INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0216, OPVK)

Úvod do logiky (PL): tautologie

doc. PhDr. Jiří Raclavský, Ph.D.

(raclavsky@phil.muni.cz)

6. Tautologie PL1

Z jakékoli tautologie výrokové logiky lze tautologii PL získat substitucí jakékoli formule PL za výrokové symboly. Např. v případě $p \lor \neg p$ můžeme za p dosadit např. $\forall x P(x)$: $\forall x P(x) \lor \neg \forall x P(x)$, anebo jen $P(x)$: $P(x) \lor \neg P(x)$.

Specifickými tautologiemi predikátové logiky jsou ty následující. Ve skupině 1) jsou De Morganovy zákony pro kvantifikátory; všimněme si, že negátory jsou v každé formuli vždy dva, a také že jeden negátor se musí vztahovat na celou formuli (stojí před kvantifikátorem), zatímco druhý jen na zbývající část. Vybrané zákony distributivnosti kvantifikátorů jsou ve skupině 2) (jde o vztahy mezi ekvivalentními formulemi), další pak ve skupině 3). Skupina 4) obsahuje dvě základní tautologie pro záměna kvantifikátorů pro formule s binárním predikátem. Ve skupině E) jsou uvedeny některé významné tautologie pro usuzování: zákon konkretizace, zákon abstrakce a zákon partikularizace. Pozn.: „A“ a „B“ jsou zkratkami za jakoukoli formuli, např. tedy „P(x)“, „Q(x)“, avšak i za určité složené formule.

1)

$\neg \forall x A \leftrightarrow \exists x \neg A$

$\forall x \neg A \leftrightarrow \neg \exists x A$

$\neg \forall x \neg A \leftrightarrow \exists x A$

$\forall x A \leftrightarrow \neg \exists x \neg A$

2)

$\forall x (A \land B) \leftrightarrow (\forall x A \land \forall x B)$

$\exists x (A \lor B) \leftrightarrow (\exists x A \lor \exists x B)$

3)

$((\forall x A) \lor (\forall x B)) \rightarrow \forall x\, (A \lor B)$

$\forall x\, (A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x))$

$\exists x\, (A \land B) \rightarrow (\, (\exists x A) \land (\exists x B)\,)$

$(\exists x A(x) \to \exists x B(x)) \to \exists x\ (A(x) \to B(x))$

4)

$\exists x \forall y\ R(x,y) \to \forall y \exists x\ R(x,y)$

$\exists y \forall x\ R(x,y) \to \forall x \exists y\ R(x,y)$

5)

$\forall x A \to A[t/x]$	zákon konkretizace
$A[t/x] \to \exists x A$	zákon abstrakce
$\forall x A \to \exists x A$	zákon partikularizace

podmínka: *t* musí být substituovatelné za *x*

Term *t* je substituovatelný za proměnnou *x* ve formuli A, je-li term individuová konstanta nebo individuová proměnná *p* taková, že po dosazení do formule A není v dosahu kvantifikátoru, který váže proměnnou *p*. Formuli, v níž je každý volný výskyt *x* nahrazen termínem *t*, zapisujeme $A[t/x]$.