Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0216, OPVK)

Úvod do logiky (PL): sémantika predikátové logiky

doc. PhDr. Jiří Raclavský, Ph.D.

(raclavsky@phil.muni.cz)

5. Sémantika predikátové logiky prvního řádu

Sémantika predikátové logiky je poněkud náročnější než sémantika výrokové logiky. Jako proměnné zde máme individuové proměnné, kterým bude valuace přiřazovat individua. Dalším sémantickým krokem je udání sémantiky individuovým konstantám (přiřazováno je individuum) a predikátovým symbolům (přiřazení podmnožiny univerza, resp. kartézského součinu nad univerzem). Interpretace $\Im$ pak v závislosti na valuaci v a sémantické funkci S přiřazuje hodnoty termům a formulím (pravdivostních hodnot nabývají jen atomické či molekulární formule).

Valuace. Individua lze uspořádávat do nekonečně mnoha nekonečných sekvencí. V těchto sekvencích rozpoznáváme pozice. Valuace je funkce, která každé proměnné přiřadí přesně jedno individuum, a to – pro proměnnou x_i – právě to individuum, které je na i-té pozici ($v(x_i)=\xi$).

Např. pro U={α, β} máme sekvence αααα..., βααα..., αβαα..., ααβα..., ..., ββαα..., βαβα..., ..., přičemž v_1 přiřazuje proměnné x_1 prvek α, proměnné x_2 také prvek α, stejně tak i proměnným x_3, x_4, ..., valuace v_2 přiřazuje x_1 prvek β, x_2 i x_3 i x_4 prvek α, atd.

Sémantická funkce S je funkce, která individuovým konstantám přiřadí prvky U a predikátovým k-argumentovým predikátovým symbolům přiřadí podmnožiny univerza U (při k=1), či při k>1 množiny uspořádaných k-tic individuí z U.

Interpretace je funkce $\Im_{S,v}$, která přiřazuje každému termu nebo formuli určitou sémantickou hodnotu v závislosti na valuaci v a sémantické funkci S takto:

1) *termy* (přiřazuje jen individuum jako valuace)

a) je-li term d proměnná x_i, pak $\Im_{S,v}(\mathrm{d}) = v(x_i)$

b) je-li d individuální konstanta a_i, pak $\Im_{S,v}(\mathrm{d}) = S(a_i)$

2) *formule*

2.1) *atomické formule*

a) je-li A atomická formule $P^k(d_1, \ldots, d_k)$, pak $\Im_{S,v}(A) = 1$, jestliže *n*-tice $\langle\Im_{S,v}(d_1), \ldots, \Im_{S,v}(d_k)\rangle \in S(P^k)$; 0 v opačném případě

2.2) *molekulární formule*

a)

1) je-li A tvaru $\neg$B, pak $\Im_{S,v}(A) = 1$, jestliže $\Im_{S,v}(B) = 0$; 0 v opačném případě

2) je-li A tvaru B$\wedge$C, pak $\Im_{S,v}(A) = 1$, jestliže $\Im_{S,v}(B) = \Im_{S,v}(C) = 1$; 0 v opačném případě

3) je-li A tvaru B$\vee$C, pak $\Im_{S,v}(A) = 0$, jestliže $\Im_{S,v}(B) = \Im_{S,v}(C) = 0$; 1 v opačném případě

4) je-li A tvaru B$\rightarrow$C, pak $\Im_{S,v}(A) = 0$, jestliže $\Im_{S,v}(B) = 1$ a $\Im_{S,v}(C) = 0$; 1 v opačném případě

5) je-li A tvaru B$\leftrightarrow$C, pak $\Im_{S,v}(A) = 1$, jestliže $\Im_{S,v}(B) = \Im_{S,v}(C)$; 0 v opačném případě

b)

1) je- li A tvaru $\forall x$B, pak $\Im_{S,v}(A) = 1$, jestliže $\Im_{S,v'}(B) = 1$ při každé valuaci v', která přiřazuje volné proměnné stejnou hodnotu jako v, avšak vázané proměnné přiřadí jakoukoli hodnotu z U*;* 0 v opačném případě

2) je- li A tvaru $\exists x$B, pak $\Im_{S,v}(A) = 1$, jestliže $\Im_{S,v'}(B) = 1$ alespoň při jedné valuaci v', 0 v opačném případě.

Komentář k interpretaci

1) *termy* - interpretace spočívá v přiřazování prvků U či podmnožiny U či U^n

a) Interpretace individuové proměnné je totéž, co valuace pro tuto proměnnou (je to nějaký prvek univerza ($\xi \in U$), v závislosti na valuaci).

b) Interpretace individuové konstanty je prvek univerza ($\xi \in U$) (interpretace nejsou ovlivněny valuacemi).

c) V případě predikátového symbolu P^k je jednotlivou interpretací přiřazena v závislosti na v a je-li k=1 podmnožina univerza, resp. je-li k>1, množina uspořádaných *n*-tic.

2) *formule* - interpretace spočívá v přiřazení jedné z pravdivostních hodnot (P nebo N)

2.1) *atomické formule*

a) Interpretace atomické formule $P^k(d_1, ..., d_k)$ je 1, jestliže *n*-tice prvků (daná interpretací termů je prvkem interpretace daného predikátu P^k ($\langle \mathfrak{I}_{S,v}(d_1), ..., \mathfrak{I}_{S,v}(d_k)\rangle \in S(P^k)$).

2.2) *molekulární formule*

a) Interpretace výrokově logických formulí v prostředí PL je snadno nahlédnutelná. Umožňuje nám to ústrojně včlenit výrokovou logiku do PL.

b) Valuace v', je taková valuace, která je zcela podobná valuaci v, až na přisouzení různých hodnot vázané proměnné x. Jinými slovy řečeno – daná valuace v je akceptována pouze pro proměnné (případně vyskytující se v B), které jsou odlišné od x. Je to omezení valuace v tak, že se netýká x.

Má-li U celkem 3 prvky, tedy n=3, tak při U^2 je n^k kombinatoricky možných k-tic (srov. v kombinatorice variace s opakováním), např. dvojic (k=2) je 3^2, tedy 9.

Má-li U celkem 3 prvky, tedy n=3, celkový počet kombinatoricky možných podmnožin (nikoli uspořádaných k-tic) je 2^n (což počet prvků potenční množiny tohoto univerza, tj. součet kombinačních čísel v n-tém řádku Pascalova trojúhelníku, srov. v kombinatorice kombinace a kombinační čísla). Čili monadický predikátový symbol je možno interpretovat 2^3, tedy 8 různými interpretacemi.

Celkový počet kombinatoricky možných podmnožin nějakých k-tic je 2 na n^k (což je počet prvků potenční množiny k-členných uspořádaných k-tic tohoto n-prvkového univerza), např. počet podmnožin sestavitelných z dvojic je 2 na 3^2, tedy 512. Čili binární predikátový symbol je možno interpretovat 512 různými interpretacemi.

Pravdivost

Jak bylo zřejmé z definice predikátově logické interpretace, pravdivost formule predikátové logiky závisí na mnoha faktorech. Následně můžeme rozlišit různou „míru“ pravdivosti nějaké formule. Formulujeme si také vyplývání na úrovni predikátové logiky. Poté si v souvislosti s pravdivostí ještě doplníme terminologii: definujeme volný a vázaný výskyt proměnné, uzavřené a otevřené formule.

Věta A nabývá v interpretaci $\mathfrak{I}_{S,v}$ hodnoty **pravda nebo nepravda** při valuaci *v*.

(Věta A je splňována valuací *v* v interpretaci $\mathfrak{I}$, jestliže $\mathfrak{I}_{S,v}$ (A) = pravda.)

Věta A je **pravdivá** v interpretaci $\mathfrak{I}_{S,v}$, pokud nabývá hodnoty pravda **při každé valuaci** *v*.

Věta A je **logicky pravdivá** (tautologie), pokud je pravdivá **při každé interpretaci**.

(V alternativní terminologii: v každém modelu.)

Otevřené formule jsou tedy vydány napospas náhodnosti valuací, přičemž v závislosti na těchto různých valuacích nabývají hodnoty pravda nebo nepravda.

Vyplývání

Věta B logicky *vyplývá* z vět A_1, ..., A_n právě tehdy, když je pravdivá při každé interpretaci, při níž jsou pravdivé věty A_1, ..., A_n.