



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro
mezioborová studia (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0216, OPVK)

Úvod do logiky (PL): interpretace formulí

doc. PhDr. Jiří Raclavský, Ph.D.

(raclavsky@phil.muni.cz)

9. Interpretace formulí

Při interpretaci formulí PL vycházíme z definice interpretace v sekci Sémantika PL. Pro názornost budeme níže interpretovat formule, které korespondují větám přirozeného jazyka. Povšimněme si při tom, že interpretace formule přiřazené větě přirozeného jazyka je zcela obecně interpretací predikátových symbolů, nikoli vystihování významu slov přirozeného jazyka, dané věty; interpretována je formule formálního jazyka podle pravidel interpretace toho jazyka, nikoli věta přirozeného jazyka.

Připomínáme, že znaky řecké abecedy jsou metajazykovými označeními těch skutečných individuí. Škrtnutím znaku alfabety značíme, že dané individuum (či n -tice individuí) nenáleží do interpretace určitého predikátového symbolu. Dále: „ $\mathfrak{I}_{v,s}(X)$ “ budeme zkracovat na „ $\mathfrak{I}(X)$ “. Výslednou interpretaci celé formule budeme zapisovat jako „ $\mathfrak{I}(\varphi)$ “. Obrat „množina, která je interpretací predikátového symbolu X “ budeme často zkracovat na „ $\mathfrak{I}(X)$ “.

9.1 Příklady – interpretace jednoduchých formulí s monadickými predikáty

Věty přirozeného jazyka vyjádřete formulemi predikátové logiky a interpretujte za a) tak, aby daná formule byla pravdivá, za b) tak, aby daná formule byla nepravdivá:

1)

Nechť $U = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ a $\mathfrak{I}(a) = S(a) = \alpha$.

Aristoteles je filosof.

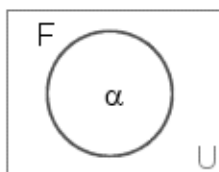
$F(a)$

a) Formule bude pravdivá, pokud individuum Aristoteles, tj. α , patří do množiny F , čili když $\mathfrak{I}(a) \in \mathfrak{I}(F)$.

$\mathfrak{I}(F) = \{\alpha, \dots\}$

$\mathfrak{I}(\varphi) = 1$

Graficky:

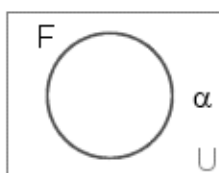


b) Formule bude nepravdivá, pokud individuum Aristoteles nebude patřit do interpretace množiny F, tj. $\mathfrak{I}'(a) \notin \mathfrak{I}'(F)$:

$$\mathfrak{I}'(F) = \{\alpha, \dots\}$$

$$\mathfrak{I}'(\varphi) = 0$$

Graficky:



2)

Nechť $U = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ a $\mathfrak{I}(a) = \mathfrak{I}(a) = \alpha$.

Aristoteles je filosof, ale Bedřich nikoli.

$$F(a) \wedge \neg F(b)$$

a) Formule bude pravdivá, pokud Aristoteles do množiny filosofů patří, kdežto Bedřich nikoli.

Tedy když Aristoteles náleží do F, tj. $\mathfrak{I}(a) \in \mathfrak{I}(F)$, kdežto Bedřich do doplňku množiny F, tj.

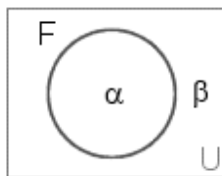
$(\mathfrak{I}(b) \notin \mathfrak{I}(F))$, přesněji $\mathfrak{I}(b) \in \mathfrak{I}(F^c)$:

$$\mathfrak{I}(F) = \{\alpha, \beta\}$$

$$\mathfrak{I}(F(a)) = 0$$

$$\mathfrak{I}(\varphi) = 1$$

Graficky:



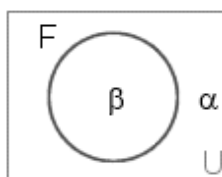
b) Formule bude nepravdivá, pokud neplatí, že Aristoteles do množiny filosofů patří a Bedřich nikoli. Ačkoli stačí, aby neplatila aspoň jedna z dílčích skutečností, zde navrhneme interpretaci, podle níž neplatí ani jedna z nich. Podle této interpretace tedy Bedřich náleží do F , tj. $\mathfrak{I}'(b) \in \mathfrak{I}'(F)$, kdežto Aristoteles do doplňku množiny F , tj. $\mathfrak{I}'(a) \notin \mathfrak{I}'(F)$, přesněji $\mathfrak{I}'(a) \in \mathfrak{I}'(F^c)$:

$$\mathfrak{I}'(F) = \{a, b\}$$

$$\mathfrak{I}'(F(a)) = 0$$

$$\mathfrak{I}'(\varphi) = 1$$

Graficky:



3)

Nechť $U = \{a, b, c\}$.

Někdo je filosof. (=Někteří jsou filosofy.)

$$\exists x F(x)$$

a) Formule bude pravdivá, pokud množina F nebude prázdná, tedy pokud v ní nějaké individuum (jedno jaké a kolik) bude, tj. $\mathfrak{I}(x) \in \mathfrak{I}(F)$:

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = b$$

$$\mathfrak{I}(F) = \{a\}$$

$\mathfrak{I}(F(x))$ je závislá na valuaci, takže $\mathfrak{I}(F(x)) = 0$, avšak protože formule je uzavřená, aktuální valuace pro x bude ignorována, protože musíme zjistit pravdivostní hodnoty při

všech ostatních valuacích pro kvantifikátorem vázanou proměnou x , přičemž je-li valuována α , $\mathfrak{I}(F(x))=1$, což už stačí k tomu, aby:

$$\mathfrak{I}(\varphi)=1$$

Alternativní „sloupečkové“ vyjádření (v řádcích jsou vyznačeny jednotlivé interpretace na základě jednotlivých valuací a následné pravdivostní hodnoty podformule $F(x)$, nejnižší je kurzívou vyznačena celková výsledná pravdivostní hodnota):

$$\exists x F(x)$$

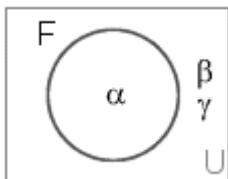
$$1 \ \alpha$$

$$0 \ \beta$$

$$0 \ \gamma$$

$$1$$

Graficky:



a') Jiná interpretace, při níž je formule také pravdivá:

$$\mathfrak{I}'(x)=v(x)=\alpha$$

$$\mathfrak{I}'(F)=\{\alpha, \gamma\}$$

$$\mathfrak{I}'(\varphi)=1$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\exists x F(x)$$

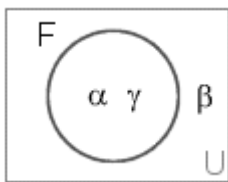
$$1 \ \alpha$$

$$0 \ \beta$$

$$1 \ \gamma$$

$$1$$

Graficky:



b) Formule bude nepravdivá, pokud množina F bude prázdná, tedy žádný prvek U nebude v F :

$$\mathfrak{I}''(x) = v(x) = \beta$$

$$\mathfrak{I}''(F) = \{\alpha, \beta, \gamma\} \text{ čili } \mathfrak{I}''(F) = \emptyset$$

$\mathfrak{I}''(F(x))$ je závislá na valuaci, přičemž $\mathfrak{I}''(F(x)) = 0$, avšak protože formule je uzavřená, zjišťujeme rovněž pravdivostní hodnoty při všech ostatních valuacích pro kvantifikátorem vázanou proměnou x , avšak protože při všech z nich $\mathfrak{I}''(F(x)) = 0$, tak:

$$\mathfrak{I}''(\varphi) = 0$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\exists x F(x)$$

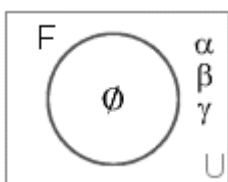
$$0 \alpha$$

$$0 \beta$$

$$0 \gamma$$

$$0$$

Graficky:



4)

Nechť $U = \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

Každý je filosof. (=Všichni jsou filosofové.)

$$\forall x F(x)$$

a) Formule bude pravdivá, pokud všechna individua z U patří do množiny F (tedy $\mathfrak{I}(F)$ je vlastní podmnožinou U , $\mathfrak{I}(F) \subseteq U$):

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \gamma$$

$$\mathfrak{I}(F) = \{\alpha, \beta, \gamma\} = U$$

podformule $F(x)$ je otevřená a tak je $\mathfrak{I}(F(x))$ podmíněná valuací, přičemž při dané valuaci $\mathfrak{I}(F(x)) = \gamma$, ovšem protože celá formule je uzavřená, zjišťujeme rovněž pravdivostní hodnoty při všech ostatních valuacích pro kvantifikátorem vázanou proměnou x , avšak protože při všech z nich $\mathfrak{I}(F(x)) = 1$, tak:

$$\mathfrak{I}(\varphi) = 1$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\forall x F(x)$$

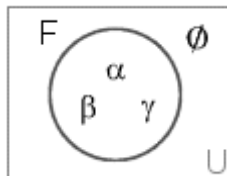
$$1 \quad \alpha$$

$$1 \quad \beta$$

$$1 \quad \gamma$$

$$1$$

Graficky:



b) Formule bude nepravdivá, pokud alespoň jedno individuum z U nepatří do množiny $\mathfrak{I}'(F)$ (tedy $\mathfrak{I}'(F)$ je vlastní podmnožinou U , $\mathfrak{I}'(F) \subset U$):

$$\mathfrak{I}'(x) = v(x) = \alpha$$

$$\mathfrak{I}'(F) = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

interpretace podformule $F(x)$ je sice při dané valuaci pravdivá, $\mathfrak{I}'(F(x)) = 1$, nicméně protože celá formule je uzavřená, zjišťujeme rovněž pravdivostní hodnoty při všech ostatních valuacích v' , avšak protože při všech z nich není $\mathfrak{I}'(F(x)) = 1$, tak:

$$\mathfrak{I}'(\varphi) = 0$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\forall x F(x)$$

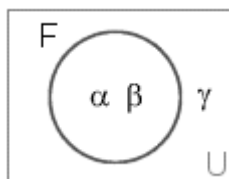
$$1 \alpha$$

$$1 \beta$$

$$0 \gamma$$

$$0$$

Graficky:



b') Formule bude nepravdivá i s využitím krajní možnosti, kdy interpretací F je $\emptyset$:

$$\mathfrak{I}''(x)=v(x)=\alpha$$

$$\mathfrak{I}''(F)=\{\alpha, \beta, \gamma\}=\emptyset$$

při všech možných ohodnoceních proměnné x je $\mathfrak{I}''(F(x))=0$, takže:

$$\mathfrak{I}''(\varphi)=0$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\forall x F(x)$$

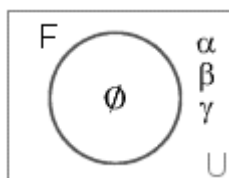
$$0 \alpha$$

$$0 \beta$$

$$0 \gamma$$

$$0$$

Graficky:



5)

Nechť $U=\{\alpha, \beta, \gamma\}$.

Někdo není filosof. (=Někteří nejsou filosofy.)

$$\exists x \neg F(x)$$

a) Formule bude pravdivá, pokud alespoň jedno individuum nenáleží do množiny $\mathfrak{I}(F)$, tj. $\mathfrak{I}(x) \notin \mathfrak{I}(F)$, přesněji $\mathfrak{I}(x) \in \mathfrak{I}(F)$, čili $\mathfrak{I}(F)$ je vlastní podmnožinou U , $\mathfrak{I}(F) \subset U$:

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \beta$$

$$\mathfrak{I}(F) = \{\alpha\}$$

interpretace otevřené podformule $F(x)$ je závislá na alternativních valuacích v' , interpretace otevřené podformule $\neg F(x)$ bude pak jednotlivým uděleným pravdivostním hodnotám přiřazovat pravdivostní hodnotu opačnou, nicméně celkem dvakrát bude přiřazena pravda, což vede k tomu, že:

$$\mathfrak{I}(\varphi) = 1$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\exists x \neg F(x)$$

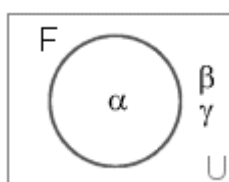
$$0 \ 1 \ \alpha$$

$$1 \ 0 \ \beta$$

$$1 \ 0 \ \gamma$$

$$1$$

Graficky:



a') Formule bude pravdivá i s využitím krajní možnosti, kdy interpretací F je $\emptyset$, tedy když žádné individuum z U nenáleží do množiny F):

$$\mathfrak{I}'(x) = v(x) = \beta$$

$$\mathfrak{I}'(F) = \emptyset$$

následně vždy $\mathfrak{I}'(F(x)) = 0$, načež pak vždy $\mathfrak{I}'(\neg F(x)) = 1$, tedy:

$$\mathfrak{I}'(\varphi) = 1$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\exists x \neg F(x)$$

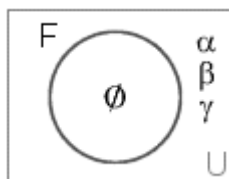
$$1 \ 0 \ \alpha$$

$$1 \ 0 \ \beta$$

$$1 \ 0 \ \gamma$$

1

Graficky:



b) Formule bude nepravdivá výlučně při využití krajní možnosti, jíž je, že všechna individua z U náleží do množiny F , tj. $\mathfrak{I}''(F)=U$:

$$\mathfrak{I}''(x)=v(x)=\alpha$$

$$\mathfrak{I}''(F)=U$$

v důsledku toho bude vždy $\mathfrak{I}''(F(x))=1$, následně pak vždy $\mathfrak{I}''(F(x))=0$, tedy:

$$\mathfrak{I}''(\varphi)=0$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\exists x \neg F(x)$$

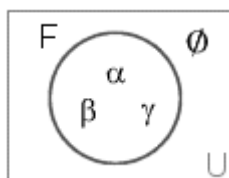
$$0 \ 1 \ \alpha$$

$$0 \ 1 \ \beta$$

$$0 \ 1 \ \gamma$$

0

Graficky:



6)

Nechť $U=\{\alpha, \beta, \gamma\}$.

Nikdo není filosof. (= Každý není filosofem.)

$$\forall x \neg F(x)$$

a) Formule bude pravdivá, pokud pro všechny prvky univerza platí, že nenáleží do množiny F , tj. $U \not\subseteq \mathfrak{I}(F)$, čili $\mathfrak{I}(F) = \emptyset$; všechna tedy náleží do doplňku této množiny, tj. $U = \mathfrak{I}(F^c)$:

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \gamma$$

$$\mathfrak{I}(F) = \{\alpha, \beta, \gamma\} = \emptyset$$

interpretace otevřené podformule $F(x)$ bude při všech možných ohodnoceních pro x nepravda, interpretace otevřené podformule $\neg F(x)$ bude pak vždy pravda, tedy:

$$\mathfrak{I}(\varphi) = 1$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\forall x \neg F(x)$$

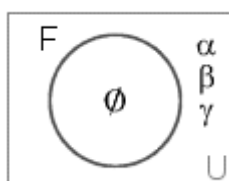
$$1 \ 0 \ \alpha$$

$$1 \ 0 \ \beta$$

$$1 \ 0 \ \gamma$$

$$1$$

Graficky:



b) Formule bude nepravdivá, pokud alespoň jeden prvek U patří do množiny F , tj. $\mathfrak{I}'(F) \subseteq U$:

$$\mathfrak{I}'(x) = v(x) = \beta$$

$$\mathfrak{I}'(F) = \{\gamma\}$$

ačkoli $\mathfrak{I}'(F(x)) = 0$ a pak $\mathfrak{I}'(\neg F(x)) = 1$ pro danou valuaci, při ostatních ohodnoceních pro x tomu tak obecně není, totiž je-li přiřazena γ , pak $\mathfrak{I}'(F(x)) = 1$ a $\mathfrak{I}'(\neg F(x)) = 0$, načež interpretace celé formule je nepravda:

$$\mathfrak{I}'(\varphi) = 0$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\forall x \neg F(x)$$

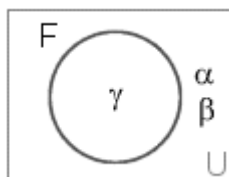
$$1 \ 0 \ \alpha$$

$$0 \ 1 \ \beta$$

$$0 \ 1 \ \gamma$$

$$0$$

Graficky:



b') Interpretace dané formule, aby byla nepravdivá je s využitím krajní možnosti taková, že všechna individua z U náleží do množiny F (tj. $\mathfrak{I}''(F)=U$):

$$\mathfrak{I}''(x)=v(x)=\beta$$

$$\mathfrak{I}''(F)=\{\alpha, \beta, \gamma\}=U$$

protože pro všechny možné valuace bude $\mathfrak{I}''(F(x))=1$, tak bude vždy $\mathfrak{I}''(\neg F(x))=0$, takže:

$$\mathfrak{I}''(\varphi)=0$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\forall x \neg F(x)$$

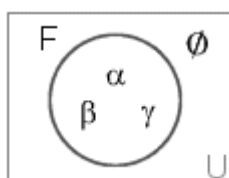
$$0 \ 1 \ \alpha$$

$$0 \ 1 \ \beta$$

$$0 \ 1 \ \gamma$$

$$0$$

Graficky:



9.2 Příklady – interpretace formulí logického čtverce

Výroky spadající pod logický čtverec vyjádřete formulemi predikátové logiky a interpretujte za a) tak, aby daná formule byla pravdivá, za b) tak, aby daná formule byla nepravdivá. Uvažujme jen $U=\{\alpha, \beta, \gamma\}$ (třeba N. Armstrong, F. Borman, J. Gagarin) a $\mathfrak{I}(x)=v(x)=\beta$:

1)

Každý astronaut je bezchybný.

$$\forall x (A(x) \rightarrow B(x))$$

a) Formule říká, že je-li x v množině A , tak je i v množině B . Takže formule bude pravdivá, pokud ani jeden prvek množiny A nebude takový, že by nepatřil do množiny B (takto by $1 \rightarrow 0$ a celá formule by byla následně nepravdivá):

$$\mathfrak{I}(A)=\{\alpha\}$$

$$\mathfrak{I}(B)=\{\alpha, \beta\} \text{ čili } \mathfrak{I}(A) \subseteq \mathfrak{I}(B)$$

takto bude-li interpretace otevřené formule $\mathfrak{I}(A(x))=1$, tak i $\mathfrak{I}(B(x))=1$, pokud však $\mathfrak{I}(A(x))=1$, tak i $\mathfrak{I}(B(x))=1$ nebo $\mathfrak{I}(B(x))=0$, takže vždy $\mathfrak{I}(A(x) \rightarrow B(x))=1$, proto:

$$\mathfrak{I}(\varphi)=1$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\forall x (A(x) \rightarrow B(x))$$

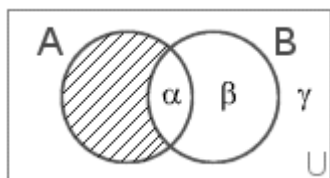
$$1 \quad \alpha \quad 1 \quad 1 \quad \alpha$$

$$0 \quad \beta \quad 1 \quad 1 \quad \beta$$

$$0 \quad \gamma \quad 1 \quad 0 \quad \gamma$$

1

Graficky:



a') Zcela obecně (s využitím krajních možností, stačí mít však jen jednu z nich):

$$\mathfrak{I}'(A)=\emptyset$$

$$\mathfrak{I}'(B)=U$$

pokud $\mathfrak{I}'(A)=\emptyset$, tak bude vždy $\mathfrak{I}'(A(x))=0$, takže bude vždy $\mathfrak{I}'(A(x)\rightarrow B(x))=1$ a celá formule bude mít hodnotu pravda, pokud $\mathfrak{I}'(B)=U$, tak bude vždy $\mathfrak{I}'(B(x))=1$, takže bude vždy $\mathfrak{I}'(A(x)\rightarrow B(x))=1$ a celá formule bude mít také hodnotu pravda, proto:

$$\mathfrak{I}'(\varphi)=1$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\forall x (A(x) \rightarrow B(x))$$

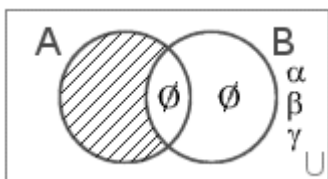
$$0 \quad \alpha \quad 1 \quad 1 \quad \alpha$$

$$0 \quad \beta \quad 1 \quad 1 \quad \beta$$

$$0 \quad \gamma \quad 1 \quad 1 \quad \gamma$$

1

Graficky:



b) Na to, aby formule byla nepravdivá, stačí, aby byl alespoň jeden řádek roven 0 (čili $1\rightarrow 0$), aby celá formule byla 0 (tedy aby jeden prvek množiny A by nebyl v množině B):

$$\mathfrak{I}''(A)=\{\alpha, \beta\}$$

$$\mathfrak{I}''(B)=\{\beta, \gamma\} \text{ čili } \mathfrak{I}''(A) \not\subset \mathfrak{I}''(B) \text{ a } \mathfrak{I}''(B) \neq U$$

pro alespoň jedno ohodnocení x (totiž α) $\mathfrak{I}''(A(x))=1$ a $\mathfrak{I}''(B(x))=0$, takže i $\mathfrak{I}''(A(x)\rightarrow B(x))=0$, proto:

$$\mathfrak{I}''(\varphi)=0$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\forall x (A(x) \rightarrow B(x))$$

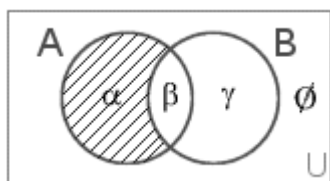
$$1 \quad \alpha \quad 0 \quad 0 \quad \alpha$$

$$1 \quad \beta \quad 1 \quad 1 \quad \beta$$

$$0 \quad \gamma \quad 1 \quad 1 \quad \gamma$$

0

Graficky:



b') Zcela obecně (s využitím obou krajních možností):

$$\mathfrak{I}'''(A)=U$$

$$\mathfrak{I}'''(B)=\emptyset \text{ čili } \mathfrak{I}(B)\subset \mathfrak{I}(A) \text{ a } \mathfrak{I}(A)=U$$

pro všechna možná ohodnocení x bude vždy $\mathfrak{I}'''(A(x))=1$ a $\mathfrak{I}'''(B(x))=0$, následně bude vždy i

$\mathfrak{I}'''(A(x)\wedge B(x))=0$, proto:

$$\mathfrak{I}'''(\varphi)=0$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\forall x (A(x) \rightarrow B(x))$$

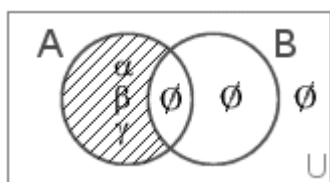
$$1 \quad \alpha \quad 0 \quad 0 \quad \alpha$$

$$1 \quad \beta \quad 0 \quad 0 \quad \beta$$

$$1 \quad \gamma \quad 1 \quad 0 \quad \gamma$$

$$0$$

Graficky:



2)

Někteří astronauti jsou bujaří.

$$\exists x (A(x) \wedge B(x))$$

a) Formule říká, že alespoň jedno individuum je v množině A i v množině B. Stačí proto, aby

byl alespoň jeden řádek roven 1 (čili $1\wedge 0$), aby celá formule byla 1:

$$\mathfrak{I}(A)=\{\alpha\}$$

$$\mathfrak{I}(B)=\{\alpha,\beta\} \text{ čili } \mathfrak{I}(A)\cap\mathfrak{I}(B) \neq \emptyset$$

pro alespoň jedno ohodnocení x (totiž β) $\mathfrak{I}(A(x))=1$ a $\mathfrak{I}(B(x))=1$, takže i $\mathfrak{I}(A(x)\wedge B(x))=1$, proto:

$$\mathfrak{I}(\varphi)=1$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\exists x (A(x) \wedge B(x))$$

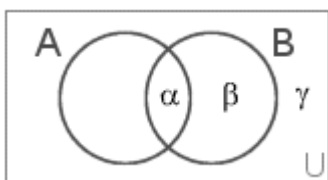
$$1 \quad \alpha \quad 1 \quad 1 \quad \alpha$$

$$0 \quad \beta \quad 1 \quad 1 \quad \beta$$

$$0 \quad \gamma \quad 1 \quad 0 \quad \gamma$$

1

Graficky:



a') Zcela obecně (s využitím krajní možnosti):

$$\mathfrak{I}'(A)=U$$

$$\mathfrak{I}'(B)=U$$

pro všechna možná ohodnocení x bude vždy $\mathfrak{I}'(A(x))=1$ a $\mathfrak{I}'(B(x))=1$, následně bude vždy i $\mathfrak{I}'(A(x)\wedge B(x))=1$, proto:

$$\mathfrak{I}'(\varphi)=1$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\exists x (A(x) \wedge B(x))$$

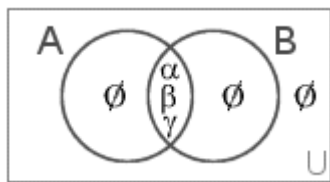
$$1 \quad \alpha \quad 1 \quad 1 \quad \alpha$$

$$1 \quad \beta \quad 1 \quad 1 \quad \beta$$

$$1 \quad \gamma \quad 1 \quad 1 \quad \gamma$$

1

Graficky:



b) Aby formule byla nepravdivá, tak musí být každý řádek roven 0 (nebude tedy žádný společný prvek množiny A a B):

$$\mathfrak{I}''(A) = \{\alpha\}$$

$$\mathfrak{I}''(B) = \{\beta\} \text{ čili } \mathfrak{I}''(A) \cap \mathfrak{I}''(B) = \emptyset$$

pro alespoň jedno ohodnocení x (totiž β) $\mathfrak{I}''(A(x)) = 1$ a $\mathfrak{I}''(B(x)) = 0$ nebo naopak, anebo obě jsou 0, takže i $\mathfrak{I}''(A(x) \wedge B(x)) = 0$, proto:

$$\mathfrak{I}''(\varphi) = 0$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\exists x (A(x) \wedge B(x))$$

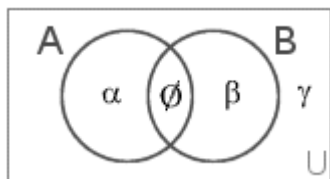
$$1 \quad \alpha \quad 0 \quad 0 \quad \alpha$$

$$0 \quad \beta \quad 0 \quad 1 \quad \beta$$

$$0 \quad \gamma \quad 0 \quad 0 \quad \gamma$$

$$0$$

Graficky:



b') Zcela obecně (s využitím obou krajních možností, stačí však jedna z nich):

$$\mathfrak{I}'''(A) = \emptyset$$

$$\mathfrak{I}'''(B) = \emptyset \text{ čili opět } \mathfrak{I}'''(A) \cap \mathfrak{I}'''(B) = \emptyset, \text{ neboť } \mathfrak{I}'''(A) = \emptyset \text{ i } \mathfrak{I}'''(B) = \emptyset$$

pro všechna možná ohodnocení x bude vždy $\mathfrak{I}'''(A(x)) = 0$ a $\mathfrak{I}'''(B(x)) = 0$, takže následně bude vždy $\mathfrak{I}'''(A(x) \wedge B(x)) = 0$, proto:

$$\mathfrak{I}'''(\varphi) = 0$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\exists x (A(x) \wedge B(x))$$

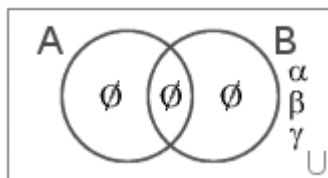
0 α 0 0 α

0 β 0 0 β

0 γ 0 0 γ

0

Graficky:



3)

Žádný astronaut není bojácný.

$$\forall x (A(x) \rightarrow \neg B(x))$$

a) Formule říká, že ani jedno x , které je prvkem množiny A, není v množině B. Takže formule bude pravdivá, pokud ani jeden řádek nebude 0, tedy pokud ani jeden prvek množiny A nebude zároveň prvkem množiny B:

$$\mathfrak{I}(A) = \{\alpha, \beta\}$$

$$\mathfrak{I}(B) = \{\alpha, \beta, \gamma\} \text{ čili } \mathfrak{I}(A) \cap \mathfrak{I}(B) = \emptyset$$

takto pokud $\mathfrak{I}(A(x))=1$, tak $\mathfrak{I}(B(x))=0$ a tedy $\mathfrak{I}(\neg B(x))=1$, pokud $\mathfrak{I}(A(x))=0$, tak $\mathfrak{I}(B(x))=1$ a tedy $\mathfrak{I}(\neg B(x))=0$, takže vždy $\mathfrak{I}(A(x) \rightarrow B(x))=1$, proto:

$$\mathfrak{I}(\varphi)=1$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\forall x (A(x) \rightarrow \neg B(x))$$

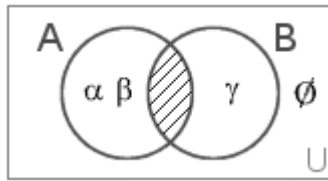
1 α 1 1 0 α

1 β 1 1 0 β

0 γ 1 0 1 γ

1

Graficky:



a') Zcela obecně (s využitím krajních možností, stačí mít však jen jednu z nich):

$$\mathfrak{I}'(A) = \emptyset$$

$$\mathfrak{I}'(B) = \emptyset \text{ čili při } \mathfrak{I}'(A) = \emptyset \text{ může být } \mathfrak{I}'(B) \subseteq U, \text{ při } \mathfrak{I}'(B) = \emptyset \text{ může být } \mathfrak{I}'(A) \subseteq U$$

takto bude vždy $\mathfrak{I}'(A(x)) = 0$ a $\mathfrak{I}'(B(x)) = 0$ a tedy $\mathfrak{I}'(\neg B(x)) = 1$, takže vždy $\mathfrak{I}'(A(x) \rightarrow B(x)) = 1$, proto:

$$\mathfrak{I}'(\varphi) = 1$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\forall x (A(x) \rightarrow \neg B(x))$$

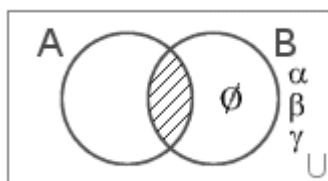
$$0 \alpha \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad \alpha$$

$$0 \beta \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad \beta$$

$$0 \gamma \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad \gamma$$

1

Graficky:



b) Formule bude nepravdivá, pokud alespoň jeden řádek bude 0, což je tehdy, když alespoň jeden prvek množiny A bude zároveň prvkem množiny B:

$$\mathfrak{I}''(A) = \{\alpha, \beta\}$$

$$\mathfrak{I}''(B) = \{\alpha\} \text{ čili } \mathfrak{I}''(A) \cap \mathfrak{I}''(B) \neq \emptyset$$

jestliže valuace přiřadí α , tak bude $\mathfrak{I}''(A(x)) = 1$ a $\mathfrak{I}''(B(x)) = 1$ a tedy $\mathfrak{I}''(\neg B(x)) = 0$, takže vždy $\mathfrak{I}''(A(x) \rightarrow B(x)) = 0$, což už stačí na to, aby:

$$\mathfrak{I}''(\varphi) = 0$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\forall x (A(x) \rightarrow \neg B(x))$$

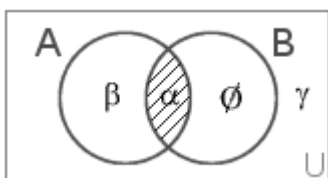
$$1 \alpha \ 0 \ 0 \ 1 \ \alpha$$

$$1 \beta \ 1 \ 1 \ 0 \ \beta$$

$$0 \gamma \ 1 \ 1 \ 0 \ \gamma$$

0

Graficky:



b') Zcela obecně (s využitím krajní možnosti):

$$\mathfrak{I}'''(A)=U$$

$$\mathfrak{I}'''(B)=U \text{ čili } \mathfrak{I}'''(B) \subseteq \mathfrak{I}'''(A) = U \text{ (či: } \mathfrak{I}'''(B) \cap \mathfrak{I}'''(A) = U)$$

takto bude vždy $\mathfrak{I}'''(A(x))=1$ a $\mathfrak{I}'''(B(x))=1$ a tedy $\mathfrak{I}'''(\neg B(x))=0$, takže vždy

$\mathfrak{I}'''(A(x) \rightarrow B(x))=0$, proto:

$$\mathfrak{I}'''(\varphi)=0$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\forall x (A(x) \rightarrow \neg B(x))$$

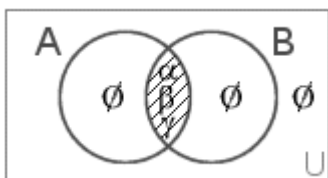
$$1 \alpha \ 0 \ 0 \ 1 \ \alpha$$

$$1 \beta \ 0 \ 0 \ 1 \ \beta$$

$$1 \gamma \ 0 \ 0 \ 1 \ \gamma$$

0

Graficky:



4)

Někteří astronauti nejsou blíženci.

$$\exists x (A(x) \wedge \neg B(x))$$

a) Formule říká, že alespoň jedno individuum je v A, ale není v B. Takže formule bude pravdivá, pokud bude alespoň jeden prvek množiny A, který není prvkem množiny B:

$$\mathfrak{I}(A)=\{\alpha,\beta\}$$

$$\mathfrak{I}(B)=\{\beta,\gamma\} \text{ čili } \mathfrak{I}(A)\cup\mathfrak{I}(B) \neq \mathfrak{I}(B) \text{ (tj. mj. } \mathfrak{I}(A)\neq\emptyset)$$

takto pro α bude $\mathfrak{I}(A(x))=1$ a $\mathfrak{I}(B(x))=0$, pak $\mathfrak{I}(\neg B(x))=1$, takže alespoň jednou bude $\mathfrak{I}(A(x)\wedge\neg B(x))=1$, proto:

$$\mathfrak{I}(\varphi)=1$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\exists x (A(x) \wedge \neg B(x))$$

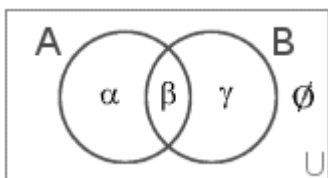
$$1 \alpha \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad \alpha$$

$$1 \beta \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad \beta$$

$$0 \gamma \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad \gamma$$

1

Graficky:



a') Zcela obecně (s využitím obou krajních možností):

$$\mathfrak{I}'(A)=U$$

$$\mathfrak{I}'(B)=\emptyset \text{ čili opět } \mathfrak{I}'(A)\cup\mathfrak{I}'(B) \neq \mathfrak{I}'(B)$$

takto bude vždy $\mathfrak{I}'(A(x))=1$ a $\mathfrak{I}'(B(x))=0$ a pak $\mathfrak{I}'(\neg B(x))=1$, takže bude vždy $\mathfrak{I}'(A(x)\wedge\neg B(x))=1$, proto:

$$\mathfrak{I}'(\varphi)=1$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\exists x (A(x) \wedge \neg B(x))$$

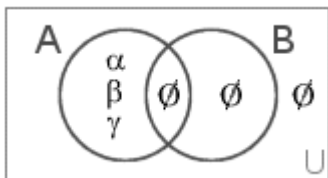
$$1 \alpha \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad \alpha$$

$$1 \beta \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \beta$$

1 γ 0 1 0 γ

1

Graficky:



b) Formule bude pravdivá, pokud ani jeden prvek množiny A nebude prvkem množiny B, stačí totiž, aby žádný řádek nebyl roven 1, aby celá formule byla 0:

$$\mathfrak{I}''(A) = \{\alpha\}$$

$$\mathfrak{I}''(B) = \{\alpha, \gamma\} \text{ čili } \mathfrak{I}''(A) \cup \mathfrak{I}''(B) = \mathfrak{I}''(B)$$

takto pro určitou hodnotu x bude buďto $\mathfrak{I}''(A(x)) = 1$ a $\mathfrak{I}''(\neg B(x)) = 0$, anebo $\mathfrak{I}''(A(x)) = 0$ a $\mathfrak{I}''(\neg B(x)) = 0$, takže bude vždy $\mathfrak{I}''(A(x) \wedge \neg B(x)) = 0$, proto:

$$\mathfrak{I}''(\varphi) = 0$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\exists x (A(x) \wedge \neg B(x))$$

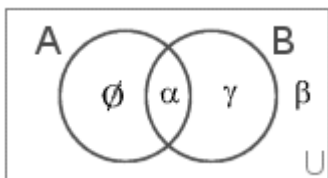
1 α 0 0 1 α

0 β 0 1 0 β

0 γ 0 0 1 γ

0

Graficky:



b') Zcela obecně (s využitím krajních možností, stačí mít však jen jednu z nich):

$$\mathfrak{I}'''(A) = \emptyset$$

$\mathfrak{I}'''(B) = U$ čili pokud $\mathfrak{I}'''(A) = \emptyset$, tak může být $\mathfrak{I}'''(B) \subseteq U$; pokud $\mathfrak{I}'''(B) = \emptyset$, tak může být $\mathfrak{I}'''(A) \subseteq U$

takto buďto interpretace $A(x)$, anebo interpretace $B(x)$ bude vždy 1 a $\mathfrak{I}'''(\neg B(x))=1$, takže bude vždy $\mathfrak{I}'''(A(x) \wedge \neg B(x))=0$, proto:

$$\mathfrak{I}'''(\varphi)=0$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\exists x (A(x) \wedge \neg B(x))$$

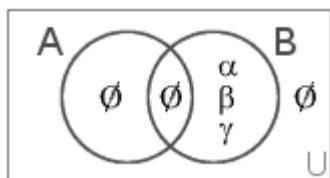
$$0 \quad \alpha \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad \alpha$$

$$0 \quad \beta \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad \beta$$

$$0 \quad \gamma \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad \gamma$$

$$0$$

Graficky:



9.3 Příklady – interpretace formulí s binárními predikáty

Věty přirozeného jazyka vyjádřete formulemi predikátové logiky a interpretujte za a) tak, aby daná formule byla pravdivá, za b) tak, aby daná formule byla nepravdivá:

1)

Magda má ráda Petra.

$$R(m,p)$$

a) Formule bude pravdivá, pokud dvojice Magda a Petr patří do množiny dvojic individuí, která jsou ve vztahu R:

$$U=\{\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu, \pi, \dots\}$$

$$\mathfrak{I}(m)=S(m)=\mu$$

$$\mathfrak{I}(p)=S(p)=\pi$$

$$\mathfrak{I}(R)=\{\langle \mu, \pi \rangle, \dots\} \text{ čili } \langle \mu, \pi \rangle \in R \text{ (} R=U^2 \text{)}$$

$$\mathfrak{I}(\varphi)=1$$

Sloupečkové vyjádření (podtržením bude značit, že tato dvojice je prvkem množiny, která je interpretací predikátu):

$$R(m, p)$$

$$1 \quad \underline{\mu \quad \pi}$$

b)

$$U = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu, \pi, \dots\}$$

$$\mathfrak{I}(m) = \mathcal{S}(m) = \mu$$

$$\mathfrak{I}(p) = \mathcal{S}(p) = \pi$$

$$\mathfrak{I}(R) = \{\langle \mu, \pi \rangle, \dots\} \text{ čili } \langle \mu, \pi \rangle \in R \text{ (} R = U^2 \text{)}$$

$$\mathfrak{I}(\varphi) = 1$$

Sloupečkové vyjádření:

$$R(m, p)$$

$$0 \quad \mu \quad \pi$$

2)

Magda má ráda někoho.

$$\exists x R(m, x)$$

a) Formule bude pravdivá, pokud mezi dvojicemi individuí, které se mají rádi (jsou vztaženi relací R) je alespoň jedna taková, že jejím prvním členem je Magda, tedy že je alespoň jedno individuum takové, že Magda k němu má vztah „mít ráda“:

$$U = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu, \pi, \dots\}$$

$$\mathfrak{I}(m) = \mathcal{S}(m) = \mu$$

$$\mathfrak{I}(x) = \nu(x) = \beta$$

$$\mathfrak{I}(R) = \{\langle \mu, \alpha \rangle\} \text{ čili } \mathfrak{I}(R) \neq \emptyset$$

$$\mathfrak{I}(\varphi) = 1$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\exists x R(m, x)$$

$$1 \quad \underline{\mu \quad \alpha}$$

$$0 \quad \mu \quad \beta$$

$$0 \quad \mu \quad \gamma$$

1

b) Formule bude nepravdivá, pokud μ není ve vztahu R ani k jednomu x (prvku U):

$$U = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu, \pi, \dots\}$$

$$\mathfrak{I}(m) = \mathcal{S}(m) = \mu$$

$$\mathfrak{I}(x) = \nu(x) = \alpha$$

$$\mathfrak{I}(R) = \{\langle \mu, \alpha \rangle, \langle \mu, \beta \rangle, \langle \mu, \gamma \rangle\} \text{ čili } \mathfrak{I}(R) = \emptyset \text{ (tj. } U^2 \text{)}$$

$$\mathfrak{I}(\varphi) = 0$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\exists x R(m, x)$$

$$0 \quad \mu \quad \alpha$$

$$0 \quad \mu \quad \beta$$

$$0 \quad \mu \quad \gamma$$

0

3)

Někdo má rád Petra.

$$\exists x R(x, p)$$

a) Formule bude pravdivá, pokud Petr je tím, k němuž je alespoň jedno individuum v relaci R (má Petra rádo):

$$U = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu, \pi, \dots\}$$

$$\mathfrak{I}(p) = \mathcal{S}(p) = \pi$$

$$\mathfrak{I}(x) = \nu(x) = \alpha$$

$$\mathfrak{I}(R) = \{\langle \gamma, \pi \rangle\} \text{ čili } \mathfrak{I}(R) \neq \emptyset$$

$$\mathfrak{I}(\varphi) = 1$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\exists x R(x, p)$$

$$0 \quad \alpha \quad \pi$$

$$0 \quad \beta \quad \pi$$

$$1 \quad \underline{\gamma \pi}$$

$$1$$

b)

$$U = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu, \pi, \dots\}$$

$$\mathfrak{I}(m) = \mathcal{S}(m) = \mu$$

$$\mathfrak{I}(x) = \nu(x) = \alpha$$

$$\mathfrak{I}(R) = \{\langle \alpha, \pi \rangle, \langle \beta, \pi \rangle, \langle \gamma, \pi \rangle\} \text{ čili } \mathfrak{I}(R) = \emptyset \text{ (tj. } U^{2^0})$$

$$\mathfrak{I}(\varphi) = 0$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\exists x R(x, \pi)$$

$$0 \quad \alpha \quad \pi$$

$$0 \quad \beta \quad \pi$$

$$0 \quad \gamma \quad \pi$$

$$0$$

4)

Někdo má rád někoho.

$$\exists x \exists y R(x, y)$$

a) Formule bude pravdivá, pokud existuje alespoň jedna dvojice individuí, které jsou spolu v relaci R:

$$\mathfrak{I}(x) = \nu(x) = \gamma$$

$$\mathfrak{I}(y) = \nu(y) = \alpha$$

$$\mathfrak{I}(R) = \{\langle \alpha, \beta \rangle\} \text{ čili } \mathfrak{I}(R) \neq \emptyset$$

$$\mathfrak{I}(\varphi) = 1$$

Sloupečkové vyjádření (pro lepší orientaci též podtrhujeme dvojici, pro kterou je daná formule pravdivá):

$$\exists x \exists y R(x, y)$$

0 $\alpha \alpha$

1 $\alpha \beta$

0 $\alpha \gamma$

0 $\beta \alpha$

0 $\beta \beta$

0 $\beta \gamma$

0 $\gamma \alpha$

0 $\gamma \beta$

0 $\gamma \gamma$

1

b) Formule bude pravdivá, pokud není ani jedna dvojice individuí, které jsou spolu v relaci R:

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \gamma$$

$$\mathfrak{I}(y) = v(y) = \alpha$$

$$\mathfrak{I}(R) = \{ \langle \alpha, \alpha \rangle, \langle \alpha, \beta \rangle, \langle \alpha, \gamma \rangle, \langle \beta, \alpha \rangle, \langle \beta, \beta \rangle, \langle \beta, \gamma \rangle, \langle \gamma, \alpha \rangle, \langle \gamma, \beta \rangle, \langle \gamma, \gamma \rangle \}$$

$$\text{čili } \mathfrak{I}(R) = \emptyset = U^{2-}$$

$$\mathfrak{I}(\varphi) = 0$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\exists x \exists y R(x, y)$$

0 $\alpha \alpha$

0 $\alpha \beta$

0 $\alpha \gamma$

0 $\beta \alpha$

0 $\beta \beta$

0 $\beta \gamma$

0 $\gamma \alpha$

0 $\gamma \beta$

0 $\gamma \gamma$

0

b') Rovnou mohla být volena možnost, kdy R je $\emptyset$:

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \beta$$

$$\mathfrak{I}(y) = v(y) = \alpha$$

$$\mathfrak{I}(R) = \emptyset = U^2$$

$$\mathfrak{I}(\varphi) = 0$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\forall x \forall y R(x, y)$$

$$0 \quad \alpha \quad \alpha$$

$$0 \quad \alpha \quad \beta$$

$$0 \quad \alpha \quad \gamma$$

$$0 \quad \beta \quad \alpha$$

$$0 \quad \beta \quad \beta$$

$$0 \quad \beta \quad \gamma$$

$$0 \quad \gamma \quad \alpha$$

$$0 \quad \gamma \quad \beta$$

$$0 \quad \gamma \quad \gamma$$

$$0$$

5)

Všichni mají rádi všechny.

$$\forall x \forall y R(x, y)$$

a) Formule bude pravdivá, pokud všechny dvojice individuí kartézského součinu univerza (U^2) je k sobě vztaženy relací R:

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \beta$$

$$\mathfrak{I}(y) = v(y) = \alpha$$

$$\mathfrak{I}(R) = \{ \langle \alpha, \alpha \rangle, \langle \alpha, \beta \rangle, \langle \alpha, \gamma \rangle, \langle \beta, \alpha \rangle, \langle \beta, \beta \rangle, \langle \beta, \gamma \rangle, \langle \gamma, \alpha \rangle, \langle \gamma, \beta \rangle, \langle \gamma, \gamma \rangle \} \text{ čili } \mathfrak{I}(R) = U^2$$

$$\mathfrak{I}(\varphi) = 1$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\forall x \forall y R(x, y)$$

1 α α

1 α β

1 α γ

1 β α

1 β β

1 β γ

1 γ α

1 γ β

1 γ γ

1

b)

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \beta$$

$$\mathfrak{I}(y) = v(y) = \alpha$$

$$\mathfrak{I}(R) = \{ \langle \alpha, \alpha \rangle, \langle \alpha, \beta \rangle, \langle \alpha, \gamma \rangle, \langle \beta, \alpha \rangle, \langle \beta, \beta \rangle, \langle \beta, \gamma \rangle, \langle \gamma, \alpha \rangle, \langle \gamma, \beta \rangle, \langle \gamma, \gamma \rangle \} \text{ čili } \mathfrak{I}(R) \neq U^2$$

$$\mathfrak{I}(\varphi) = 0$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\forall x \forall y R(x, y)$$

0 α α

1 α β

1 α γ

1 β α

1 β β

1 β γ

1 γ α

1 γ β

1 γ γ

0

b')

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \beta$$

$$\mathfrak{I}(y) = v(y) = \alpha$$

$$\mathfrak{I}(R) = \emptyset = U^2$$

$$\mathfrak{I}(\varphi) = 0$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\forall x \forall y R(x, y)$$

$$0 \quad \alpha \quad \alpha$$

$$0 \quad \alpha \quad \beta$$

$$0 \quad \alpha \quad \gamma$$

$$0 \quad \beta \quad \alpha$$

$$0 \quad \beta \quad \beta$$

$$0 \quad \beta \quad \gamma$$

$$0 \quad \gamma \quad \alpha$$

$$0 \quad \gamma \quad \beta$$

$$0 \quad \gamma \quad \gamma$$

$$0$$

6)

Nikdo nemá rád nikoho. (= Každý má každého nerad.)

$$\forall x \forall y \neg R(x, y)$$

a) Formule bude pravdivá, pokud pro všechna x a pro všechna y ($z U^2$) platí, že k sobě nejsou vztaženy relací R :

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \beta$$

$$\mathfrak{I}(y) = v(y) = \alpha$$

$$\mathfrak{I}(R) = \emptyset$$

$$\mathfrak{I}(\varphi) = 1$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\forall x \forall y \neg R(x, y)$$

$$1 \quad 0 \quad \alpha \quad \alpha$$

1 0 α β

1 0 α γ

1 0 β α

1 0 β β

1 0 β γ

1 0 γ α

1 0 γ β

1 0 γ γ

1

b) Formule bude nepravdivá, pokud alespoň jedna dvojice individuí (z U^2) je k sobě vztažena relací R:

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \beta$$

$$\mathfrak{I}(y) = v(y) = \alpha$$

$$\mathfrak{I}(R) = \{\langle \alpha, \beta \rangle\} \text{ čili } \mathfrak{I}(R) \subseteq U^2$$

$$\mathfrak{I}(\varphi) = 0$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\forall x \forall y \neg R(x, y)$$

1 0 α α

0 1 α β

1 0 α γ

1 0 β α

1 0 β β

1 0 β γ

1 0 γ α

1 0 γ β

1 0 γ γ

0

b') Obecněji (s využitím krajní možnosti)

$$\mathfrak{I}(x)=v(x)=\beta$$

$$\mathfrak{I}(y)=v(y)=\alpha$$

$$\mathfrak{I}(R)=\{<\alpha,\alpha>,<\alpha,\beta>,<\alpha,\gamma>,<\beta,\alpha>,<\beta,\beta>,<\beta,\gamma>,<\gamma,\alpha>,<\gamma,\beta>,<\gamma,\gamma>\} \text{ čili } \mathfrak{I}(R)=U^2$$

$$\mathfrak{I}(\varphi)=0$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\forall x \forall y \neg R(x, y)$$

$$0 \ 1 \ \underline{\alpha} \ \underline{\alpha}$$

$$0 \ 1 \ \underline{\alpha} \ \underline{\beta}$$

$$0 \ 1 \ \underline{\alpha} \ \underline{\gamma}$$

$$0 \ 1 \ \underline{\beta} \ \underline{\alpha}$$

$$0 \ 1 \ \underline{\beta} \ \underline{\beta}$$

$$0 \ 1 \ \underline{\beta} \ \underline{\gamma}$$

$$0 \ 1 \ \underline{\gamma} \ \underline{\alpha}$$

$$0 \ 1 \ \underline{\gamma} \ \underline{\beta}$$

$$0 \ 1 \ \underline{\gamma} \ \underline{\gamma}$$

0

7)

Někdo má rád každého.

$$\exists x \forall y R(x,y)$$

a) Formule bude pravdivá, pokud alespoň jedno individuum z univerza je takové, že je v relaci

R ke všem prvkům univerza, ke všem individuíům:

$$\mathfrak{I}(x)=v(x)=\alpha$$

$$\mathfrak{I}(y)=v(y)=\gamma$$

$$\mathfrak{I}(R)=\{<\beta,\alpha>,<\beta,\beta>,<\beta,\gamma>\}$$

$$\mathfrak{I}(\varphi)=1$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\exists x \forall y R(x, y)$$

0 α α

0 α β

0 α γ

1 β α

1 β β

1 β γ

0 γ α

0 γ β

0 γ γ

1

b)

$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \alpha$

$\mathfrak{I}(y) = v(y) = \gamma$

$\mathfrak{I}(R) = \{ \langle \beta, \alpha \rangle, \langle \beta, \beta \rangle, \langle \beta, \gamma \rangle \}$

$\mathfrak{I}(\varphi) = 0$

Sloupečkové vyjádření:

$\exists x \forall y R(x, y)$

0 α α

0 α β

0 α γ

1 β α

0 β β

1 β γ

0 γ α

0 γ β

0 γ γ

0

b') Obecněji (s využitím krajní možnosti):

$$\mathfrak{I}(x)=v(x)=\alpha$$

$$\mathfrak{I}(y)=v(y)=\gamma$$

$$\mathfrak{I}(R)=\emptyset$$

$$\mathfrak{I}(\varphi)=0$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\exists x \forall y R(x, y)$$

$$0 \quad \alpha \quad \alpha$$

$$0 \quad \alpha \quad \beta$$

$$0 \quad \alpha \quad \gamma$$

$$0 \quad \beta \quad \alpha$$

$$0 \quad \beta \quad \beta$$

$$0 \quad \beta \quad \gamma$$

$$0 \quad \gamma \quad \alpha$$

$$0 \quad \gamma \quad \beta$$

$$0 \quad \gamma \quad \gamma$$

$$0$$

8)

Každý má rád někoho.

$$\forall x \exists y R(x, y)$$

a) Formule bude pravdivá, pokud pro všechna jednotlivá individua platí, že je v relaci R k alespoň jednomu individuu:

$$\mathfrak{I}(x)=v(x)=\beta$$

$$\mathfrak{I}(y)=v(y)=\alpha$$

$$\mathfrak{I}(R)=\{<\alpha, \beta>, <\beta, \gamma>, <\gamma, \beta>\}$$

$$\mathfrak{I}(\varphi)=1$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\forall x \exists y R(x, y)$$

$$0 \quad \alpha \quad \alpha$$

$$1 \quad \underline{\alpha \beta}$$

$$0 \quad \alpha \gamma$$

$$0 \quad \beta \alpha$$

$$0 \quad \beta \beta$$

$$1 \quad \underline{\beta \gamma}$$

$$0 \quad \gamma \alpha$$

$$1 \quad \underline{\gamma \beta}$$

$$0 \quad \gamma \gamma$$

1

b) Formule bude nepravdivá, pokud nebude každé individuum platit, že je v relaci R k alespoň jednomu individuu:

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \beta$$

$$\mathfrak{I}(y) = v(y) = \alpha$$

$$\mathfrak{I}(R) = \{ \langle \alpha, \beta \rangle, \langle \beta, \gamma \rangle, \langle \gamma, \beta \rangle \}$$

$$\mathfrak{I}(\varphi) = 1$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\forall x \exists y R(x, y)$$

$$0 \quad \alpha \quad \alpha$$

$$0 \quad \alpha \quad \beta$$

$$0 \quad \alpha \quad \gamma$$

$$0 \quad \beta \quad \alpha$$

$$0 \quad \beta \quad \beta$$

$$1 \quad \underline{\beta \gamma}$$

$$0 \quad \gamma \quad \alpha$$

$$1 \quad \underline{\gamma \beta}$$

$$0 \quad \gamma \quad \gamma$$

0

b') Obecněji (s využitím krajní možnosti):

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \beta$$

$$\mathfrak{I}(y) = v(y) = \alpha$$

$$\mathfrak{I}(R) = \emptyset$$

$$\mathfrak{I}(\varphi) = 1$$

Sloupečkové vyjádření:

$$\forall x \exists y R(x, y)$$

$$0 \quad \alpha \quad \alpha$$

$$0 \quad \alpha \quad \beta$$

$$0 \quad \alpha \quad \gamma$$

$$0 \quad \beta \quad \alpha$$

$$0 \quad \beta \quad \beta$$

$$0 \quad \beta \quad \gamma$$

$$0 \quad \gamma \quad \alpha$$

$$0 \quad \gamma \quad \beta$$

$$0 \quad \gamma \quad \gamma$$

$$0$$

9.4 Příklady - interpretace formulí za určitých stanovených okolností

1)

Je-li dáno:

$$U = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

$$\mathfrak{I}(P) = \{\beta\}$$

navrhněte takovou valuaci, při níž bude pravdivá formule:

$$P(x).$$

Protože $P(x)$ je otevřenou formulí, neboť jediný výskyt její jediné proměnné je volný, bude pravdivá při dané interpretaci predikátového symbolu P jen tehdy, když

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \beta$$

Při všech jiných valuacích bude nepravdivá.

2)

Je-li dáno:

$$U = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

$$\mathfrak{I}(P) = \{\beta, \gamma\}$$

$$\mathfrak{I}(b) = S(b) = \beta$$

zjistěte pravdivost (otevřené) formule při této interpretaci:

$$P(x) \wedge P(b)$$

Nejprve je třeba stanovit valuaci (resp. interpretaci) pro x .

a) Tedy třeba $\mathfrak{I}(x) = v(x) = \beta$; následně je formule $P(x) \wedge P(b)$ pravdivá v této interpretaci.

b) Při jiné valuaci pro x , např. γ , však formule $P(x) \wedge P(b)$ pravdivá není.

Tudíž tato formule není pravdivá v této interpretaci $\mathfrak{I}$, protože nenabývá hodnoty pravda při žádné valuaci.

3)

Je-li dáno:

$$U = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

$$\mathfrak{I}(P) = \{\beta, \gamma\}$$

$$\mathfrak{I}(R) = \{ \langle \alpha, \beta \rangle, \langle \beta, \gamma \rangle \}$$

zjistěte při jakých valuacích bude pravdivá formule:

$$P(x) \wedge \exists xy R(x, y).$$

Protože daná formule je otevřenou formulí, kde první výskyt proměnné x je volný, bude pravdivá či nepravdivá při daných interpretacích predikátových symbolů v závislosti na valuacích pro proměnnou x . Právý člen konjunkce bude vždy pravdivý.

a) Jestliže

$$\mathfrak{I}(x) = v(x) = \alpha$$

pak formule je při dané interpretaci a této valuaci nepravdivá. Sloupečkové vyjádření:

$$P(x) \wedge \exists xy R(x, y)$$

$$\alpha \quad 0 \quad 1 \quad \{ \quad 0 \quad \alpha \quad \alpha$$

$$0 \quad \underline{\alpha} \quad \underline{\beta}$$

$$0 \quad \alpha \quad \gamma$$

$$0 \quad \beta \quad \alpha$$

$$0 \quad \beta \quad \beta$$

$$1 \quad \underline{\beta} \quad \underline{\gamma}$$

$$0 \quad \gamma \quad \alpha$$

$$0 \quad \gamma \quad \beta$$

$$0 \quad \gamma \quad \gamma$$

b) Jestliže:

$$\mathfrak{I}'(x) = v(x) = \beta$$

pak formule je při dané interpretaci a této valuaci pravdivá. Sloupečkové vyjádření:

$$P(x) \wedge \exists xy R(x, y)$$

$$\beta \quad 1 \quad 1 \quad \{ \quad 0 \quad \alpha \quad \alpha$$

$$0 \quad \underline{\alpha} \quad \underline{\beta}$$

$$0 \quad \alpha \quad \gamma$$

$$0 \quad \beta \quad \alpha$$

$$0 \quad \beta \quad \beta$$

$$1 \quad \underline{\beta} \quad \underline{\gamma}$$

$0 \gamma \alpha$

$0 \gamma \beta$

$0 \gamma \gamma$

c) Jestliže:

$$\mathfrak{I}^{\omega}(x) = v(x) = \gamma$$

pak formule je opět při dané interpretaci a této valuaci pravdivá. Sloupečkové vyjádření:

$$P(x) \wedge \exists xy R(x, y)$$

$\beta \quad 1 \quad 1 \quad \{ \quad 0 \alpha \alpha$

$0 \alpha \beta$

$0 \alpha \gamma$

$0 \beta \alpha$

$0 \beta \beta$

$1 \beta \gamma$

$0 \gamma \alpha$

$0 \gamma \beta$

$0 \gamma \gamma$

4)

Je-li dáno:

$$U = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

zjistěte pravdivostní hodnotu (otevřené) formule:

$$\forall x P(x) \rightarrow P(x)$$

Lze zjistit, že daná formule je logicky pravdivá (tj. je pravdivá v každé interpretaci). V

a) zkoumáme příznivou interpretaci, v b) navrhuje takovou interpretaci, aby pravdivá nebyla; ta ovšem nepůjde prosadit.

a) Je-li interpretace predikátového symbolu P:

$$\mathfrak{I}(P) = \{\alpha, \beta, \gamma\} \text{ čili } \mathfrak{I}(P) = U$$

tak při jakékoli valuaci pro x , např. tedy $v(x)=\alpha$, nabývá otevřená podformule $\mathfrak{I}(P(x))$ interpretaci pravdivostní hodnoty 1. Takže i $\forall x P(x)$ nabývá v jakékoli interpretaci při daných valuacích pravdivostní hodnoty 1. Je-li antecedent pravdivý a konsekvent také, věta tvaru implikace je pravdivá. Tedy věta je pravdivá v této interpretaci (jde tu zejm. o interpretaci predikátového symbolu) při každé valuaci. Sloupečkové vyjádření (svorkou-závorkou poukážeme na celkovou pravdivostní hodnotu $\forall x P(x)$, jednotlivé řádky odpovídají valuaci a interpretaci proměnné x):

$$\forall x P(x) \rightarrow P(x)$$

$$1 \quad \alpha \quad 1 \quad 1 \quad \alpha$$

$$1 \quad \beta \quad 1 \quad 1 \quad \beta$$

$$1 \quad \gamma \quad 1 \quad 1 \quad \gamma$$

$$1$$

b) Je-li interpretace predikátového symbolu P např.:

$$\mathfrak{I}(P) = \{\beta, \gamma\} \text{ čili } \mathfrak{I}(P) \subset U$$

a valuační nám pro proměnnou x dodá takový prvek univerza, který není v interpretaci P , tedy např. $v(x)=\alpha$, tak $\mathfrak{I}(P(x))=0$ (stejně tak $\mathfrak{I}(\forall x P(x))$). Ovšem je-li antecedent nepravdivý, věta tvaru implikace je pravdivá. Tedy věta je opět pravdivá i v této (nepříznivé) interpretaci při jakékoli valuaci. Sloupečkové vyjádření:

$$\forall x P(x) \rightarrow P(x)$$

$$0 \quad \alpha \quad 1 \quad 0 \quad \alpha$$

$$1 \quad \beta \quad 1 \quad 1 \quad \beta$$

$$1 \quad \gamma \quad 1 \quad 1 \quad \gamma$$

$$0$$

b') Je-li interpretace predikátového symbolu P :

$$\mathfrak{I}(P) = \emptyset \text{ (tj. } \mathfrak{I}(P) \subset U, \text{ resp. } \mathfrak{I}(P) = U^c)$$

tak nám valuace pro proměnnou x vždy dodá prvek univerza, který není v interpretaci P . Díky tomu, že je-li antecedent nepravdivý, věta tvaru implikace je pravdivá i v této (krajní) interpretaci. Sloupečkové vyjádření:

$$\forall x P(x) \rightarrow P(x)$$

$$0 \quad \alpha \quad 1 \quad 0 \quad \alpha$$

$$0 \quad \beta \quad 1 \quad 0 \quad \beta$$

$$0 \quad \gamma \quad 1 \quad 0 \quad \gamma$$

$$0$$

5)

Je-li dáno:

$$U = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

$$\mathfrak{I}(R) = \{\langle \alpha, \beta \rangle, \langle \beta, \beta \rangle, \langle \gamma, \alpha \rangle\}$$

zjistěte pravdivost (otevřené) následující formule při dané interpretaci predikátového symbolu R :

$$\forall x R(x, y)$$

a) Je-li:

$$v(y) = \alpha$$

pak ze sloupečkového vyjádření:

$$\forall x R(x, y)$$

$$0 \quad \alpha \quad \alpha$$

$$0 \quad \beta \quad \alpha$$

$$1 \quad \underline{\gamma} \quad \alpha$$

vidíme, že ne všechna x jsou v relaci R k α (hodnotě proměnné y), při této valuaci a interpretaci predikátového symbolu je formule nepravdivá.

b) Je-li:

$$v(y)=\beta$$

pak ze sloupečkového vyjádření:

$$\forall x R(x, y)$$

$$1 \quad \underline{\alpha \quad \beta}$$

$$1 \quad \underline{\beta \quad \beta}$$

$$0 \quad \gamma \quad \beta$$

vidíme, že opět nejsou všechna x v relaci R k β (hodnotě proměnné y), při této valuaci a interpretaci predikátového symbolu je tedy formule nepravdivá.

c) Je-li:

$$v(y)=\gamma$$

pak ze sloupečkového vyjádření:

$$\forall x R(x, y)$$

$$1 \quad \underline{\alpha \quad \gamma}$$

$$0 \quad \beta \quad \gamma$$

$$0 \quad \gamma \quad \gamma$$

znovu vidíme, že ne všechna x jsou v relaci R ke γ (hodnotě proměnné y), při této valuaci a interpretaci predikátového symbolu je formule nepravdivá.

Shrňme: při této interpretaci predikátového symbolu je daná formule nepravdivá (a to pro všechny valuace volné proměnné y).