (M(x) \rightarrow R(m, x))$

0 μ 1 0 $\mu \mu$

1 π 0 0 $\mu \pi$

0

Tedy: úsudek je korektní, závěr vyplývá z premis, neboť není možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý. (Rychlý postup: a) $\mathfrak{I}(R) = \emptyset$, aby byl závěr nepravdivý, b) avšak protože $\mathfrak{I}(M) \neq \emptyset$, aby druhá premisa byla pravdivá, c) tak první premisa nemůže být pravdivá; tudíž úsudek je korektní.)

3)

Markéta má ráda některé matematiky.

Petr je matematik.

Markéta má ráda Petra.

Formálně:

$$\exists x (R(m,x) \wedge M(x))$$

$$M(p)$$

$$R(m,p)$$

Nechť:

$$U=\{\mu,\pi\} \text{ (tj. Markéta, Petr)}$$

$$\mathfrak{I}(x)=v(x)=\pi$$

$$\mathfrak{I}(m)=S(m)=\mu$$

$$\mathfrak{I}(p)=S(p)=\pi$$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0):

$$\text{proto: } \mathfrak{I}(R)=\{<\mu,\pi>\}$$

$$R(m,p)$$

$$0 \quad \mu \quad \pi$$

b) Interpretace druhé premisy (chceme, aby 1):

$$\text{proto: } \mathfrak{I}(M)=\{\pi\}$$

$$M(p)$$

$$1 \quad \pi$$

c) Interpretace první premisy (chceme, aby 1; ale musíme spočítat podle již získaných interpretací predikátových symbolů):

$$\exists x (R(m,x) \wedge M(x))$$

$$0 \quad \mu \quad \mu \quad 0 \quad 0 \quad \mu$$

$$0 \quad \mu \quad \pi \quad 0 \quad 1 \quad \pi$$

$$0$$

Pozor: všimněme si, že první premisa by pravdivá být mohla (což chceme), pokud poněkud upravíme interpretaci R a M:

$$\mathfrak{I}'(R)=\{<\mu,\pi>, <\mu,\mu>\}$$

$$\mathfrak{I}'(M)=\{\pi,\mu\}$$

takže:

$$\exists x (R(m,x) \wedge M(x))$$

$$1 \quad \mu \quad \mu \quad 1 \quad 1 \quad \mu$$

$$0 \quad \mu \quad \pi \quad 0 \quad 1 \quad \pi$$

1

Tedy: úsudek není korektní, závěr nevyplývá z premis, neboť je možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

4)

Bára má ráda pouze vítěze.

Karel není vítěz.

Bára nemá ráda Karla.

Formálně:

$$\forall x (R(b,x) \rightarrow V(x))$$

$$\neg V(k)$$

$$\neg R(b,k)$$

Nechť:

$$U = \{\beta, \kappa, \pi\} \text{ (tj. Bára, Karel, Petr)}$$

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \pi$$

$$\mathfrak{I}(b) = S(b) = \beta$$

$$\mathfrak{I}(a) = S(a) = \alpha$$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0):

$$\text{proto: } \mathfrak{I}(R) = \{ \langle \beta, \kappa \rangle \}$$

$$\neg R(b,k)$$

$$0 \quad 1 \quad \beta \quad \kappa$$

b) Interpretace druhé premisy (chceme, aby 1):

$$\text{proto: } \mathfrak{I}(V) = \{ \kappa \}$$

$$\neg V(k)$$

$$1 \quad 0 \quad \kappa$$

c) Interpretace první premisy (chceme, aby 1; ale musíme spočítat podle již získaných interpretací predikátových symbolů):

$$\forall x (R(b, x) \rightarrow V(x))$$

$$0 \beta \beta \quad 1 \quad 0 \beta$$

$$1 \beta \kappa \quad 0 \quad 0 \kappa$$

$$0 \beta \pi \quad 1 \quad 1 \pi$$

$$0$$

Tedy: úsudek je korektní, závěr vyplývá z premis, neboť není možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý. (Rychlý postup: a) $\mathfrak{I}(R) \neq \emptyset$, aby byl závěr nepravdivý, b) následkem čehož bude první premisa pravdivá, c) $\mathfrak{I}(V) = \emptyset$, proto druhá premisa také pravdivá; tudíž úsudek je korektní.)

5)

Bára má ráda všechny vítěze.

Karel není vítěz.

Bára nemá ráda Karla.

Formálně:

$$\forall x (V(x) \rightarrow R(b, x))$$

$$\neg V(k)$$

$$\neg R(b, k)$$

Nechť:

$$U = \{\beta, \kappa, \pi\} \text{ (tj. Bára, Karel, Petr)}$$

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \pi$$

$$\mathfrak{I}(b) = S(b) = \beta$$

$$\mathfrak{I}(a) = S(a) = \alpha$$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0):

$$\text{proto: } \mathfrak{I}(R) = \{\langle \beta, \kappa \rangle\}$$

$$\neg R(b, k)$$

$$0 \quad 1 \quad \beta \quad \kappa$$

b) Interpretace druhé premisy (chceme, aby 1): proto: $\mathfrak{I}(V) = \{\kappa\}$

$$\neg V(k)$$

$$1 \quad 0 \quad \kappa$$

c) Interpretace první premisy (chceme, aby 1; ale musíme spočítat podle již získaných interpretací predikátových symbolů):

$$\forall x (V(x) \rightarrow R(b, x))$$

$$0 \quad \beta \quad 1 \quad 0 \quad \beta \quad \beta$$

$$0 \quad \kappa \quad 1 \quad 1 \quad \beta \quad \kappa$$

$$0 \quad \pi \quad 1 \quad 0 \quad \beta \quad \pi$$

$$1$$

Tedy: úsudek není korektní, závěr nevyplývá z premis, neboť je možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý. (Rychlý postup: a) $\mathfrak{I}(R) \neq \emptyset$, aby byl závěr nepravdivý, c) $\mathfrak{I}(V) = \emptyset$, aby druhá premisa byla pravdivá, c) následkem je první premisa také pravdivá; tudíž není korektní.)

6)

Bára má ráda některé vítěze.

Karel není vítěz.

Bára nemá ráda Karla.

Formálně:

$$\exists x (R(b, x) \wedge V(x))$$

$$\neg V(k)$$

$$\neg R(b, k)$$

Nechť:

$$U = \{\beta, \kappa, \pi\} \text{ (tj. Bára, Karel, Petr)}$$

$$\mathfrak{I}(x) = \pi$$

$$\mathfrak{I}(b) = S(b) = \beta$$

$$\mathfrak{I}(k) = S(k) = \kappa$$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0):

$$\text{proto: } \mathfrak{I}(R) = \{\langle \beta, \kappa \rangle\}$$

$$\neg R(b, k)$$

$$0 \quad 1 \quad \beta \quad \kappa$$

b) Interpretace druhé premisy (chceme, aby 1):

$$\text{proto: } \mathfrak{I}(V) = \{\kappa\}$$

$$\neg V(k)$$

$$1 \quad 0 \quad \kappa$$

c) Interpretace první premisy (chceme, aby 1; ale musíme spočítat podle již získaných interpretací predikátových symbolů):

$$\exists x (R(b, x) \wedge V(x))$$

$$0 \quad \beta \quad \beta \quad 0 \quad 0 \quad \beta$$

$$1 \quad \beta \quad \kappa \quad 0 \quad 0 \quad \kappa$$

$$0 \quad \beta \quad \pi \quad 0 \quad 1 \quad \pi$$

$$0$$

Pozor: všimněme si, že první premisa by pravdivá být mohla (což chceme), pokud upravíme interpretaci R a V:

$$\mathfrak{I}'(R) = \{\langle \beta, \kappa \rangle, \langle \beta, \pi \rangle\}$$

$$\mathfrak{I}'(V) = \{\kappa, \pi\}$$

takže:

$$\exists x (R(b, x) \wedge V(x))$$

$$0 \quad \beta \quad \beta \quad 0 \quad 0 \quad \beta$$

$$1 \quad \beta \quad \kappa \quad 0 \quad 0 \quad \kappa$$

$$1 \quad \beta \quad \pi \quad 1 \quad 1 \quad \pi$$

$$1$$

Tedy: úsudek není korektní, závěr nevyplývá z premis, neboť je možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

7)

Gabriela má ráda pouze Verdiho opery.

Aida je Verdiho opera.

Gabriela má ráda Aidu.

Formálně:

$$\forall x (R(g,x) \rightarrow (V(x) \wedge O(x)))$$

$$V(a) \wedge O(a)$$

$$R(g,a)$$

Nechť:

$$U = \{\gamma, \alpha, v\} \text{ (tj. Gabriela, Aida, Nabucco)}$$

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = v$$

$$\mathfrak{I}(g) = S(g) = \gamma$$

$$\mathfrak{I}(a) = S(a) = \alpha$$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0):

$$\text{proto: } \mathfrak{I}(R) = \{ \langle v, \alpha \rangle \}$$

$$R(g,a)$$

$$0 \quad \gamma \quad \alpha$$

b) Interpretace druhé premisy (chceme, aby 1):

$$\text{proto: } \mathfrak{I}(V) = \{\alpha, v\}, \mathfrak{I}(O) = \{\alpha, v\}$$

$$V(a) \wedge O(a)$$

$$1 \quad \alpha \quad 1 \quad 1 \quad \alpha$$

c) Interpretace první premisy (chceme, aby 1; ale musíme spočítat podle již získaných interpretací predikátových symbolů):

$$\forall x (R(g,x) \rightarrow (V(x) \wedge O(x)))$$

$$0 \quad \gamma \quad \gamma \quad 1 \quad 0 \quad \gamma \quad 0 \quad 0 \quad \gamma$$

$$0 \quad \gamma \quad \alpha \quad 1 \quad 1 \quad \alpha \quad 1 \quad 1 \quad \alpha$$

$$0 \quad \gamma \vee \quad 1 \quad 1 \vee 1 \quad 1 \vee$$

1

Tedy: úsudek není korektní, závěr nevyplývá z premis, neboť je možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý. (Rychlý postup: *a*) $\mathfrak{I}(R)=\emptyset$, aby byl závěr nepravdivý, *b*) a dále první premisa pravdivá, *c*) obecně $\mathfrak{I}(O)=\mathfrak{I}(V)=U$, proto druhá premisa také pravdivá; tudíž není korektní.)

8)

Gabriela má ráda všechny Verdiho opery.

Aida je Verdiho opera.

Gabriela má ráda Aidu.

Formálně:

$$\forall x ((V(x) \wedge O(x)) \rightarrow R(g,x)$$

$$V(a) \wedge O(a)$$

$$R(g,a)$$

Nechť:

$$U=\{\gamma, \alpha, v\} \text{ (tj. Gabriela, Aida, Nabucco)}$$

$$\mathfrak{I}(x)=v(x)=\gamma$$

$$\mathfrak{I}(g)=S(g)=\gamma$$

$$\mathfrak{I}(a)=S(a)=\alpha$$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0):

$$\text{proto: } \mathfrak{I}(R)=\{\langle \gamma, \alpha \rangle\}$$

$$R(g,a)$$

$$0 \quad \gamma \alpha$$

b) Interpretace druhé premisy (chceme, aby 1):

$$\text{proto: } \mathfrak{I}(V)=\{\alpha, v\}, \quad \mathfrak{I}(O)=\{\alpha, v\}$$

$$V(a) \wedge O(a)$$

$$1 \quad \alpha \quad 1 \quad 1 \quad \alpha$$

c) Interpretace první premisy (chceme, aby 1; ale musíme spočítat podle již získaných interpretací predikátových symbolů):

$$\forall x ((V(x) \wedge O(x)) \rightarrow R(g, x))$$

$$0 \gamma \quad 0 \quad 0 \gamma \quad 1 \quad 0 \quad \gamma \gamma$$

$$1 \alpha \quad 1 \quad 1 \alpha \quad 0 \quad 0 \quad \gamma \alpha$$

$$1 \vee \quad 1 \quad 1 \vee \quad 0 \quad 0 \quad \gamma \vee$$

$$0$$

Tedy: úsudek je korektní, závěr vyplývá z premis, neboť není možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý. (Rychlý postup: a) $\mathfrak{I}(R) = \emptyset$, aby byl závěr nepravdivý, b) avšak protože $\mathfrak{I}(V) = \mathfrak{I}(O) \neq \emptyset$, aby druhá premisa byla pravdivá, c) tak první premisa nemůže být pravdivá; tudíž úsudek je korektní.)

9)

Gabriela má ráda některé Verdiho opery.

Aida je Verdiho opera.

Gabriela má ráda Aidu.

Formálně:

$$\exists x ((V(x) \wedge O(x)) \wedge R(g, x))$$

$$V(a) \wedge O(a)$$

$$R(g, a)$$

Nechť:

$$U = \{\gamma, \alpha, \vee\} \text{ (tj. Gabriela, Aida, Nabucco)}$$

$$\mathfrak{I}(x) = \nu(x) = \gamma$$

$$\mathfrak{I}(g) = \mathcal{S}(g) = \gamma$$

$$\mathfrak{I}(a) = \mathcal{S}(a) = \alpha$$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0):

$$\text{proto: } \mathfrak{I}(R) = \{\langle \gamma, \alpha \rangle\}$$

$$R(g, a)$$

$$0 \quad \gamma \alpha$$

b) Interpretace druhé premisy (chceme, aby 1): proto: $\mathfrak{I}(V)=\{\alpha, v\}$, $\mathfrak{I}(O)=\{\alpha, v\}$

$$V(a) \wedge O(a)$$

$$1 \quad \alpha \quad 1 \quad 1 \quad \alpha$$

c) Interpretace první premisy (chceme, aby 1; ale musíme spočítat podle již získaných interpretací predikátových symbolů):

$$\exists x (R(g, x) \wedge (V(x) \wedge O(x)))$$

$$0 \quad \gamma \gamma \quad 0 \quad 0 \quad \gamma \quad 0 \quad 0 \quad \gamma$$

$$0 \quad \gamma \alpha \quad 0 \quad 1 \quad \alpha \quad 1 \quad 1 \quad \alpha$$

$$0 \quad \gamma v \quad 0 \quad 1 \quad v \quad 1 \quad 1 \quad v$$

$$0$$

Pozor: všimněme si, že první premisa by pravdivá být mohla (což chceme), pokud poněkud upravíme interpretaci R:

$$\mathfrak{I}'(R)=\{<\alpha, \alpha>, <\gamma, v>\}$$

$$\mathfrak{I}'(V)=\mathfrak{I}(V)=\{\alpha, v\}$$

$$\mathfrak{I}'(O)=\mathfrak{I}(O)=\{\alpha, v\}$$

takže:

$$\exists x (R(g, x) \wedge (V(x) \wedge O(x)))$$

$$0 \quad \gamma \gamma \quad 0 \quad 0 \quad \gamma \quad 0 \quad 0 \quad \gamma$$

$$0 \quad \gamma \alpha \quad 0 \quad 1 \quad \alpha \quad 1 \quad 1 \quad \alpha$$

$$1 \quad \gamma v \quad 1 \quad 1 \quad v \quad 1 \quad 1 \quad v$$

$$1$$

Tedy: úsudek není korektní, závěr nevyplývá z premis, neboť je možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

10)

Každý, koho má Markéta ráda, je voják nebo inženýr.

Karel není inženýr.

Má-li Markéta ráda Karla, pak je Karel voják.

Formálně:

$$\forall x (R(m,x) \rightarrow (V(x) \vee I(x)))$$

$$\neg I(k)$$

$$R(m,k) \rightarrow V(k)$$

Nechť:

$$U = \{\mu, \kappa\} \text{ (tj. Markéta, Karel)}$$

$$\mathfrak{I}(x) = \nu(x) = \mu$$

$$\mathfrak{I}(m) = S(m) = \mu$$

$$\mathfrak{I}(k) = S(k) = \kappa$$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0):

proto: $\mathfrak{I}(R) = \{\langle \mu, \kappa \rangle\}$, $\mathfrak{I}(V) = \{\kappa\}$

$$R(m,k) \rightarrow V(k)$$

$$1 \quad \mu \quad \kappa \quad 0 \quad 0 \quad \kappa$$

b) Interpretace druhé premisy (chceme, aby 1):

proto: $\mathfrak{I}(I) = \{\kappa\}$

$$\neg I(k)$$

$$1 \quad 0 \quad \kappa$$

c) Interpretace první premisy (chceme, aby 1; ale musíme spočítat podle již získaných interpretací predikátových symbolů):

$$\forall x (R(m,x) \rightarrow (V(x) \vee I(x)))$$

$$0 \quad \mu \quad \mu \quad 1 \quad 0 \quad \mu \quad 0 \quad 0 \quad \mu$$

$$1 \quad \mu \quad \kappa \quad 0 \quad 0 \quad \kappa \quad 0 \quad 0 \quad \kappa$$

$$0$$

Tedy: úsudek je korektní, závěr vyplývá z premis, neboť není možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

11)

Každý, kdo má rád Evu, má rád Marii.

Žádný student nemá rád Marii.

Karel je student.

Karel nemá rád Evu.

Formálně:

$$\forall x (R(x,e) \rightarrow R(x,m))$$

$$\forall x (S(x) \rightarrow \neg R(x,m))$$

$$S(k)$$

$$\neg R(k,e)$$

Nechť:

$$U = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \alpha$$

$$\mathfrak{I}(e) = S(e) = \varepsilon$$

$$\mathfrak{I}(m) = S(m) = \mu$$

$$\mathfrak{I}(k) = S(k) = \kappa$$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0, proto např.:

$$\mathfrak{I}(R) = \{ \langle \kappa, \varepsilon \rangle \}$$

$$\neg R(k,e)$$

$$0 \quad 1 \quad \kappa \quad \varepsilon$$

b) Interpretace třetí premisy (chceme, aby 1):

proto např.: $\mathfrak{I}(S) = \{ \kappa \}$

$$S(k)$$

$$\kappa$$

aby: 1

c) Interpretace druhé premisy (chceme, aby 1, proto nesmí být ani jednou $1 \rightarrow 0$; zatím se nezajímáme o jiné hodnoty x , než κ):

proto $\mathfrak{I}(R) = \{ \langle \kappa, \varepsilon \rangle, \langle \kappa, \mu \rangle \}$

$$\forall x (S(x) \rightarrow \neg R(x,m))$$

$$1 \quad \kappa \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad \kappa \quad \mu$$

aby: 1

d) Interpretace první premisy (chceme, aby 1, proto nesmí být ani jednou $1 \rightarrow 0$; zatím se nezajímáme o jiné hodnoty x , než κ):

$$\forall x (R(x,e) \rightarrow R(x,m))$$

$$1 \quad \kappa \quad \varepsilon \quad 0 \quad 0 \quad \kappa \quad \mu$$

takže: 0

Tedy: úsudek je korektní, závěr vyplývá z premis, neboť není možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

12)

Každý, kdo má rád Marii, má rád Evu.

Žádný student nemá rád Marii.

Karel je student.

Karel nemá rád Evu.

Formálně:

$$\forall x (R(x,m) \rightarrow R(x,e))$$

$$\forall x (S(x) \rightarrow \neg R(x,m))$$

$$S(k)$$

$$\neg R(k,e)$$

Nechť:

$$U = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \alpha$$

$$\mathfrak{I}(e) = S(e) = \varepsilon$$

$$\mathfrak{I}(m) = S(m) = \mu$$

$$\mathfrak{I}(k) = S(k) = \kappa$$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0, proto např.:

$$\mathfrak{I}(R) = \{ \langle \kappa, \varepsilon \rangle \}$$

$$\neg R(k,e)$$

$$0 \quad 1 \quad \kappa \quad \varepsilon$$

b) Interpretace třetí premisy (chceme, aby 1): proto např.: $\mathfrak{I}(S) = \{\kappa\}$

$S(\kappa)$

κ

aby: 1

c) Interpretace druhé premisy (chceme, aby 1, proto nesmí být ani jednou $1 \rightarrow 0$; zatím se nezajímáme o jiné hodnoty x , než κ): proto $\mathfrak{I}(R) = \{\langle \kappa, \epsilon \rangle, \langle \kappa, \mu \rangle\}$

$\forall x (S(x) \rightarrow \neg R(x, m))$

1 κ 1 1 0 $\kappa \mu$

aby: 1

d) Interpretace první premisy (chceme, aby 1, proto nesmí být ani jednou $1 \rightarrow 0$; zatím se nezajímáme o jiné hodnoty x , než κ):

$\forall x (R(x, m) \rightarrow R(x, e))$

0 $\kappa \mu$ 1 1 $\kappa \epsilon$

takže: 1

Tedy: úsudek není korektní, závěr nevyplývá z premis, neboť je možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

12.4 Příklady – úsudky, které připomínají kategorické sylogismy

Pomocí sémantické metody (na základě definice vyplývání a definice interpretace) určete platnost následujících úsudků:

1)

Všichni učitelé jsou vysokoškoláci.

Všichni učitelé jsou vychovatelé.

Někteří vysokoškoláci jsou vychovatelé.

Formálně:

$\forall x (U(x) \rightarrow V(x))$

$\forall x (U(x) \rightarrow V'(x))$

$$\exists x (V(x) \wedge V'(x))$$

Nechť:

$$U = \{\alpha, \beta, \gamma \dots\}$$

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \gamma$$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0):

proto např.: $\mathfrak{I}(V') = \emptyset$

$$\exists x (V(x) \wedge V'(x))$$

protože vždy $\mathfrak{I}(V'(x)) = 0$, celá formule je vždy 0

takže: 0

b) Interpretace druhé premisy (chceme, aby 1, proto nesmí ani jednou nastat $1 \rightarrow 0$, protože celá premisa by byla 0):

proto např.: $\mathfrak{I}(U) = \emptyset$

$$\forall x (U(x) \rightarrow V'(x))$$

protože vždy $\mathfrak{I}(U(x)) = 0$, celá formule je vždy 1

takže: 1

c) Interpretace první premisy (chceme, aby 1; ale musíme spočítat podle již získaných interpretací predikátových symbolů):

$$\forall x (U(x) \rightarrow V(x))$$

protože vždy $\mathfrak{I}(U(x)) = 0$, celá formule je vždy 1

takže: 1

Tedy: úsudek není korektní, závěr nevyplývá z premis, neboť je možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý (nemusí být totiž společný prvek množin V a V'). (Uváděli jsme rychlý postup ověření.) Pozn.: Úsudek lze ověřit Vennovými diagramy.

2)

Některé zuby jsou bílé.

Všechno bílé je krásné.

Něco bílého nejsou zuby.

Formálně:

$$\exists x (Z(x) \wedge B(x))$$

$$\forall x (B(x) \rightarrow K(x))$$

$$\exists x (B(x) \wedge \neg Z(x))$$

Nechť:

$$U = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$$

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \alpha$$

a) Interpretace první premisy (chceme, aby 1) s ohledem na závěr:

$$\text{proto např.: } \mathfrak{I}(Z) = \mathfrak{I}(B) = U$$

$$\exists x (Z(x) \wedge B(x))$$

$$1 \alpha \ 1 \ 1 \alpha$$

$$1 \beta \ 1 \ 1 \beta$$

$$1 \gamma \ 1 \ 1 \gamma$$

aby: 1

b) Interpretace závěru (chceme, aby 0):

$$\exists x (B(x) \wedge \neg Z(x))$$

$$1 \alpha \ 1 \ 0 \ 1 \alpha$$

$$1 \beta \ 1 \ 0 \ 1 \beta$$

$$1 \gamma \ 1 \ 0 \ 1 \gamma$$

takže: 0

b) Interpretace druhé premisy (chceme, aby 1, proto nesmí ani jednou nastat $1 \rightarrow 0$, protože

celá premisa by byla 0):

$$\text{proto: } \mathfrak{I}(K) = U$$

$$\forall x (B(x) \rightarrow K(x))$$

$$1 \alpha \ 1 \ 1 \alpha$$

$$1 \beta \ 1 \ 1 \beta$$

$$1 \gamma \ 1 \ 1 \gamma$$

takže: 1

Tedy: Úsudek není korektní, závěr nevyplývá z premis, neboť je možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý (vyplývá věta: Některé zuby jsou krásné).

3)

Žádní pečení holubi nelétají.

Vše, co létá, má křídla.

Něco, co má křídla, není pečený holub.

Formálně:

$$\forall x ((P(x) \wedge H(x)) \rightarrow \neg L(x))$$

$$\forall x (L(x) \rightarrow K(x))$$

$$\exists x (K(x) \wedge \neg (P(x) \wedge H(x)))$$

Nechť:

$$U = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \gamma$$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0, proto musí být pokaždé $0 \wedge 0$):

$$\text{proto: } \mathfrak{I}(P) = \mathfrak{I}(H) = U, \mathfrak{I}(K) = \emptyset$$

$$\exists x (K(x) \wedge \neg (P(x) \wedge H(x)))$$

$$0 \alpha \ 0 \ 0 \ 1 \alpha \ 1 \ 1 \ \alpha$$

$$0 \beta \ 0 \ 0 \ 1 \beta \ 1 \ 1 \ \beta$$

$$0 \gamma \ 0 \ 0 \ 1 \gamma \ 1 \ 1 \ \gamma$$

$$0$$

b) Interpretace první premisy (chceme, aby 1, nesmí být ani jednou $1 \rightarrow 0$):

$$\text{proto: } \mathfrak{I}(L) = \emptyset$$

$$\forall x ((P(x) \wedge H(x)) \rightarrow \neg L(x))$$

$$1 \ \alpha \ 1 \ 1 \ \alpha \ 1 \ 1 \ 0 \ \alpha$$

$$1 \beta \quad 1 1 \beta \quad 1 \quad 1 0 \beta$$

$$1 \gamma \quad 1 1 \gamma \quad 1 \quad 1 0 \gamma$$

aby: 1

b) Interpretace druhé premisy (chceme, aby 1):

$$\forall x (L(x) \rightarrow K(x))$$

$$0 \alpha \quad 1 \quad 0 \alpha$$

$$0 \beta \quad 1 \quad 0 \beta$$

$$0 \gamma \quad 1 \quad 0 \gamma$$

takže: 1

Tedy: úsudek není korektní, závěr nevyplývá z premis, neboť je možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

4)

Někteří psi štěkají.

Všichni psi jsou domestikovaní živočichové.

Někteří domestikovaní živočichové štěkají.

Formálně:

$$\exists x (P(x) \wedge \check{S}(x))$$

$$\forall x (P(x) \rightarrow (D(x) \wedge \check{Z}(x)))$$

$$\exists x ((D(x) \wedge \check{Z}(x)) \wedge \check{S}(x))$$

Nechť:

$$U = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \gamma$$

a) Interpretace první premisy (chceme, aby 1):

proto: $\mathfrak{I}(P) = \{\alpha\}$, $\mathfrak{I}(\check{S}) = \{\alpha\}$

$$\exists x (P(x) \wedge \check{S}(x))$$

$$1 \alpha \quad 1 \quad 1 \alpha$$

$$0 \beta \quad 0 \quad 0 \beta$$

$$0 \gamma \quad 0 \quad 0 \gamma$$

aby: 1

b) Interpretace druhé premisy (chceme, aby 1): proto: $\mathfrak{I}(D)=\{\alpha\}$, $\mathfrak{I}(\check{Z})=\{\alpha\}$

$$\forall x (P(x) \rightarrow (D(x) \wedge \check{Z}(x)))$$

$$1 \alpha \quad 1 \quad 1 \alpha \quad 1 \quad 1 \alpha$$

$$0 \beta \quad 1 \quad 0 \beta \quad 0 \quad 0 \beta$$

$$0 \gamma \quad 1 \quad 0 \gamma \quad 0 \quad 0 \gamma$$

aby: 1

c) Interpretace závěru (chceme, aby 0, proto musí být vždy $0 \wedge 0$):

$$\exists x ((D(x) \wedge \check{Z}(x)) \wedge \check{S}(x))$$

$$1 \alpha \quad 1 \quad 1 \alpha \quad 1 \quad 1 \alpha$$

$$0 \beta \quad 0 \quad 0 \beta \quad 0 \quad 0 \alpha$$

$$0 \gamma \quad 0 \quad 0 \gamma \quad 0 \quad 0 \alpha$$

takže: 1

Avšak mi chceme 0, proto zkusíme jinou interpretaci, aby závěr mohl být 0.

c') Interpretace závěru (chceme, aby 0, proto musí být vždy $0 \wedge 0$):

$$\text{proto: } \mathfrak{I}'(D)=\{\alpha\}, \mathfrak{I}'(\check{Z})=\{\alpha\}, \mathfrak{I}'(\check{S})=\{\beta\}$$

$$\exists x ((D(x) \wedge \check{Z}(x)) \wedge \check{S}(x))$$

$$1 \alpha \quad 1 \quad 1 \alpha \quad 0 \quad 0 \alpha$$

$$0 \beta \quad 0 \quad 0 \beta \quad 0 \quad 1 \alpha$$

$$0 \gamma \quad 0 \quad 0 \gamma \quad 0 \quad 0 \alpha$$

takže: 0

a') Interpretace první premisy (chceme, aby 1): proto: $\mathfrak{I}'(P)=\{\alpha, \beta\}$

$$\exists x (P(x) \wedge \check{S}(x))$$

$$1 \alpha \quad 0 \quad 0 \alpha$$

$$1 \beta \quad 1 \quad 1 \beta$$

$$0 \gamma \quad 0 \quad 0 \gamma$$

aby: 1

b') Interpretace druhé premisy (chceme, aby 1): proto: $\mathfrak{I}(D)=\{\alpha\}$, $\mathfrak{I}(\check{Z})=\{\alpha\}$

$$\forall x (P(x) \rightarrow (D(x) \wedge \check{Z}(x)))$$

$$1 \alpha \quad 1 \quad 1 \alpha \quad 1 \quad 1 \alpha$$

$$1 \beta \quad 0 \quad 0 \beta \quad 0 \quad 0 \beta$$

$$0 \gamma \quad 1 \quad 0 \gamma \quad 0 \quad 0 \gamma$$

takže: 0

Tedy: úsudek je korektní, závěr vyplývá z premis, neboť není možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

5)

Žádný pravoúhlý trojúhelník není pravidelný obrazec.

Každý rovnostranný trojúhelník je pravidelný obrazec.

Žádný rovnostranný trojúhelník není pravoúhlý trojúhelník.

Formálně:

$$\forall x ((P(x) \wedge T(x)) \rightarrow \neg(P'(x) \wedge O(x)))$$

$$\forall x ((R(x) \wedge T(x)) \rightarrow (P'(x) \wedge O(x)))$$

$$\forall x ((R(x) \wedge T(x)) \rightarrow \neg(P(x) \wedge T(x)))$$

Nechť:

$$U=\{\alpha, \beta, \gamma\}$$

$$\mathfrak{I}(x)=v(x)=\alpha$$

$$\mathfrak{I}(y)=v(y)=\beta$$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0, proto např.:

$$\mathfrak{I}(R)=\{\alpha\}, \mathfrak{I}(T)=\{\alpha\}, \mathfrak{I}(P)=\{\alpha\}$$

$$\forall x ((R(x) \wedge T(x)) \rightarrow \neg (P(x) \wedge T(x)))$$

$$1 \alpha \quad 1 \quad 1 \alpha \quad 0 \quad 0 \quad 1 \alpha \quad 1 \quad 1 \alpha$$

0

b) Interpretace první premisy (chceme, aby 1): proto např.: $\mathfrak{I}(P')=\emptyset$, $\mathfrak{I}(O)=U$

$$\forall x ((P(x) \wedge T(x)) \rightarrow \neg (P'(x) \wedge O(x)))$$

$$1 \alpha \ 1 \ 1 \alpha \ 1 \ 1 \ 1 \alpha \ 0 \ 1 \alpha$$

aby: 1

c) Interpretace druhé premisy (chceme aby 1):

$$\forall x ((R(x) \wedge T(x)) \rightarrow (P'(x) \wedge O(x)))$$

$$1 \alpha \ 1 \ 1 \alpha \ 0 \ 0 \alpha \ 0 \ 1 \alpha$$

takže: 0

Tedy: úsudek je korektní, závěr vyplývá z premis, neboť není možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý (není možné, aby při pravdivosti premis existoval takový rovnostranný trojúhelník, který by byl pravoúhlý).

12.5 Příklady - náročnější úsudky

Pomocí sémantické metody (na základě definice vyplývání a definice interpretace) určete platnost následujících úsudků:

1)

Všichni členové vedení jsou majiteli obligací nebo akcionáři.

Žádný člen vedení není zároveň majitel obligací i akcionář.

Všichni majitelé obligací jsou členy vedení.

Žádný majitel obligací není akcionář.

Formálně (zjednodušeně):

$$\forall x (\check{C}(x) \rightarrow (O(x) \vee A(x)))$$

$$\forall x (\check{C}(x) \rightarrow \neg (O(x) \wedge A(x)))$$

$$\forall x (O(x) \rightarrow \check{C}(x))$$

$$\forall x (O(x) \rightarrow \neg A(x))$$

Nechť:

$$U = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

$$\mathfrak{I}(x)=v(x)=\gamma$$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0, proto musí být aspoň jednou $1 \rightarrow 0$):

$$\text{proto např.: } \mathfrak{I}(O)=\mathfrak{I}(A)=\{\alpha\}$$

$$\forall x (O(x) \rightarrow \neg A(x))$$

$$1 \alpha \quad 0 \quad 0 \quad 1 \alpha$$

$$0 \beta \quad 1 \quad 1 \quad 0 \beta$$

$$0 \gamma \quad 1 \quad 1 \quad 0 \gamma$$

$$0$$

b) Interpretace třetí premisy (chceme, aby 1, proto nesmí být ani jednou $1 \rightarrow 0$):

$$\text{proto: } \mathfrak{I}(\check{C})=\{\alpha\}$$

$$\forall x (O(x) \rightarrow \check{C}(x))$$

$$1 \alpha \quad 1 \quad 1 \alpha$$

$$0 \beta \quad 1 \quad 0 \beta$$

$$0 \gamma \quad 1 \quad 0 \gamma$$

$$\text{aby: } 1$$

c) Interpretace druhé premisy (chceme, aby 1, proto nesmí být ani jednou $1 \rightarrow 0$):

$$\text{proto: } \mathfrak{I}(\check{C})=U$$

$$\forall x (\check{C}(x) \rightarrow \neg (O(x) \wedge A(x)))$$

$$1 \alpha \quad 1 \quad 0 \quad 1 \alpha \quad 1 \quad 1 \alpha$$

$$0 \beta \quad 1 \quad 1 \quad 0 \beta \quad 0 \quad 0 \beta$$

$$0 \gamma \quad 1 \quad 1 \quad 0 \gamma \quad 0 \quad 0 \gamma$$

$$\text{takže: } 0$$

d) Interpretace první premisy není potřeba, první premisa je nadbytečná (chceme, aby 1):

$$\forall x (\check{C}(x) \rightarrow (O(x) \vee A(x)))$$

$$1 \alpha \quad 1 \quad 1 \alpha \quad 1 \quad 1 \alpha$$

$$0 \beta \quad 1 \quad 0 \beta \quad 1 \quad 0 \beta$$

$$0 \gamma \quad 1 \quad 0 \gamma \quad 1 \quad 0 \gamma$$

$$\text{takže: } 1$$

Tedy: úsudek (jehož autorem je John Venn) je korektní, závěr vyplývá z premis, neboť není možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

Pozn.: Úsudek lze ověřit Vennovými diagramy.

2)

Nikdo z přítomných není lékař.

Každý pozvaný je přítomen.

Jestliže Petr zval, Karel je pozván.

Je-li Karel lékař, pak Petr nezval.

Formálně:

$$\forall x (P(x) \rightarrow \neg L(x))$$

$$\forall x (P'(x) \rightarrow P(x))$$

$$Z(p) \rightarrow P'(k)$$

$$L(p) \rightarrow \neg Z(k)$$

Nechť:

$$U = \{\kappa, \pi\} \text{ (tj. Karel, Petr)}$$

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \pi$$

$$\mathfrak{I}(k) = S(k) = \kappa$$

$$\mathfrak{I}(p) = S(p) = \pi$$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0):

$$\text{proto: } \mathfrak{I}(L) = \{\kappa\}, \mathfrak{I}(Z) = \{\pi\}$$

$$L(k) \rightarrow \neg Z(p)$$

$$1 \ \kappa \ 0 \ 0 \ 1 \ \pi$$

b) Interpretace třetí premisy (chceme, aby 1, proto ani jednou nesmí být $1 \rightarrow 0$):

$$\text{proto: } \mathfrak{I}(P') = \{\kappa\}$$

$$Z(p) \rightarrow P'(k)$$

$$1 \ \pi \ 1 \ 1 \ \kappa$$

c) Interpretace druhé premisy (chceme, aby 1, proto ani jednou nesmí být $1 \rightarrow 0$; o jinou valuaci pro x , totiž π se zatím nezajímáme):

proto: $\mathfrak{I}(P) = \{\kappa\}$

$$\forall x (P'(x) \rightarrow P(x))$$

$$1 \quad \kappa \quad 1 \quad 1 \quad \kappa$$

aby: 1

d) Interpretace první premisy (chceme, aby 1; ale musíme spočítat podle již získaných interpretací predikátových symbolů; zatím se nezajímáme o jiné hodnoty x , než π):

$$\forall x (P(x) \rightarrow \neg L(x))$$

$$1 \quad \kappa \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad \kappa$$

takže: 0

Tedy: úsudek je korektní, závěr vyplývá z premis, neboť není možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

3)

Vše se vyvíjí nebo mění.

Co se vyvíjí, to se mění.

Vše se vyvíjí nebo vše se mění.

Formálně:

$$\forall x (V(x) \vee M(x))$$

$$\forall x (V(x) \rightarrow M(x))$$

$$\forall x V(x) \vee \forall x M(x)$$

Nechť:

$$U = \{\alpha, \beta\}$$

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \alpha$$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0):

proto např.: $\mathfrak{I}(V) = \{\alpha\}$, $\mathfrak{I}(M) = \{\beta\}$

$$\forall x V(x) \vee \forall x M(x)$$

$$1 \alpha \quad 0 \alpha$$

$$0 \beta \quad 1 \beta$$

$$0 \quad 0$$

$$0$$

b) Interpretace první premisy (chceme, aby 1):

$$\forall x (V(x) \vee M(x))$$

$$1 \alpha \quad 1 \quad 0 \quad \alpha$$

$$0 \beta \quad 1 \quad 1 \quad \beta$$

aby: 1

c) Interpretace druhé premisy (chceme, aby 1, nesmí být ani jednou $1 \rightarrow 0$):

$$\forall x (V(x) \rightarrow M(x))$$

$$1 \alpha \quad 0 \quad 0 \quad \alpha$$

$$0 \beta \quad 1 \quad 1 \quad \beta$$

takže: 0

Tedy: úsudek je korektní, závěr vyplývá z premis, neboť není možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

4)

Žádné prvočíslo není dělitelné čtyřmi.

Některá prvočísla jsou sudá.

Některá sudá čísla nejsou dělitelná čtyřmi.

Formálně:

$$\forall x (P(x) \rightarrow \neg D(x, 4))$$

$$\exists x (P(x) \wedge S(x))$$

$$\exists x (S(x) \wedge \neg D(x, 4))$$

Nechť:

$$U = \{1, 2, 3, 4, 8\}$$

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) =_3$$

$$\mathfrak{I}(4) = S(4) =_4$$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0):

proto např.: $\mathfrak{I}(S) = \{8\}$, $\mathfrak{I}(D) = \{<_8, 4>\}$

$$\exists x (S(x) \wedge \neg D(x, 4))$$

$$0_1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 4$$

$$0_2 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 2 \quad 4$$

$$0_3 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 3 \quad 4$$

$$0_4 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 4 \quad 4$$

$$1_8 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 8 \quad 4$$

tedy: 0

b) Interpretace první premisy (chceme, aby 1):

proto např.: $\mathfrak{I}(P) = \emptyset$ (hlavně bez 8)

$$\forall x (P(x) \rightarrow \neg D(x, 4))$$

$$0_1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 4$$

$$0_2 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 2 \quad 4$$

$$0_3 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 3 \quad 4$$

$$0_4 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 4 \quad 4$$

$$0_8 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 8 \quad 4$$

aby: 1

c) Interpretace druhé premisy (chceme, aby 1):

$$\exists x (P(x) \wedge S(x))$$

$$0_1 \quad 0 \quad 0 \quad 1$$

$$0_2 \quad 0 \quad 0 \quad 2$$

$$0_3 \quad 0 \quad 0 \quad 3$$

$$0_4 \quad 0 \quad 0 \quad 4$$

$$0_8 \quad 0 \quad 1 \quad 8$$

takže: 0

Tedy: úsudek je korektní, závěr vyplývá z premis, neboť není možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

5)

Žádný učený z nebe nespádl.

Každý filosof je učený.

Žádný filosof z nebe nespádl.

Formálně:

$$\forall x (U(x) \rightarrow \forall y (N(y) \rightarrow \neg S(x,y)))$$

$$\forall x (F(x) \rightarrow U(x))$$

$$\forall x (F(x) \rightarrow \forall y (N(y) \rightarrow \neg S(x,y)))$$

Nechť:

$$U = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \alpha$$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0, proto musí být aspoň jednou $1 \rightarrow 0$):

$$\text{proto např. : } \mathfrak{I}(F) = \{\alpha\}, \mathfrak{I}(S) = \emptyset, \mathfrak{I}(N) = \emptyset$$

$$\forall x (F(x) \rightarrow \forall y (N(y) \rightarrow \neg S(x,y)))$$

$$1 \alpha \ 0 \quad 0 \alpha \ 0 \ 1 \ 0$$

$$0 \beta \ 1 \ 0 \ 0 \beta \ 0 \ 1 \ 0$$

$$0 \gamma \ 1 \quad 0 \gamma \ 0 \text{ atd. (nevypisujeme zde dílčí interpretace } S(x,y))$$

0

b) Interpretace druhé premisy (chceme, aby 1): proto: $\mathfrak{I}(U) = \{\alpha\}$

$$\forall x (F(x) \rightarrow U(x))$$

$$1 \alpha \ 1 \ 1 \alpha$$

$$0 \beta \ 1 \ 0 \beta$$

$$0 \gamma \ 1 \ 0 \gamma$$

aby: 1

c) Interpretace první premisy (chceme, aby 1):

$$\forall x (U(x) \rightarrow \forall y (N(y) \rightarrow \neg S(x,y)))$$

$$1 \alpha \quad 0 \quad 0 \alpha \quad 0 \quad 1 \quad 0$$

$$0 \beta \quad 1 \quad 0 \beta \quad 0 \quad 1 \quad 0$$

$$0 \gamma \quad 1 \quad 0 \gamma \quad 0 \quad 1 \quad \text{atd. (nevypisujeme zde dílčí interpretace $S(x,y)$)}$$

takže: 0

Tedy: úsudek je korektní, závěr vyplývá z premis, neboť není možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

6)

Kdo zná Marii i Jiřího, ten Marii lituje.

Někteří nelitují Marii, ačkoliv ji znají.

Někdo zná Marii, ale ne Jiřího.

Formálně:

$$\forall x ((Z(x,m) \wedge Z(x,j)) \rightarrow L(x,m))$$

$$\exists x (\neg L(x,m) \wedge Z(x,m))$$

$$\exists x (Z(x,m) \wedge \neg Z(x,j))$$

Nechť:

$$U = \{\alpha, \iota, \mu\} \text{ (tj. Adam, Jiří, Markéta)}$$

$$\mathfrak{I}(x) = \nu(x) = \alpha$$

$$\mathfrak{I}(j) = \mathfrak{S}(j) = \iota$$

$$\mathfrak{I}(m) = \mathfrak{S}(m) = \mu$$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0; zatím se nezajímáme o $\mathfrak{I}(Z(x,m))$ či $\mathfrak{I}(Z(x,j))$ pro jiná individua než α):

$$\text{proto: } \mathfrak{I}(Z) = \{\langle \alpha, \mu \rangle, \langle \alpha, \iota \rangle\}$$

$$\exists x (Z(x,m) \wedge \neg Z(x,j))$$

$$1 \alpha \mu \quad 0 \quad 0 \quad 1 \alpha \iota$$

0

b) Interpretace druhé premisy (chceme, aby 1): proto: $\mathfrak{I}(L) = \{\langle \alpha, \mu \rangle\}$

$$\exists x (\neg L(x, m) \wedge Z(x, m))$$

$$1 \ 0 \ \alpha \ \mu \quad 1 \ 1 \ \alpha \ \mu$$

aby: 1

c) Interpretace první premisy (chceme, aby 1; ale musíme spočítat podle již získaných interpretací predikátových symbolů; zatím se nezajímáme o jiné hodnoty x , než α):

$$\forall x ((Z(x, m) \wedge Z(x, j)) \rightarrow L(x, m))$$

$$1 \ \alpha \ \mu \quad 1 \ 1 \ \alpha \ 1 \quad 0 \ 0 \ \alpha \ \mu$$

takže: 0

Tedy: úsudek je korektní, závěr vyplývá z premis, neboť není možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

8)

Každý, kdo má rád Jiřího, bude spolupracovat s Milanem.

Milan nekamarádí s nikým, kdo kamarádí s Láďou.

Petr bude spolupracovat pouze s kamarády Karla.

Jestliže Karel kamarádí s Láďou, nemá Petr rád Jiřího.

Formálně:

$$\forall x (R(x, j) \rightarrow S(x, m))$$

$$\forall x (K(x, l) \rightarrow \neg K(m, x))$$

$$\forall x (S(p, x) \rightarrow K(x, k))$$

$$K(k, l) \rightarrow \neg R(p, j)$$

Nechť:

$$U = \{1, \kappa, \lambda, \mu\} \text{ (tj. Jiří, Karel, Láďa, Milan, Petr)}$$

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \kappa$$

$$\mathfrak{I}(j) = S(j) = 1$$

$$\mathfrak{I}(k)=S(k)=\kappa$$

$$\mathfrak{I}(l)=S(l)=\lambda$$

$$\mathfrak{I}(m)=S(m)=\mu$$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0): proto: $\mathfrak{I}(R)=\{\langle \pi, \iota \rangle\}$, $\mathfrak{I}(K)=\{\langle \kappa, \lambda \rangle\}$

$$K(k, l) \rightarrow \neg R(p, j))$$

$$1 \ \kappa \ \lambda \ 0 \ 0 \ 1 \ \pi \ \iota$$

b) Interpretace první premisy (chceme, aby 1, proto nesmí být ani jednou $1 \rightarrow 0$; zatím se nezajímáme o jiné hodnoty x , než π): proto: $\mathfrak{I}(S)=\{\langle \pi, \mu \rangle\}$

$$\forall x (R(x, j) \rightarrow S(x, m))$$

$$1 \ \pi \ \iota \ 1 \ 1 \ \pi \ \mu$$

aby: 1

c) Interpretace třetí premisy (chceme, aby 1, proto nesmí být ani jednou $1 \rightarrow 0$; zatím se nezajímáme o jiné hodnoty x , než μ): proto: $\mathfrak{I}(K)=\{\langle \mu, \kappa \rangle, \langle \kappa, \lambda \rangle\}$

$$\forall x (S(p, x) \rightarrow K(x, k))$$

$$1 \ \pi \ \mu \ 1 \ 1 \ \mu \ \kappa$$

aby: 1

d) Interpretace druhé premisy (chceme, aby 1, proto nesmí být ani jednou $1 \rightarrow 0$; zatím se nezajímáme o jiné hodnoty x , než κ): proto: $\mathfrak{I}(K)=\{\langle \mu, \kappa \rangle, \langle \kappa, \lambda \rangle\}$

$$\forall x (K(x, l) \rightarrow \neg K(m, x))$$

$$1 \ \kappa \ \lambda \ 0 \ 0 \ 1 \ \mu \ \kappa$$

aby: 0

Tedy: úsudek je korektní, závěr vyplývá z premis, neboť není možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

8)

Žádná kniha v mé knihovně není napínavá.

Všechny detektivky jsou napínavé.

Žádná kniha v mé knihovně není detektivka.

Formálně („BK“ je „být v knihovně“):

$$\forall x ((K(x) \wedge \exists y (K'(y) \wedge BK(x,y))) \rightarrow \neg N(x))$$

$$\forall x (D(x) \rightarrow N(x))$$

$$\forall x ((K(x) \wedge \exists y (K'(y) \wedge BK(x,y))) \rightarrow \neg D(x))$$

Nechť:

$$U = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \alpha$$

$$\mathfrak{I}(y) = v(y) = \beta$$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0, proto např.:

$$\mathfrak{I}(D) = \{\alpha\}, \mathfrak{I}(K) = \{\alpha\}, \mathfrak{I}(K') = \{\beta\}, \mathfrak{I}(BK) = \{<\alpha, \beta>\}$$

$$\forall x ((K(x) \wedge \exists y (K'(y) \wedge BK(x,y))) \rightarrow \neg D(x))$$

$$1 \quad \alpha \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \alpha \quad 1 \quad 1 \quad \alpha \beta \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad \alpha$$

$$0$$

b) Interpretace první premisy (chceme, aby 1):

proto např.: $\mathfrak{I}(N) = \{\alpha\}$

$$\forall x ((K(x) \wedge \exists y (K'(y) \wedge BK(x,y))) \rightarrow \neg N(x))$$

$$1 \quad \alpha \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \alpha \quad 1 \quad 1 \quad \alpha \beta \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \alpha$$

aby: 1

c) Interpretace druhé premisy (chceme aby 1):

$$\forall x (D(x) \rightarrow N(x))$$

$$1 \quad \alpha \quad 0 \quad 0 \quad \alpha$$

takže: 0

Tedy: úsudek je korektní, závěr vyplývá z premis, neboť není možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

9)

Všichni dirigenti znají noty.

Všichni dirigenti jsou hudebníci.

Někteří hudebníci znají noty.

Formálně:

$$\forall x (D(x) \rightarrow \exists y (N(y) \wedge Z(x,y)))$$

$$\forall x (D(x) \rightarrow H(x))$$

$$\exists x (H(x) \wedge \exists y (N(y) \wedge Z(x,y)))$$

Nechť:

$$U = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \alpha$$

$$\mathfrak{I}(y) = v(y) = \beta$$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0),

proto např.: $\mathfrak{I}(H) = \emptyset$

načež se nemusíme starat o $\mathfrak{I}(N)$ a $\mathfrak{I}(Z)$

$$\exists x (H(x) \wedge \exists y (N(y) \wedge Z(x,y)))$$

$$0 \ \alpha \ 0$$

$$0 \ \beta \ 0$$

$$0 \ \gamma \ 0$$

takže: 0

b) Interpretace druhé premisy (chceme, aby 1):

proto: $\mathfrak{I}(D) = \emptyset$

$$\forall x (D(x) \rightarrow H(x))$$

$$0 \ \alpha \ 1 \ 0 \ \alpha$$

$$0 \ \beta \ 1 \ 0 \ \beta$$

$$0 \ \gamma \ 1 \ 0 \ \gamma$$

aby: 1

c) Interpretace první premisy (chceme, aby 1, proto nesmí být ani jednou $1 \rightarrow 0$):

$$\forall x (D(x) \rightarrow \exists y (N(y) \wedge Z(x,y))$$

$$0 \alpha 1$$

$$0 \beta 1$$

$$0 \gamma 1$$

takže: 1

Tedy: úsudek není korektní, závěr nevyplývá z premis, neboť je možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

10)

Pierre Boulez je dirigent.

Všichni dirigenti znají noty.

Všichni dirigenti jsou hudebníci.

Někteří hudebníci znají noty.

Formálně:

$$D(b)$$

$$\forall x (D(x) \rightarrow \exists y (N(y) \wedge Z(x,y))$$

$$\forall x (D(x) \rightarrow H(x))$$

$$\exists x (H(x) \wedge \exists y (N(y) \wedge Z(x,y))$$

Nechť:

$$U = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \alpha$$

$$\mathfrak{I}(y) = v(y) = \gamma$$

$$\mathfrak{I}(b) = S(b) = \beta$$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0),

proto např.: $\mathfrak{I}(H) = \emptyset$

načej se nemusíme starat o $\mathfrak{I}(N)$ a $\mathfrak{I}(Z)$

$$\exists x (H(x) \wedge \exists y (N(y) \wedge Z(x,y))$$

$$0 \alpha 0$$

$$0 \beta 0$$

$$0 \gamma 0$$

takže: 0

b) Interpretace první premisy (chceme, aby 1): proto: $\mathfrak{I}(D)=\{\beta\}$

$$D(b)$$

$$1 \beta$$

c) Interpretace třetí premisy (chceme, aby 1):

$$\forall x (D(x) \rightarrow H(x))$$

$$0 \alpha 1 0 \alpha$$

$$1 \beta 1 0 \beta$$

$$0 \gamma 1 0 \gamma$$

tedy: 0

d) Interpretaci první premisy ani nemusíme provádět, neboť ať už vyjde 1 nebo 0 jedna z výše interpretovaných premis vyjde 0.

Tedy: úsudek je korektní, závěr vyplývá z premis, neboť není možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

11)

Žádný cizinec neviděl vnitřek tohoto zámku.

Někteří přítomní jsou cizinci.

Někteří přítomní neviděli vnitřek tohoto zámku.

Formálně:

$$\forall x (C(x) \rightarrow \exists yz ((Z(y) \wedge V(z,y)) \wedge \neg \text{Vid}(x,z)))$$

$$\exists x (P(x) \rightarrow C(x))$$

$$\exists x (P(x) \wedge \exists yz ((Z(y) \wedge V(z,y)) \wedge \neg \text{Vid}(x,z)))$$

Nechť:

$$U=\{\alpha,\beta,\gamma\}$$

$$\mathfrak{I}(x)=v(x)=\alpha$$

$$\mathfrak{I}(y)=v(y)=\beta$$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0, proto např.:

$$\mathfrak{I}(P)=\{\alpha\}, \mathfrak{I}(Z)=\{\beta\}, \mathfrak{I}(V)=\{\langle\gamma,\beta\rangle\}, \mathfrak{I}(Vid)=\{\langle\alpha,\gamma\rangle,\dots\}=U^2$$

$$\exists x (P(x) \wedge \exists yz ((Z(y) \wedge V(z,y)) \wedge \neg Vid(x,z)))$$

$$1 \alpha 0 0 \quad 1 \beta 1 1 \gamma \beta 0 0 1 \quad \alpha \gamma$$

$$0$$

b) Interpretace první premisy (chceme, aby 1):

proto např.: $\mathfrak{I}(C)=\emptyset$

$$\forall x (C(x) \rightarrow \exists yz ((Z(y) \wedge V(z,y)) \wedge \neg Vid(x,z)))$$

$$0 \alpha 1 0 \quad 1 \beta 1 1 \gamma \beta 0 0 1 \quad \alpha \gamma$$

aby: 1

c) Interpretace druhé premisy (chceme aby 1):

$$\exists x (P(x) \wedge C(x))$$

$$1 \alpha 0 0 \alpha$$

takže: 0

Tedy: úsudek je korektní, závěr vyplývá z premis, neboť není možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

12)

Žádný cizinec neviděl vnitřek tohoto zámku.

Někteří přítomní nejsou cizinci.

Někteří přítomní viděli vnitřek tohoto zámku.

Formálně:

$$\forall x (C(x) \rightarrow \exists yz ((Z(y) \wedge V(z,y) \text{PROHODIT}) \wedge \neg Vid(x,z)))$$

$$\exists x (P(x) \rightarrow C(x))$$

$$\exists x (P(x) \wedge \exists yz ((Z(y) \wedge V(z,y)) \wedge \neg Vid(x,z)))$$

Nechť:

$$U=\{\alpha,\beta,\gamma\}$$

$$\mathfrak{I}(x)=v(x)=\alpha$$

$$\mathfrak{I}(y)=v(y)=\beta$$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0, proto např.:

$$\mathfrak{I}(P)=\{\alpha\}, \mathfrak{I}(Z)=\{\beta\}, \mathfrak{I}(V)=\{\langle \gamma, \beta \rangle\}, \mathfrak{I}(Vid)=\emptyset$$

$$\exists x (P(x) \wedge \exists yz ((Z(y) \wedge V(z,y)) \wedge Vid(x,z)))$$

$$1 \alpha 0 0 \quad 1 \beta 1 1 \gamma \beta 0 0 \quad \alpha \gamma$$

$$0$$

b) Interpretace první premisy (chceme, aby 1):

proto např.: $\mathfrak{I}(C)=\emptyset$

$$\forall x (C(x) \rightarrow \exists yz ((Z(y) \wedge V(z,y)) \wedge \neg Vid(x,z)))$$

$$0 \alpha 1 0 \quad 1 \beta 1 1 \gamma \beta 0 0 1 \quad \alpha \gamma$$

aby: 1

c) Interpretace druhé premisy (chceme aby 1):

$$\exists x (P(x) \wedge \neg C(x))$$

$$1 \alpha 0 1 0 \alpha$$

takže: 1

Tedy: úsudek není korektní, závěr nevyplývá z premis, neboť je možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

13)

Žádný pták neletěl do vesmíru.

Někteří živočichové nejsou ptáci.

Někteří živočichové letěli do vesmíru.

Formálně:

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (V(y) \wedge \neg L(x,y)))$$

$$\exists x (\check{Z}(x) \wedge \neg P(x))$$

$$\exists x (\check{Z}(x) \wedge \exists y (V(y) \wedge L(x,y)))$$

Nechť:

$$U = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \beta$$

a) Interpretace druhé premisy (chceme, aby 1): proto např.: $\mathfrak{I}(\check{Z}) = \{\alpha\}$, $\mathfrak{I}(P) = \emptyset$

$$\exists x (\check{Z}(x) \wedge \neg P(x))$$

$$1 \alpha \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad \alpha$$

$$0 \beta \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \beta$$

$$0 \gamma \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \gamma$$

aby: 1

b) Interpretace závěru (chceme, aby 0, proto musí být vždy $0 \wedge 0$):

proto např.: $\mathfrak{I}(L) = \emptyset$, $\mathfrak{I}(V) = \{\gamma\}$

$$\exists x (\check{Z}(x) \wedge \exists y (V(y) \wedge L(x, y)))$$

$$1 \alpha \quad 0 \quad 0 \alpha \quad 0 \quad 0$$

$$0 \beta \quad 0 \quad 0 \{ 0 \beta \quad 0 \quad 0$$

$$0 \gamma \quad 0 \quad 1 \gamma \quad 0 \text{ atd. (nevypisujeme zde dílčí interpretace } L(x, y))$$

0

c) Interpretace první premisy (chceme, aby 1):

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (V(y) \wedge \neg L(x, y)))$$

$$1 \alpha \quad 1 \quad 0 \alpha \quad 0 \quad 1 \quad 0$$

$$0 \beta \quad 1 \quad 1 \{ 0 \beta \quad 0 \quad 1 \quad 0$$

$$0 \gamma \quad 1 \quad 1 \gamma \quad 1 \quad 1 \text{ atd. (nevypisujeme zde dílčí interpretace } L(x, y))$$

aby: 1

Tedy: úsudek není korektní, závěr nevyplývá z premis, neboť je možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý (do vesmíru nemusel žádný živočich, který není ptákem, letět).

14)

Každý lékař doporučuje antikoncepci.

Žádná antikoncepce není zcela spolehlivá.

 Nic zcela spolehlivého není doporučeno lékařem.

Formálně:

$$\forall x (L(x) \rightarrow \forall y (A(y) \rightarrow D(x, y)))$$

$$\forall x (A(x) \rightarrow \neg S(x))$$

$$\forall x (S(x) \rightarrow \forall y (L(y) \rightarrow \neg D(x, y)))$$

Nechť:

$$U = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \alpha$$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0, proto musí být aspoň jednou $1 \rightarrow 0$):

$$\text{proto např.: } \mathfrak{I}(S) = \{\alpha\}, \mathfrak{I}(L) = \{\beta\}, \mathfrak{I}(D) = \{\langle \alpha, \beta \rangle\}$$

$$\forall x (S(x) \rightarrow \forall y (L(y) \rightarrow D(x, y)))$$

$$1 \alpha \ 0 \quad 0 \alpha \ 1 \ 1 \alpha \ \beta$$

$$0 \beta \ 1 \ 0 \{ \ 1 \beta \ 0 \ 0 \text{ atd. (nevypisujeme zde dílčí interpretace } D(x, y))$$

$$0 \gamma \ 1 \quad 0 \gamma \ 1 \ 0$$

0

b) Interpretace druhé premisy (chceme, aby 1):

$$\text{proto např.: } \mathfrak{I}(A) = \emptyset$$

$$\forall x (A(x) \rightarrow \neg S(x))$$

$$0 \alpha \ 1 \ 0 \ 1 \alpha$$

$$0 \beta \ 1 \ 1 \ 0 \beta$$

$$0 \gamma \ 1 \ 1 \ 0 \gamma$$

aby: 1

c) Interpretace první premisy (chceme, aby 1):

$$\forall x (L(x) \rightarrow \forall y (A(y) \rightarrow D(x, y)))$$

$$0 \alpha \ 1 \quad 0 \alpha \ 1 \ 1 \alpha \ \beta$$

$$1 \beta \ 1 \ 1 \{ \ 0 \beta \ 1 \ 0 \text{ atd. (nevypisujeme zde dílčí interpretace } D(x, y))$$

$$0 \quad \gamma \quad 1 \quad 0 \quad \gamma \quad 1 \quad 0$$

takže: 1

Tedy: úsudek není korektní, závěr nevyplývá z premis, neboť je možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

12.6 Příklady - náročné bezprostřední úsudky

Pomocí sémantické metody, tedy na základě definice vyplývání a definice interpretace, určete platnost následujících úsudků:

1)

Vše se vyvíjí a mění.

Vše se vyvíjí a vše se mění.

Formálně:

$$\forall x (V(x) \wedge M(x))$$

$$\forall x V(x) \wedge \forall x M(x)$$

Nechť:

$$U = \{\alpha, \beta\}$$

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \alpha$$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0):

proto např.: $\mathfrak{I}(V) = \{\alpha, \beta\}$, $\mathfrak{I}(M) = \emptyset$

$$\forall x V(x) \wedge \forall x M(x)$$

$$1 \quad \alpha \quad 0 \quad \alpha$$

$$1 \quad \beta \quad 0 \quad \beta$$

$$1 \quad 0$$

$$0$$

b) Interpretace premisy (chceme, aby 1):

$$\forall x (V(x) \wedge M(x))$$

$$1 \quad \alpha \quad 0 \quad 0 \quad \alpha$$

$$1 \beta \ 0 \ 0 \ \beta$$

takže: 0

Tedy: úsudek je korektní, závěr vyplývá z premis, neboť není možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý (podle první premisy se říká, že $\mathfrak{I}(V)=\mathfrak{I}(M)$, přičemž pak nejde udělat interpretaci závěru tak, aby byl nepravdivý). Srov. tautologii PL.

2)

Vše se vyvíjí a vše se mění.

Vše se vyvíjí a mění.

Formálně:

$$\forall x V(x) \wedge \forall x M(x)$$

$$\forall x (V(x) \wedge M(x))$$

Nechť:

$$U=\{\alpha, \beta\}$$

$$\mathfrak{I}(x)=v(x)=\alpha$$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0):

proto např.: $\mathfrak{I}(V)=\{\alpha, \beta\}$, $\mathfrak{I}(M)=\emptyset$

$$\forall x (V(x) \wedge M(x))$$

$$1 \ \alpha \ 0 \ 0 \ \alpha$$

$$1 \ \beta \ 0 \ 0 \ \beta$$

0

b) Interpretace premisy (chceme, aby 1):

$$\forall x V(x) \wedge \forall x M(x)$$

$$1 \ \alpha \qquad 0 \ \alpha$$

$$1 \ \beta \qquad 0 \ \beta$$

1 0
takže: 0

Tedy: úsudek je korektní, závěr vyplývá z premis, neboť není možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý (podle první premisy se říká, že $\mathfrak{I}(V)=\mathfrak{I}(M)$, přičemž pak nejde udělat interpretaci závěru tak, aby byl nepravdivý). Srov. tautologii PL.

3)

Vše se vyvíjí a mění.

Vše se vyvíjí nebo vše se mění.

Formálně:

$\forall x (V(x) \wedge M(x))$

$\forall x V(x) \vee \forall x M(x)$

Nechť:

$U=\{\alpha, \beta\}$

$\mathfrak{I}(x)=v(x)=\alpha$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0):

proto: $\mathfrak{I}(V)=\mathfrak{I}(M)=\emptyset$

$\forall x V(x) \vee \forall x M(x)$

0 α 0 α

0 β 0 β

0 0

0

b) Interpretace premisy (chceme, aby 1):

$\forall x (V(x) \wedge M(x))$

0 α 0 0 α

0 β 0 0 β

takže: 0

Tedy: úsudek je korektní, závěr vyplývá z premis, neboť není možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý (podle první premisy se říká, že $\mathfrak{I}(V)=\mathfrak{I}(M)$, přičemž pak nejde udělat interpretaci závěru tak, aby byl nepravdivý).

4)

Vše se vyvíjí nebo vše se mění.

Vše se vyvíjí a mění.

Formálně:

$\forall x V(x) \vee \forall x M(x)$

$\forall x (V(x) \wedge M(x))$

Nechť:

$U=\{\alpha, \beta\}$

$\mathfrak{I}(x)=v(x)=\alpha$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0):

proto: $\mathfrak{I}(V)=\emptyset, \mathfrak{I}(M)=U$

$\forall x (V(x) \wedge M(x))$

0 α 0 1 α

0 β 0 1 β

0

b) Interpretace premisy (chceme, aby 1):

$\forall x V(x) \vee \forall x M(x)$

0 α 1 α

0 β 1 β

0 1

takže: 1

Tedy: úsudek není korektní, závěr nevyplývá z premis, neboť je možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

5)

Vše se vyvíjí nebo vše se mění.

Vše se vyvíjí nebo mění.

Formálně:

$\forall x V(x) \vee \forall x M(x)$

 $\forall x (V(x) \vee M(x))$

Nechť:

$U = \{\alpha, \beta\}$

$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \alpha$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0):

proto: $\mathfrak{I}(V) = \mathfrak{I}(M) = \emptyset$

$\forall x (V(x) \vee M(x))$

$0 \quad \alpha \quad 0 \quad 0 \quad \alpha$

$0 \quad \beta \quad 0 \quad 0 \quad \beta$

0

b) Interpretace premisy (chceme, aby 1):

$\forall x V(x) \vee \forall x M(x)$

$0 \quad \alpha \quad 0 \quad \alpha$

$0 \quad \beta \quad 0 \quad \beta$

0 0

takže: 0

Tedy: úsudek je korektní, závěr vyplývá z premis, neboť není možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý. (Podobný úsudek: Všechna přirozená jsou sudá nebo všechna přirozená čísla jsou lichá. / Všechna přirozená jsou sudá nebo lichá.) Srov. tautologii PL.

6)

Vše se vyvíjí nebo mění.

Vše se vyvíjí nebo vše se mění.

Formálně:

$$\forall x (V(x) \vee M(x))$$

$$\forall x V(x) \vee \forall x M(x)$$

Nechť:

$$U = \{\alpha, \beta\}$$

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \alpha$$

a) Vyjdeme z interpretace premisy (chceme, aby 1): proto: $\mathfrak{I}(V) = \{\alpha\}$, $\mathfrak{I}(M) = \{\beta\}$

$$\forall x (V(x) \vee M(x))$$

$$1 \quad \alpha \quad 1 \quad 0 \quad \alpha$$

$$0 \quad \beta \quad 1 \quad 1 \quad \beta$$

aby: 1

b) Interpretace závěru (chceme, aby 0):

$$\forall x V(x) \vee \forall x M(x)$$

$$1 \quad \alpha \quad \quad 0 \quad \alpha$$

$$0 \quad \beta \quad \quad 1 \quad \beta$$

$$0 \quad \quad \quad 0$$

takže: 0

Tedy: úsudek není korektní, závěr nevyplývá z premis, neboť je možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý (čili $U = \mathfrak{I}(V) \cup \mathfrak{I}(M)$).

Pozn.: Onu hledanou interpretaci snadno najdeme z negace závěru, jíž je ekvivalentní formule $\exists x \neg V(x) \wedge \exists x \neg M(x)$ (tj. něco není ve V a zároveň něco není v M).

7)

Někdo miluje každého.

Každý je někým milován.

Formálně:

$$\exists x \forall y M(x, y)$$

$$\forall y \exists x M(x, y)$$

Necht:

$$U = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \beta$$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0):

proto např.: $\mathfrak{I}(M) = \{\langle \alpha, \alpha \rangle, \langle \alpha, \beta \rangle, \langle \alpha, \gamma \rangle\}$

$$\forall y \exists x M(x, y)$$

$$1 \quad \alpha \quad \alpha$$

$$1 \quad \alpha \quad \beta$$

$$0 \quad \alpha \quad \gamma$$

$$0 \quad \beta \quad \alpha$$

$$0 \quad \beta \quad \beta$$

$$0 \quad \beta \quad \gamma$$

$$0 \quad \gamma \quad \alpha$$

$$0 \quad \gamma \quad \beta$$

$$0 \quad \gamma \quad \gamma$$

$$0$$

b) Interpretace premisy (chceme, aby 1):

$$\exists x \forall y (M(x, y))$$

$$1 \quad \alpha \quad \alpha$$

$$1 \quad \alpha \quad \beta$$

$$0 \quad \alpha \quad \gamma$$

$$0 \quad \beta \quad \alpha$$

$$0 \quad \beta \quad \beta$$

$$0 \quad \beta \quad \gamma$$

$$0 \quad \gamma \quad \alpha$$

0 $\gamma\beta$

0 $\gamma\gamma$

takže: 0

Tedy: úsudek je korektní, závěr vyplývá z premis, neboť není možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý. Srov. tautologii PL.

8)

Každý je někým milován.

Někdo miluje každého.

Formálně:

$\forall y \exists x M(x,y)$

$\exists x \forall y M(x,y)$

Nechť:

$U = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \beta$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0):

proto např.: $\mathfrak{I}(M) = \{\langle \alpha, \alpha \rangle, \langle \beta, \gamma \rangle, \langle \gamma, \beta \rangle\}$

$\exists x \forall y M(x,y)$

1 $\alpha \alpha$

0 $\alpha \beta$

0 $\alpha \gamma$

0 $\beta \alpha$

0 $\beta \beta$

1 $\beta \gamma$

0 $\gamma \alpha$

1 $\gamma \beta$

0 $\gamma \gamma$

0

b) Interpretace premisy (chceme, aby 1):

$$\forall y \exists x M(x, y)$$

$$1 \quad \alpha \quad \alpha$$

$$0 \quad \alpha \quad \beta$$

$$0 \quad \alpha \quad \gamma$$

$$0 \quad \beta \quad \alpha$$

$$0 \quad \beta \quad \beta$$

$$1 \quad \beta \quad \gamma$$

$$0 \quad \gamma \quad \alpha$$

$$1 \quad \gamma \quad \beta$$

$$0 \quad \gamma \quad \gamma$$

takže: 1

Tedy: úsudek není korektní, závěr nevyplývá z premis, neboť je možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý.

9)

Někdo je obdivován každým.

Každý někoho obdivuje.

Formálně:

$$\exists y \forall x O(x, y)$$

$$\forall x \exists y O(x, y)$$

Nechť:

$$U = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \gamma$$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0):

proto např.: $\mathfrak{I}(M) = \{\langle \alpha, \alpha \rangle, \langle \beta, \gamma \rangle, \langle \gamma, \beta \rangle\}$

$\forall x \exists y O(x, y)$

1 $\alpha \alpha$

0 $\alpha \beta$

0 $\alpha \gamma$

0 $\beta \alpha$

0 $\beta \beta$

1 $\beta \gamma$

0 $\gamma \alpha$

0 $\gamma \beta$

0 $\gamma \gamma$

0

b) Interpretace premisy (chceme, aby 1):

$\exists y \forall x O(x, y)$

1 $\alpha \alpha$

0 $\alpha \beta$

0 $\alpha \gamma$

0 $\beta \alpha$

0 $\beta \beta$

1 $\beta \gamma$

0 $\gamma \alpha$

0 $\gamma \beta$

0 $\gamma \gamma$

takže: 0

Tedy: úsudek je korektní, závěr vyplývá z premis, neboť není možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý. Srov. tautologii PL.

10)

Každý někoho obdivuje.

Někdo je každým obdivován.

Formálně:

$$\forall x \exists y O(x, y)$$

$$\exists y \forall x O(x, y)$$

Nechť:

$$U = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \gamma$$

a) Interpretace závěru (chceme, aby 0):

proto např.: $\mathfrak{I}(M) = \{\langle \alpha, \alpha \rangle, \langle \beta, \gamma \rangle, \langle \gamma, \beta \rangle\}$

$$\exists y \forall x O(x, y)$$

$$1 \quad \alpha \quad \alpha$$

$$0 \quad \alpha \quad \beta$$

$$0 \quad \alpha \quad \gamma$$

$$0 \quad \beta \quad \alpha$$

$$0 \quad \beta \quad \beta$$

$$1 \quad \beta \quad \gamma$$

$$0 \quad \gamma \quad \alpha$$

$$1 \quad \gamma \quad \beta$$

$$0 \quad \gamma \quad \gamma$$

$$0$$

b) Interpretace premisy (chceme, aby 1):

$$\forall x \exists y O(x, y)$$

$$1 \quad \alpha \quad \alpha$$

$$0 \quad \alpha \quad \beta$$

$$0 \quad \alpha \quad \gamma$$

$$0 \quad \beta \quad \alpha$$

$$0 \quad \beta \quad \beta$$

1 $\beta \gamma$

0 $\gamma \alpha$

1 $\gamma \beta$

0 $\gamma \gamma$

takže: 1

Tedy: úsudek není korektní, závěr nevyplývá z premis, neboť je možná taková interpretace, při níž jsou všechny premisy pravdivé a závěr přitom nepravdivý.