



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0216, OPVK)

Úvod do logiky (PL): ekvivalence a negace výroků logického čtverce formálně (cvičení)

doc. PhDr. Jiří Raclavský, Ph.D.

(raclavsky@phil.muni.cz)

7. Ekvivalence a negace výroků logického čtverce formálně

7.1 Cvičení – ekvivalence výroků logického čtverce formálně

K následujícím výrokům formulujte výrok, který je danému výroku ekvivalentní, postupujte na základě ekvivalentních transformací formálního zápisu výroku:

- 1) Každý člověk je smrtelný.
- 2) Někteří filosofové žijí.
- 3) Žádný tyran není spravedlivý.
(tj. Každý tyran je nespravedlivý.)
- 4) Někteří lidé nejsou moudří.
- 5) Není pravda, že všechna prvočísla jsou lichá.
- 6) Není pravda, že některé kočky štěkají.
- 7) Není pravda, že žádný kosmonaut není astronaut.
- 8) Není pravda, že některé muchomůrky nejsou jedovaté.
- 9) Ne všechny banány dozrávají.
- 10) Není všechno zlato, co se třpytí.

7.1 Řešení – ekvivalence výroků z logického čtverce symbolismem predikátové logiky

- 1) $\forall x (\check{C}(x) \rightarrow S(x)) \leftrightarrow \neg \exists x \neg (\check{C}(x) \rightarrow S(x)) \leftrightarrow \neg \exists x (\check{C}(x) \wedge \neg S(x))$;
Není pravda, že nějaký člověk není smrtelný.
- 2) $\exists x (F(x) \wedge \check{Z}(x)) \leftrightarrow \neg \forall x \neg (F(x) \wedge \check{Z}(x)) \leftrightarrow \neg \forall x (F(x) \rightarrow \neg \check{Z}(x))$;
Není pravda, že žádný filosof nežije.
- 3) $\forall x (T(x) \rightarrow \neg S(x)) \leftrightarrow \neg \exists x \neg (T(x) \rightarrow \neg S(x)) \leftrightarrow \neg \exists x (T(x) \wedge \neg \neg S(x)) \leftrightarrow \neg \exists x (T(x) \wedge S(x))$;
Není pravda, že existuje tyran, který je spravedlivý.
- 4) $\exists x (L(x) \wedge \neg M(x)) \leftrightarrow \neg \forall x \neg (L(x) \wedge \neg M(x)) \leftrightarrow \neg \forall x (L(x) \rightarrow \neg \neg M(x)) \leftrightarrow \neg \forall x (L(x) \rightarrow M(x))$

Není pravda, že každý člověk je moudrý.

$$5) \neg \forall x (P(x) \rightarrow L(x)) \leftrightarrow \exists x \neg (P(x) \rightarrow L(x)) \leftrightarrow \exists x (P(x) \wedge \neg L(x));$$

Existuje prvočíslo, které není liché.

$$6) \neg \exists x (K(x) \wedge \check{S}(x)) \leftrightarrow \forall x \neg (K(x) \wedge \check{S}(x)) \leftrightarrow \forall x (K(x) \rightarrow \neg \check{S}(x));$$

Žádná kočka neštěká.

$$7) \neg \forall x (K(x) \rightarrow \neg A(x)) \leftrightarrow \exists x \neg (K(x) \rightarrow \neg A(x)) \leftrightarrow \exists x (K(x) \wedge \neg \neg A(x)) \leftrightarrow \exists x (K(x) \wedge A(x));$$

Existuje kosmonaut, který je astronautem.

$$8) \neg \exists x (M(x) \wedge \neg J(x)) \leftrightarrow \forall x \neg (M(x) \wedge \neg J(x)) \leftrightarrow \forall x (M(x) \rightarrow \neg \neg J(x)) \leftrightarrow \forall x (M(x) \rightarrow J(x));$$

Všechny muchomůrky jsou jedovaté.

$$9) \neg \forall x (B(x) \rightarrow D(x)) \leftrightarrow \exists x \neg (B(x) \rightarrow D(x)) \leftrightarrow \exists x (B(x) \wedge \neg D(x));$$

Některé banány nedozrávají.

$$10) \neg \forall x (Z(x) \rightarrow T(x)) \leftrightarrow \exists x \neg (Z(x) \rightarrow T(x)) \leftrightarrow \exists x (Z(x) \wedge \neg T(x));$$

Existuje zlato, které se netřpytí.

7.2 Cvičení - určení ekvivalentních vět

V každém příkladu určete, které z nabízených vět - 1 až 5 možností - říkají ekvivalentním způsobem totéž jako věta daná. Pro pomoc si větu danou vyjádřete jako formuli a tuto převedte na jí ekvivalentní formule:

1)

Každý slon je ryba.

- a) Neexistuje slon, který není rybou.
- b) Není pravda, že některý slon není ryba.
- c) Není pravda, že neplatí, že každý slon je ryba.
- d) Každá ryba je slon.
- e) Žádný slon není ryba.

2)

Není pravda, že žádná beruška není sluníčko.

- a) Každá beruška je sluníčko.

- b) Některá beruška je sluníčko.
- c) Není pravda, že žádné sluníčko není beruška.
- d) Existuje beruška, která je sluníčko.
- e) Ne každá beruška není sluníčko.

3)

Někteří tučňáci jsou fialoví.

- a) Neexistuje tučňák, který by nebyl fialový.
- b) Existují fialoví tučňáci.
- c) Některé fialové věci jsou tučňáci.
- d) Není pravda, že všichni tučňáci jsou nefialoví.
- e) Ne všichni tučňáci nejsou fialoví.

4)

Není pravda, že každá žirafa je pyšná.

- a) Žádná žirafa není pyšná.
- b) Některá žirafa není pyšná.
- c) Ne všechny žirafy jsou pyšné.
- d) Není pravda, že neexistuje žirafa, která není pyšná.
- e) Jsou žirafy, které nejsou pyšné.

5)

Není pravda, že někteří motýli jsou oškliví.

- a) Některí motýli nejsou oškliví.
- b) Každý motýl je ošklivý.
- c) Všichni motýli jsou krásní.
- d) Neexistují motýli, kteří jsou oškliví.
- e) Ne všichni motýli jsou krásní.

6)

Každý pes mňouká.

- a) Neexistuje pes, který nemňouká.
- b) Není pravda, že některý pes nemňouká.

- c) Není pravda, že neplatí, že každý pes mňouká.
- d) Vše, co mňouká, je pes.
- e) Žádný pes nemňouká.

7)

Není pravda, že žádný krokodýl není filantrop.

- a) Každý krokodýl je filantrop.
- b) Někteří krokodýlové jsou filantropy.
- c) Není pravda, že žádný filantrop není krokodýl.
- d) Existuje krokodýl, který je filantrop.
- e) Ne každý krokodýl není filantrop.

8)

Někteří lenochodi jsou pilní.

- a) Neexistuje lenochod, který by nebyl pilný.
- b) Existují pilní lenochodi.
- c) Něco, co je pilné, jsou lenochodi.
- d) Není pravda, že všichni lenochodi jsou líní.
- e) Ne všichni lenochodi nejsou pilní.

9)

Není pravda, že každý osel je filosof.

- a) Žádný osel není filosof.
- b) Některý osel není filosof.
- c) Každý osel není filosof.
- d) Není pravda, že neexistuje osel, který není filosof.
- e) Jsou oslové, kteří nejsou filosofy.

10)

Není pravda, že některé včely jsou líné.

- a) Některé včely nejsou líné.
- b) Každá včela je líná.
- c) Všechny včely jsou pilné.

- d) Neexistují včely, které jsou líné.
 e) Ne všechny včely jsou pilné.

7.2 Řešení – určení ekvivalentních vět

- 1) Ekvivalentní jsou a) i b), protože $\forall x (S(x) \rightarrow R(x)) \leftrightarrow \neg \exists x (S(x) \wedge \neg R(x))$, avšak ekvivalentní je také c), neboť $\forall x (S(x) \rightarrow R(x)) \leftrightarrow \neg \neg \forall x (S(x) \rightarrow R(x))$.
- 2) Ekvivalentní jsou b), c) i d), protože $\neg \forall x (B(x) \rightarrow \neg S(x)) \leftrightarrow \exists x (B(x) \wedge S(x))$, ovšem ekvivalentní je také c), neboť $\neg \forall x (B(x) \rightarrow \neg S(x)) \leftrightarrow \exists x (B(x) \wedge S(x)) \leftrightarrow \exists x (S(x) \wedge B(x))$; všimněme si, že e) není ekvivalentní, neboť říká, že některé berušky sluníčko nejsou.
- 3) Ekvivalentní je bezpochyby b) ($\exists x (T(x) \wedge F(x)) \leftrightarrow \exists x (T(x) \wedge F(x))$), dále je však ekvivalentní d), protože $\exists x (T(x) \wedge F(x)) \leftrightarrow \neg \forall x (T(x) \rightarrow \neg F(x))$, avšak ekvivalentní je také c), neboť $\neg \forall x (T(x) \rightarrow \neg F(x)) \leftrightarrow \exists x (T(x) \wedge F(x)) \leftrightarrow \exists x (T(x) \wedge F(x))$; všimněme si, že opět není e) ekvivalentní, neboť říká, že „Někteří tučňáci nejsou fialoví“.
- 4) Ekvivalentní je především c) ($\neg \forall x (\check{Z}(x) \rightarrow P(x)) \leftrightarrow \neg \forall x (\check{Z}(x) \rightarrow P(x))$), ekvivalentní jsou dále b) i e), neboť $\neg \forall x (\check{Z}(x) \rightarrow P(x)) \leftrightarrow \exists x (\check{Z}(x) \wedge \neg P(x))$, ovšem ekvivalentní je také d), protože $\neg \forall x (\check{Z}(x) \rightarrow P(x)) \leftrightarrow \exists x (\check{Z}(x) \wedge \neg P(x)) \leftrightarrow \neg \neg \exists x (\check{Z}(x) \wedge \neg P(x))$.
- 5) Ekvivalentní je pouze d), protože $\neg \exists x (M(x) \wedge O(x)) \leftrightarrow \neg \exists x (M(x) \wedge O(x))$.
- 6) Ekvivalentní je c), protože $\forall x (P(x) \rightarrow M(x)) \leftrightarrow \neg \neg \forall x (P(x) \rightarrow M(x))$, dále jsou ekvivalentní a) i b), neboť $\forall x (P(x) \rightarrow M(x)) \leftrightarrow \neg \exists x (P(x) \wedge \neg M(x))$.
- 7) Ekvivalentní jsou b) i d), protože $\neg \forall x (K(x) \rightarrow \neg F(x)) \leftrightarrow \exists x (K(x) \wedge F(x))$, ekvivalentní je však také c), neboť $\forall x (K(x) \rightarrow \neg F(x)) \leftrightarrow \forall x (\neg \neg F(x) \rightarrow \neg K(x)) \leftrightarrow \forall x (F(x) \rightarrow \neg K(x))$.
- 8) Ekvivalentní jsou b) i c), protože $\exists x (L(x) \wedge P(x)) \leftrightarrow \exists x (P(x) \wedge L(x))$.
- 9) Ekvivalentní jsou b) i e), neboť $\neg \forall x (O(x) \rightarrow F(x)) \leftrightarrow \exists x (O(x) \wedge \neg F(x))$, ekvivalentní je dále d), protože $\neg \forall x (O(x) \rightarrow F(x)) \leftrightarrow \exists x (O(x) \wedge \neg F(x)) \leftrightarrow \neg \neg \exists x (O(x) \wedge \neg F(x))$.
- 10) Ekvivalentní je pouze d), protože $\neg \exists x (V(x) \wedge L(x)) \leftrightarrow \neg \exists x (V(x) \wedge L(x))$.