INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0216, OPVK)

Úvod do logiky (PL): negace a ekvivalence vět mimo logický čtverec (cvičení)

doc. PhDr. Jiří Raclavský, Ph.D.

(raclavsky@phil.muni.cz)

8. Negace a ekvivalence formulí, které nespadají pod logický čtverec – cvičení

8.1 Příklady – negace vět, které nespadají pod logický čtverec

Následující věty převeďte do predikátové logiky a sestavte její negaci, tu převeďte na ekvivalentní formuli a slovně vyjádřete:

1)

Všichni bohatí lidé jsou šťastní.

Formalizace:

$\forall x\ (\ (\mathrm{B}(x) \wedge \mathrm{L}(x)) \rightarrow \check{\mathrm{S}}(x))\ )$

Negace:

$\neg\forall x\ (\ (\mathrm{B}(x) \wedge \mathrm{L}(x)) \rightarrow \check{\mathrm{S}}(x))\ )$

Ekvivalenty negace:

$\leftrightarrow \exists x\ \neg(\ (\mathrm{B}(x) \wedge \mathrm{L}(x)) \rightarrow \check{\mathrm{S}}(x))\ )$ DM zákon pro kvantifikátory

$\leftrightarrow \exists x\ (\ (\mathrm{B}(x) \wedge \mathrm{L}(x)) \wedge \neg\check{\mathrm{S}}(x))\ )$ taut. VL (negovaná $\rightarrow$ je $\wedge$ negace)

Tedy: Někteří bohatí lidé nejsou šťastní.

2)

Někteří šťastní lidé nejsou bohatí.

(=Existují šťastní lidé, kteří nejsou bohatí.)

Formalizace:

$\exists x\ (\ (\check{\mathrm{S}}(x) \wedge \mathrm{L}(x)) \wedge \neg\mathrm{B}(x))\ )$

Negace:

$\neg\exists x\ (\ (\check{\mathrm{S}}(x) \wedge \mathrm{L}(x)) \wedge \neg\mathrm{B}(x))\ )$

Ekvivalenty negace:

$\leftrightarrow \forall x\ \neg(\ (\check{\mathrm{S}}(x) \wedge \mathrm{L}(x)) \wedge \neg\mathrm{B}(x))\ )$ DM zákon pro kvantifikátory

$\leftrightarrow \forall x\ (\ \neg(\check{\mathrm{S}}(x) \wedge \mathrm{L}(x)) \vee \neg\neg\mathrm{B}(x))\ )$ taut. VL (negovaná $\vee$ je $\wedge$ negací)

$\leftrightarrow \forall x\ (\ \neg(\check{\mathrm{S}}(x) \wedge \mathrm{L}(x)) \vee \mathrm{B}(x))\ )$ taut. VL (zákon dvojí negace)

$\leftrightarrow \forall x\ (\ (\check{\mathrm{S}}(x) \wedge \mathrm{L}(x)) \rightarrow \mathrm{B}(x))\ )$ taut. VL (převod $\vee$ na $\rightarrow$)

Tedy: Všichni šťastní lidé jsou bohatí.

3)

Žádné sudé číslo není dělitelné třemi a pěti.

Formalizace:

$\forall x$ ((Č(x)$\wedge$S(x)) $\rightarrow$ $\neg$((Děl(x,3)$\wedge$Děl(x,5)))

Negace:

$\neg\forall x$ ((Č(x)$\wedge$S(x)) $\rightarrow$ $\neg$((Děl(x,3)$\wedge$Děl(x,5)))

Ekvivalenty negace:

$\leftrightarrow \exists x$ $\neg$((Č(x)$\wedge$S(x)) $\rightarrow$ $\neg$((Děl(x,3)$\wedge$Děl(x,5)))	DM zákon pro kvantifikátory
$\leftrightarrow \exists x$ ((Č(x)$\wedge$S(x)) $\wedge$ $\neg\neg$((Děl(x,3)$\wedge$Děl(x,5)))	taut. VL (převod $\rightarrow$ na $\wedge$)
$\leftrightarrow \exists x$ ((Č(x)$\wedge$S(x)) $\wedge$ ((Děl(x,3)$\wedge$Děl(x,5)))	taut. VL (zákon dvojí negace)

Tedy: Některá sudá čísla jsou dělitelná třemi a pěti.

4)

Některá lichá čísla jsou dělitelná dvěma.

Formalizace:

$\exists x$ ((Č(x)$\wedge$L(x)) $\wedge$ Děl(x,2))

Negace:

$\neg\exists x$ (((Č(x)$\wedge$L(x)) $\wedge$ Děl(x,2))

Ekvivalenty negace:

$\leftrightarrow \forall x$ $\neg$(((Č(x)$\wedge$L(x)) $\wedge$ Děl(x,2))	DM zákon pro kvantifikátory
$\leftrightarrow \forall x$ ($\neg$((Č(x)$\wedge$L(x)) $\vee$ $\neg$Děl(x,2))	DM z VL
$\leftrightarrow \forall x$ (((Č(x)$\wedge$L(x)) $\rightarrow$ $\neg$Děl(x,2))	taut. VL (převod $\vee$ na $\rightarrow$)

Tedy: Všechna lichá čísla jsou dělitelná 2.

5)

Vyjádřete v symbolismu predikátové logiky negaci věty:

Všechny ženy jsou krásné právě tehdy, když některé děti zlobí.

Níže uvedené odsazené formule v bodech a)-g) jsou navzájem ekvivalentní, přičemž:

A = $\forall x$(Ž(x) $\rightarrow$ K(x)) (= „Všechny ženy jsou krásné“)

$B = \exists x(D(x) \wedge (Z(x))$ (= „Některé děti zlobí“)

a) Daná věta je tvaru ekvivalence a tu převedeme např. na:

$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$

b) Pokud z toho vyjdeme, negujeme celou tuto formuli:

$\neg((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$

c) Užijeme tautologii výrokové logiky „negovaná konjunkce je disjunkce negací“ (De Morganův zákon), načež:

$\neg(A \rightarrow B) \vee \neg(B \rightarrow A)$

d) Dále užijeme na každé straně disjunkce zákon „negovaná implikace je konjunkce negace (($(\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)$) získáme:

$((A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A))$

e) Teď už si dosadíme za A a B:

$((\forall x(Ž(x) \rightarrow K(x)) \wedge \neg\exists x(D(x) \wedge (Z(x))) \vee (\exists x(D(x) \wedge (Z(x)) \wedge \neg\forall x(Z(x) \rightarrow K(x))))$

f) Stranou uděláme ekvivalentní vyjádření negovaných podformulí s kvantifikátorem:

$\neg\exists x(D(x) \wedge (Z(x)) \leftrightarrow \forall x(D(x) \rightarrow \neg Z(x))$

(DeMorganův zákon pro převod kvantifikátorů a tautologie výrokové logiky „negovaná konjunkce je implikace negace“)

$\neg\forall x(Ž(x) \rightarrow K(x)) \leftrightarrow \exists x \neg(Ž(x) \rightarrow K(x)) \leftrightarrow \exists x(Ž(x) \wedge \neg K(x))$

(DeMorganův zákon pro převod kvantifikátorů a tautologie výrokové logiky „negovaná implikace je konjunkce negace“)

g) Dosadíme ony negace z bodu f):

$((\forall x(Ž(x) \rightarrow K(x)) \wedge \forall x(D(x) \rightarrow \neg Z(x))) \vee (\exists x(D(x) \wedge (Z(x)) \wedge \exists x(Ž(x) \wedge \neg K(x))))$

Hlouběji už negace nezanoříme – máme je teď jen před atomickými formulemi (tj. formulemi tvaru $P(x)$).

8.2 Cvičení – negace vět, které nespadají pod logický čtverec

Následující věty převeďte do predikátové logiky a sestavte její negaci, tu převeďte na ekvivalentní formuli a slovně vyjádřete:

1)

Některá přirozená čísla jsou sudá.

Formalizace:

$\exists x\ ((\mathrm{P}(x) \wedge \check{\mathrm{C}}(x)) \wedge \mathrm{S}(x))$

Negace:

$\neg\exists x\ ((\mathrm{P}(x) \wedge \check{\mathrm{C}}(x)) \wedge \mathrm{S}(x))$

Ekvivalenty negace:

$\leftrightarrow \forall x\ \neg((\mathrm{P}(x) \wedge \check{\mathrm{C}}(x)) \wedge \mathrm{S}(x))$	DM z PL
$\leftrightarrow \forall x\ (\neg(\mathrm{P}(x) \wedge \check{\mathrm{C}}(x)) \vee \neg\mathrm{S}(x))$	DM z VL
$\leftrightarrow \forall x\ ((\neg\mathrm{P}(x) \vee \neg\check{\mathrm{C}}(x)) \vee \neg\mathrm{S}(x))$	DM z VL

Slovně: Pro všechna *x* platí, že není přirozené nebo není číslo nebo není sudé.

2)

Někteří lidé jsou moudří, ale ne vychytralí.

Formalizace:

$\exists x\ (\ (\mathrm{L}(x) \wedge \mathrm{M}(x)) \wedge \neg\mathrm{V}(x)\ )$

Negace:

$\neg\exists x\ (\ (\mathrm{L}(x) \wedge \mathrm{M}(x)) \wedge \neg\mathrm{V}(x)\ )$

Ekvivalenty negace:

$\leftrightarrow \forall x\ \neg(\ (\mathrm{L}(x) \wedge \mathrm{M}(x)) \wedge \neg\mathrm{V}(x)\ )$	DM zákon pro kvantifikátory
$\leftrightarrow \forall x\ (\ (\mathrm{L}(x) \wedge \mathrm{M}(x)) \rightarrow \neg\neg\mathrm{V}(x)\ )$	taut. VL (převod $\wedge$ na $\rightarrow$)
$\leftrightarrow \forall x\ (\ (\mathrm{L}(x) \wedge \mathrm{M}(x)) \rightarrow \mathrm{V}(x)\ )$	taut. VL (zákon dvojí negace)

Tedy: Všichni moudří lidé jsou vychytralí.

3)

Některá prvočísla jsou dělitelná dvěma a pěti.

Formalizace:

$\exists x\ (\ \mathrm{P}(x) \wedge ((\mathrm{D\check{e}l}(x,2) \wedge \mathrm{D\check{e}l}(x,5))\ )$

Negace:

$\neg\exists x$ (P(x) $\wedge$ ((Děl(x,2)$\wedge$Děl(x,5)))

Ekvivalenty negace:

$\leftrightarrow \forall x \neg$(P($x$) $\wedge$ ((Děl(x,2)$\wedge$Děl(x,5))) DM zákon pro kvantifikátory

$\leftrightarrow \forall x$ (P(x) $\rightarrow \neg$((Děl(x,2)$\wedge$Děl(x,5))) taut. VL (převod $\wedge$ na $\rightarrow$)

Tedy: Žádné prvočíslo není dělitelné dvěma a pěti.

(Kvůli přirozenosti jazykového vyjádření nepostupujeme až k formuli $\forall x$ (P(x) $\rightarrow$ ((Děl(x,2)$\rightarrow\neg$Děl(x,5))).)

Jiná varianta:

$\neg\exists x$ (P(x) $\wedge$ ((Děl(x,2)$\wedge$Děl(x,5)))

$\leftrightarrow \forall x \neg$(P($x$) $\wedge$ ((Děl(x,2)$\wedge$Děl(x,5))) DM zákon pro kvantifikátory

$\leftrightarrow \forall x$ ($\neg$P(x) $\vee \neg$((Děl(x,2)$\wedge$Děl(x,5))) taut. VL (negovaná $\wedge$ je $\vee$ negací)

$\leftrightarrow \forall x$ (P(x) $\rightarrow \neg$(Děl(x,2)$\vee\neg$Děl(x,5))) taut. VL (převod $\vee$ na $\rightarrow$)

4)

Všichni přítomní jsou starší než někteří členové klubu

Formalizace:

$\forall x$(P(x) $\rightarrow \exists y$ (K(y)$\wedge$S(x,y)))

Negace:

$\neg\forall x$(P(x) $\rightarrow \exists y$ (K(y)$\wedge$S(x,y)))

Ekvivalenty negace:

$\leftrightarrow \exists x \neg$(P($x$) $\rightarrow \exists y$ (K(y)$\wedge$S(x,y))) DM

$\leftrightarrow \exists x$ (P(x) $\wedge \neg\exists y$ (K(y)$\wedge$S(x,y))) tautologie VL (převod $\rightarrow$ na $\wedge$)

$\leftrightarrow \exists x$ (P(x) $\wedge \forall y \neg$(K(y)$\wedge$S(x,y))) DM

$\leftrightarrow \exists x$(P($x$) $\wedge \forall y$ (K(y)$\rightarrow\neg$S(x,y))) tautologie VL

Slovně:

Existují přítomní takoví, že nejsou starší než jacíkoli členové klubu.

5)

Jaroslav Hašek napsal v novinách větu:

Někteří národně-socialističtí poslanci jsou lumpové.

Byl žalován a odsouzen k omluvě. Napsal tedy do novin:

Někteří národně-socialističtí poslanci nejsou lumpové.

Uveďte, jaký výrok měl správně užít k vyvrácení původního výroku:

a) Omlouvám se národně socialistickým poslancům za větu, kterou jsem uveřejnil v novinách.
b) Část, menší část národně socialistických poslanců jsou lumpové.
c) Všichni národně socialističtí poslanci jsou řádní a poctiví lidé.
d) Žádní národně-socialističtí poslanci nejsou lumpové.
e) Mnozí národně socialističtí poslanci nejsou lumpové.

8.3 Příklady – negace a ekvivalence formulí

Následující formule nejprve negujte a poté proveďte ekvivalentní transformace tak, se negátory vyskytovaly jen před predikátovými symboly. (Opakovaně uplatňujte zejména De Morganovy zákony (jak z PL, tak z VL).

1)

$\exists x \forall y\ (\mathrm{P}(x) \wedge \mathrm{Q}(x,y))$

Negace:

$\neg\exists x \forall y\ (\mathrm{P}(x) \wedge \mathrm{Q}(x,y))$

Ekvivalenty negace:

$\leftrightarrow \forall x \neg\forall y\ (\mathrm{P}(x) \wedge \mathrm{Q}(x,y))$	DM na první kvantifikátor
$\leftrightarrow \forall x \exists y\ \neg(\mathrm{P}(x) \wedge \mathrm{Q}(x,y))$	DM na druhý kvantifikátor
$\leftrightarrow \forall x \exists y\ (\mathrm{P}(x) \rightarrow \neg\mathrm{Q}(x,y))$	taut. VL (negovaná $\wedge$ je $\rightarrow$ negace)

2)

$\exists x\ ((\mathrm{P})x) \wedge \mathrm{Q}(x)) \vee \mathrm{R}(x))$

Negace:

$\neg\exists x\ ((\mathrm{P})x) \wedge \mathrm{Q}(x)) \vee \mathrm{R}(x))$

Ekvivalenty negace:

$\leftrightarrow \forall x \neg\ ((\mathrm{P}(x) \wedge \mathrm{Q}(x)) \vee \mathrm{R}(x))$	DM zákon pro kvantifikátory

$\leftrightarrow \forall x\ (\neg(P(x) \wedge Q(x)) \wedge \neg R(x))$ tautologie VL (negovaná $\vee$ je $\wedge$ negací)

$\leftrightarrow \forall x\ ((\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \wedge \neg R(x))$ tautologie VL (negovaná $\wedge$ je $\vee$ negací)

Jiná varianta:

$\neg\exists x\ ((P)x) \wedge Q(x)) \vee R(x))$

$\leftrightarrow \forall x \neg\ ((P(x) \wedge Q(x)) \vee R(x))$ DM zákon pro kvantifikátory

$\leftrightarrow \forall x\ ((P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \neg R(x))$ tautologie VL (převod $\vee$ na $\rightarrow$)

3)

$\forall x\ (P(x) \rightarrow \exists y\ (Q(x,y) \wedge \exists z(Q(y,z))\ )$

Negace:

$\neg\forall x\ (P(x) \rightarrow \exists y\ (Q(x,y) \wedge \exists z(Q(y,z))\ )$

Ekvivalenty negace:

$\leftrightarrow \exists x \neg(P(x) \rightarrow \exists y\ (Q(x,y) \wedge \exists z(Q(y,z))\ )$ DM z PL na celou formuli

$\leftrightarrow \exists x\ (P(x) \wedge \neg\exists y\ (Q(x,y) \wedge \exists z(Q(y,z))\ )$ taut. VL (negovaná $\rightarrow$ je $\wedge$ negace)

$\leftrightarrow \exists x\ (P(x) \wedge \forall y \neg(Q(x,y) \wedge \exists z(Q(y,z))\ )$ DM z PL

$\leftrightarrow \exists x\ (P(x) \wedge \forall y\ (\neg Q(x,y) \vee \neg\exists z(Q(y,z))\ )$ DM z VL

$\leftrightarrow \exists x\ (P(x) \wedge \forall y\ (\neg Q(x,y) \vee \forall z \neg(Q(y,z))\ )$ DM z PL

8.4 Cvičení – ekvivalence vět s jedním binárním predikátem

Nechť binární predikátový symbol R znamená binární predikát „*x* rozumí *y*“. Větu danou nyní zapište symbolismem predikátové logiky a poté tuto formuli transformujte pomocí De Morganových zákonů a slovně ji vyjádřete:

1) Každý něčemu rozumí.
2) Všemu někdo nerozumí.
3) Každý něčemu nerozumí.
4) Všemu někdo rozumí.
5) Každý rozumí všemu.
6) Něčemu někdo nerozumí.

7) Každý nerozumí všemu.

8) Něčemu někdo rozumí.

8.4 Řešení – ekvivalence vět s jedním binárním predikátem

1) $\forall x \exists y\ \mathrm{R}(x,y) \leftrightarrow \neg\exists x \neg\exists y\ \mathrm{R}(x,y) \leftrightarrow \neg\exists x \forall y\ \neg\mathrm{R}(x,y)$;

   Není pravda, že někdo všemu nerozumí.

2) $\forall y \exists x\ \neg\mathrm{R}(x,y) \leftrightarrow \neg\exists y \neg\exists x\ \neg\mathrm{R}(x,y) \leftrightarrow \neg\exists y \forall x\ \neg\neg\mathrm{R}(x,y) \leftrightarrow \neg\exists y \forall x\ \mathrm{R}(x,y)$;

   Není pravda, že něčemu každý rozumí.

3) $\forall x \exists y\ \neg\mathrm{R}(x,y) \leftrightarrow \neg\exists x \neg\exists y\ \neg\mathrm{R}(x,y) \leftrightarrow \neg\exists x \forall y\ \mathrm{R}(x,y)$;

   Není pravda, že někdo všemu rozumí.

4) $\forall y \exists x\ \mathrm{R}(x,y) \leftrightarrow \neg\exists y \neg\exists x\ \mathrm{R}(x,y) \leftrightarrow \neg\exists y \forall x\ \neg\mathrm{R}(x,y)$.

   Není pravda, že něčemu všichni nerozumí.

5) $\forall x \forall y\ \mathrm{R}(x,y) \leftrightarrow \neg\exists x \neg\forall y\ \mathrm{R}(x,y) \leftrightarrow \neg\exists x \exists y\ \neg\mathrm{R}(x,y)$.

   Není pravda, že někdo něčemu nerozumí.

6) $\exists y \exists x\ \neg\mathrm{R}(x,y) \leftrightarrow \neg\forall y \neg\exists x\ \neg\mathrm{R}(x,y) \leftrightarrow \neg\forall y \forall x\ \neg\neg\mathrm{R}(x,y) \leftrightarrow \neg\forall y \forall x\ \mathrm{R}(x,y)$.

   Není pravda, že všemu každý rozumí.

7) $\forall x \forall y\ \neg\mathrm{R}(x,y) \leftrightarrow \neg\exists x \neg\forall y\ \neg\mathrm{R}(x,y) \leftrightarrow \neg\exists x \exists y\ \neg\neg\mathrm{R}(x,y) \leftrightarrow \neg\exists x \exists y\ \mathrm{R}(x,y)$.

   Není pravda, že někdo něčemu rozumí.

8) $\exists y \exists x\ \mathrm{R}(x,y) \leftrightarrow \neg\forall y \neg\exists x\ \mathrm{R}(x,y) \leftrightarrow \neg\forall y \forall x\ \neg\mathrm{R}(x,y)$.

   Není pravda, že všemu každý nerozumí.