INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0216, OPVK)

Úvod do logiky: PL analýza vět mimo logický čtverec (cvičení)

doc. PhDr. Jiří Raclavský, Ph.D.

(raclavsky@phil.muni.cz)

4. Cvičení - analýza vět, které nespadají pod logický čtverec

4.1 Cvičení – věty zahrnující monadické i binární predikáty

Následující věty přirozeného jazyka vyjádřete formulemi predikátové logiky:

1) Misantrop každého nenávidí.
2) Včely sbírají med.
3) Někteří studenti nemají hudební nadání.
4) Pes je věrný přítel člověka.
5) Adam má rád pouze analytické filosofy.
6) Adam nemá rád nikoho, kdo není analytickým filosofem.
7) Neexistuje nikdo takový, že ho má Adam rád a nebyl to analytický filosof.
8) Někdo má rád každého, ale ne sám sebe.
9) Každé číslo dělitelné 8 je dělitelné 4.
10) Vše, co se děje, má svou příčinu.
11) Žádný učený z nebe nespadl.
12) Kdo nic nedělá, nic nezkazí.
13) Kdo jinému jámu kopá, sám do ní padá.
14) Všichni přítomní jsou starší než někteří členové klubu.
15) Žádný dobrý učitel nikoho zbytečně nepotrestal.
16) Jablka i hrušky rostou na stromech.
17) Bohdan půjde do kina pouze tehdy, pokud jeho žena nebude doma.
18) Všichni savci rodí živá mláďata.
19) Posláním mudrce je vytvářet řád.
20) Myslí dobře ten, kdo se k věcem dobře postaví.

4.2 Cvičení – věty s jedním ternárním predikátem

Nechť výraz „P(a,b,g)“ znamená „Adam půjčuje Báře Goffyho“. Přepište do symbolismu predikátové logiky následující výroky:

1) Někdo půjčuje Báře Goffyho.
2) Bára půjčuje někomu Goffyho.
3) Bára někomu něco půjčuje.
4) Někdo někomu něco půjčuje.
5) Adam každému něco půjčuje.
6) Někdo někomu všechno půjčuje.
7) Každý někomu něco půjčuje.
8) Někdo každému všechno půjčuje.
9) Někdo nikomu nic nepůjčuje.

4.3 Cvičení – věty s jedním binárním predikátem

Nechť binární predikátový symbol R znamená binární predikát „*x* rozumí *y*“. Zapište symbolismem predikátové logiky věty:

1) Každý něčemu rozumí.
2) Všemu někdo nerozumí.
3) Každý něčemu nerozumí.
4) Všemu někdo rozumí.
5) Každý rozumí všemu.
6) Něčemu někdo nerozumí.
7) Každý nerozumí všemu.
8) Něčemu někdo rozumí.
9) Někdo rozumí něčemu.
10) Všemu každý nerozumí.
11) Někdo něčemu nerozumí.
12) Všemu každý rozumí.
13) Někdo rozumí všemu.
14) Něčemu nikdo nerozumí.

15) Někdo nerozumí ničemu.

16) Něčemu rozumí každý.

4.1 Řešení – věty s monadickými i binárními predikáty

1) $\forall x\,(\mathrm{M}(x) \rightarrow \forall y\,\mathrm{N}(x,y))$

2) $\forall x\,(\mathrm{V}(x) \rightarrow \exists y\,(\mathrm{M}(y) \wedge \mathrm{S}(x,y))$

   Pro všechna *x* platí, že je-li *x* včelou, tak existuje nějaké *y*, které je medem (nesbírá totiž každý med) a *x* sbírá to *y*.

3) $\exists x\,(\mathrm{S}(x) \wedge \exists y(\,(\mathrm{H}(y)\wedge\mathrm{N}(y)) \wedge \neg\mathrm{M}(x,y))$

   Existuje nějaké *x*, které je studentem a existuje nějaké *y*, které je hudební a je nadáním a *x* nemá to *y*.

4) $\forall x\,(\mathrm{P}(x) \rightarrow \forall y\,(\check{\mathrm{C}}(y)\rightarrow (\mathrm{V}(x)\wedge\mathrm{P}'(x,y))\,)$

   Pro všechna *x* platí, že je-li *x* psem, tak pokud to *y* je člověkem, tak to *x* je věrné a přítelem toho *y*.

5) $\forall x\,(\mathrm{R}(\mathrm{a},x) \rightarrow \mathrm{AF}(x))$

   Pro všechna *x* platí, že jestliže Adam má rád *x*, pak je *x* analytickým filosofem (nedělíme na ‚být analytickým' a ‚být filozofem').

6) $\forall x\,(\neg\mathrm{AF}(x) \rightarrow \neg\mathrm{R}(\mathrm{a},x))$

   Pro všechna *x* platí, že není-li *x* zároveň analytickým filosofem, pak Adam ho nemá rád.

7) $\neg\exists x\,(\mathrm{R}(\mathrm{a},x) \wedge \neg\mathrm{AF}(x))$

   Není pravda, že existuje někdo takový, že Adam ho má rád a současně není analytickým filosofem. Této větě je ekvivalentní věta: Každý, koho má Adam rád, je analytickým filosofem.

   $\forall x\,(\mathrm{R}(\mathrm{p},x) \rightarrow (\mathrm{AF}(x))$

8) $\exists x\forall y\,(\mathrm{R}(x,y) \wedge \neg\mathrm{R}(x,x))$

   Čili: Někdo má rád všechny ostatní.

9) $\forall x\,(\mathrm{D8}(x) \rightarrow \mathrm{D4}(x))$

Lepší analýza odliší predikáty „být dělitelný 8“ a „být dělitelný 4“:

$\forall x$ (Č(x) $\rightarrow$ (D8(x) $\rightarrow$ D4(x)))

Ještě lepší analýza odliší predikáty „být dělitelný čím“ od čísel, jimiž je nějaké x dělitelné. Ten je totiž vyjádřen tranzitivním slovesem:

$\forall x$ (Č(x) $\rightarrow$ (D(x,8) $\rightarrow$ D(x,4)))

Pro všechna x platí, že je-li x číslem, tak pokud to x je dělitelné osmi, tak je to x dělitelné čtyřmi.

10) $\forall x$ (D(x) $\rightarrow \exists y$ P(y,x))

Pro všechna x platí, že pokud se děje, tak existuje nějaké y, které je příčinou y. (Nikoli: Pro všechna x platí, že pokud se děje, tak existuje nějaké y, které je příčinou a které x má. „Mít“ totiž nechápeme jako svébytný predikát.)

11) $\forall x$ (U(x) $\rightarrow \exists y$ (N(y) $\wedge \neg$S(x,y)))

Pro všechna x platí, že pokud je x učené, tak existuje nějaké y, které je nebem a x spadl z toho y.

12) $\forall x$ ($\neg$D(x)$\rightarrow\neg$Z(x))

Lepší analýza:

$\forall x\ \forall y$ ($\neg$D(x,y) $\rightarrow \neg$Z(x,y)))

Pro všechna x a y platí, že pokud x nedělá to y, tak x nezkazí to y.

13) $\forall x$ ($\forall y$ (J(y) $\rightarrow$ (K(x,y)$\rightarrow$P(x,y)))))

Pro všechna x a y platí, že pokud je y jáma, tak jestliže x kope to y, tak x padá do y.

14) $\forall x$(P(x) $\rightarrow \exists yz$ (K(y)$\wedge$Č(z,y)$\wedge$S(x,y)))

Pro všechna x platí, že pokud x je přítomný, tak existují y a z taková, že y je klub a z je člen y a x jsou starší než ti (někteří) z.

15) $\forall x$ (D(x) $\rightarrow \forall y \neg$P($x$,$y$))

Lepší analýza:

$\forall x$ ((D(x)$\wedge$U(x)) $\rightarrow \neg\exists y \exists z$ (Z(z)$\wedge$P(x,y,z)))

Pro všechna x platí, že existuje takové y a z, že z je zbytečné a ten x toho y potrestal (způsobem) z (P je ternární predikát). To je ekvivalentní větě formalizovatelné (ekvivalentní) formulí: $\forall x\ (\ (\mathrm{D}(x) \wedge \mathrm{U}(x)) \rightarrow \forall yz\ (\mathrm{Z}(z) \rightarrow \neg \mathrm{P}(x,y,z))\ )$.

16) $\forall xy\ (\ (\mathrm{J}(x) \wedge \mathrm{H}(y)) \rightarrow \exists \mathrm{z}\ (\mathrm{S}(z) \wedge (\mathrm{R}(x,\mathrm{z}) \wedge \mathrm{R}(y,\mathrm{z}))\ )$

Pro všechna x a y platí, že je-li x jablkem a y hruškou, tak existuje něco, co je strom a x roste na z a y roste na z.

17) $\exists xy\ ((\mathrm{K}(x) \wedge \mathrm{P}(\mathrm{b},x)) \leftrightarrow (\neg \mathrm{D}(y) \wedge \check{\mathrm{Z}}(y,\mathrm{b}))$

Existují x a y taková, že x je kino a Bohdan půjde do x právě tehdy, když y nebude doma a y je ženou Bohdana.

18) $\forall x\ (\ \mathrm{S}(x) \rightarrow \exists y((\check{\mathrm{Z}}(y) \wedge \mathrm{M}(y)) \wedge \mathrm{R}(x,y))\ )$

Pro všechna x platí, že jestliže je savcem, tak některá y, která jsou živým mládětem, jsou taková, že x rodí to y. Analýza $\forall x\ (\mathrm{S}(x) \rightarrow \forall y((\check{\mathrm{Z}}(y) \wedge \mathrm{M}(y)) \rightarrow \mathrm{R}(x,y)))$ by byla chybná proto, že jsou i taková živá mláďata, která nejsou rozena savci, ale např. ptactvem či plazy.

19) $\forall x\ (\mathrm{M}(x) \rightarrow \exists y\ ((\check{\mathrm{R}}(y) \wedge \mathrm{V}(x,y)) \wedge \mathrm{P}(x,y)))$

Pro všechna x platí, že je-li mudrcem, tak existuje nějaké y, které je řádem a je vytvářeno díky x, a x má poslání k tomu y.

20) $\forall x\ (\ [\ \exists y\ \mathrm{V}(y) \wedge \exists z\ (\mathrm{D}(z) \wedge \mathrm{P}(x,y,z))\ ] \rightarrow\ [\ \exists z\ (\mathrm{D}(z) \wedge \mathrm{M}(x,z))\ ]\ )$

Pro všechna x, platí, že pokud existuje y, které je věc, a zároveň existuje z takové, které je dobré, a x se postaví k tomu y způsobem z, tak tedy způsobem z, který je dobrý, ten x myslí.

4.2. Řešení – věty s jedním ternárním predikátem

1) $\exists x\ \mathrm{P}(x,\mathrm{b},\mathrm{g})$

2) $\exists x\ \mathrm{P}(\mathrm{b},x,\mathrm{g})$

3) $\exists x \exists y\ \mathrm{P}(\mathrm{b},x,y)$

4) $\exists x \exists y \exists z\ \mathrm{P}(x,y,z)$

5) $\forall x \exists y\ \mathrm{P}(\mathrm{a},x,y)$

6) $\exists x \exists y \forall z\ \mathrm{P}(x,y,z)$

7) $\forall x \exists y \exists z\ \mathrm{P}(x,y,z)$

8) $\exists x \forall y \forall z\ \mathrm{P}(x,y,z)$

9) $\exists x \forall y \forall z\ \neg\mathrm{P}(x,y,z)$

4.3 Řešení – věty s jedním binárním predikátem

1) $\forall x\ \exists y\ \mathrm{R}(x,y)$

2) $\forall y\ \exists x\ \neg\mathrm{R}(x,y)$

3) $\forall x\ \exists y\ \neg\mathrm{R}(x,y)$

4) $\forall y\ \exists x\ \mathrm{R}(x,y)$

5) $\forall x\ \forall y\ \mathrm{R}(x,y)$

6) $\exists y\ \exists x\ \neg\mathrm{R}(x,y)$

7) $\forall x\ \forall y\ \neg\mathrm{R}(x,y)$

8) $\exists y\ \exists x\ \mathrm{R}(x,y)$

9) $\exists x\ \exists y\ \mathrm{R}(x,y)$

10) $\forall y\ \forall x\ \neg\mathrm{R}(x,y)$

11) $\exists x\ \exists y\ \neg\mathrm{R}(x,y)$

12) $\forall y\ \forall x\ \mathrm{R}(x,y)$

13) $\exists x\ \forall y\ \mathrm{R}(x,y)$

14) $\exists y\ \forall x\ \neg\mathrm{R}(x,y)$

15) $\exists x\ \forall y\ \neg\mathrm{R}(x,y)$

16) $\exists y\ \forall x\ \mathrm{R}(x,y)$