INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0216, OPVK)

Úvod do logiky (PL): analýza vět mimo logický čtverec

doc. PhDr. Jiří Raclavský, Ph.D.

(raclavsky@phil.muni.cz)

4. Analýza vět, které nespadají pod logický čtverec

4.1 Příklady – nezvyklé věty a věty s více monadickými predikáty

Následující věty přirozeného jazyka vyjádřete formulemi predikátové logiky (provádějte vždy co nejpečlivější analýzu, která zahrnuje všechny predikáty):

1)

Námořníky jsou jenom ostrované.

$\forall x\ (\mathrm{N}(x) \rightarrow \mathrm{O}(x))$

Nutnou podmínkou tohoto výroku je „být ostrovan“, námořníci se rekrutují jen z ostrovanů (výrok je pravdivý, i když někteří ostrované nejsou námořníky).

2)

Pouze ostrované jsou námořníky.

$\forall x\ (\mathrm{O}(x) \leftarrow \mathrm{N}(x))$

Tato věta je ekvivalentní předcházející větě $((\forall x\ (\mathrm{N}(x) \rightarrow \mathrm{O}(x))) \leftrightarrow (\forall x\ (\mathrm{O}(x) \leftarrow \mathrm{N}(x))))$, opět se námořníci rekrutují jen z ostrovanů. To je patrné i z alternativního vyjádření:

Každý je ostrovanem, jestliže je námořník.

3)

Někteří ostrované nejsou námořníci, ale Francis Drake je námořník.

$(\exists x\ (\mathrm{O}(x) \wedge \neg(\mathrm{N}(x)))\ \wedge\ \mathrm{N}(\mathrm{d})$

Tento výrok je souvětím, které je spojenou spojkou konjunkce (pro níž je „ale“ pouze stylistickou variantou). Druhý člen této formule je atomická formule (Francis Drake je jméno individua, nikoli predikátu).

4)

Žádný rybář není námořník nebo ostrovan.

$\forall x\ (\ \mathrm{P}(x) \rightarrow \neg(\mathrm{N}(x) \vee \mathrm{O}(x))\ )$

Pro všechna x platí, že je-li rybářem, tak není takový, že je námořníkem nebo ostrovanem. Jde tedy o rozvitou formu obecného záporného soudu ($\forall x$ (A$\rightarrow\neg$B), rozvitá je část B: N(x)$\vee$O(x)).

5)

Je-li někdo rybářem, není námořníkem nebo není ostrovanem.

$\forall x$ (P(x) $\rightarrow$ ($\neg$N(x)$\vee\neg$O(x)))

Tento výrok je rozvitou formou obecného kladného soudu ($\forall x$ (A$\rightarrow$B), kde rozvitá je část B: $\neg$N(x)$\vee\neg$O(x). Alternativním vyjádřením téhož je:

Kdokoli, kdo je rybářem, není námořníkem nebo není ostrovanem.

6)

Je-li někdo rybářem, není námořníkem nebo je ostrovanem.

$\forall x$ (P(x) $\rightarrow$ ($\neg$N(x) $\vee$ O(x)))

Tj. kdokoli, kdo je rybáři, není námořníkem nebo je ostrovanem. Tento výrok je opět rozvitou formou obecného kladného soudu ($\forall x$ (A$\rightarrow$B), přičemž rozvitá je část B: $\neg$N(x)$\wedge$O(x).

7)

Všichni rybáři nejsou námořníky nebo ostrovany.

$\neg\forall x$ (P(x) $\rightarrow$ (N(x)$\vee$O(x)))

Na rozdíl od věty 4) tato věta vlastně nemluví o zcela všech individuích z univerza, říká, že pro všechna individua to a to neplatí (Pro všechna x platí, že není pravda, že je-li x rybářem, tak je námořníkem nebo ostrovanem). To je ekvivalentní tomu, že některá individua to a to nemají (Existují taková x, že jsou rybáři a zároveň nejsou námořníkem nebo ostrovanem):

$\exists x$ (P(x) $\wedge$ $\neg$(N(x)$\vee$O(x)))

Tedy: „všichni nejsou“ = „ne všichni jsou“ = „není pravda, že všichni jsou“ = „někdo není“.

4.2 Příklady – věty zahrnující i binární predikáty

Následující věty přirozeného jazyka vyjádřete formulemi predikátové logiky:

1)

Marie má ráda jen lékaře.

$\forall x\ (\mathrm{R}(\mathrm{m},x) \rightarrow \mathrm{L}(x))$

Tedy: pro všechna *x* platí, že má-li to Marie ráda, pak je to lékař.

2)

Marie má ráda (všechny) lékaře.

$\forall x\ (\mathrm{L}(x) \rightarrow \mathrm{R}(\mathrm{m},x))$

3)

Jana obdivuje pouze logiky.

$\forall x\ (\mathrm{O}(\mathrm{j},x) \rightarrow \mathrm{L}(x))$

4)

Jana neobdivuje nikoho, kdo není logik. (= Nikoho, kdo není logik, Jana neobdivuje.)

$\forall x\ (\neg\mathrm{O}(\mathrm{j},x) \rightarrow \neg\mathrm{L}(x))$

5)

Neexistuje nikdo, koho by Jana obdivovala a nebyl to logik.

$\neg\exists x\ (\ \mathrm{O}(\mathrm{j},x) \land \neg\mathrm{L}(x)\ )$

Tedy: Není pravda, že existuje někdo takový, že Jana ho obdivuje a současně není logikem.

Této větě je ekvivalentní věta: Každý, koho Jana obdivuje, je logik.

$\forall x\ (\ \mathrm{O}(\mathrm{j},x) \rightarrow \mathrm{L}(x)\ )$

6)

Každý muž má rád nějaké zvíře.

$\forall x\ (\ \mathrm{M}(x) \rightarrow \exists y\ (\mathrm{Z}(y) \land \mathrm{R}(x,y)\ )$

Tedy: pro všechna *x* platí, že pokud je to muž, tak existuje nějaké *y* takové, že je zvířetem a *x* má rád to *y*. Kvantifikace existenčním kvantifikátorem se vztahuje až k předmětu toho, co *x*, který je člověkem, dělá; obecný kvantifikátor pro y, vkládáme až za znak konjunkce (celou formuli proto nezapisujeme jako $\exists y \forall x$ (...)).

7)

Kdo se bojí, nesmí do lesa

$\forall x\ (\mathrm{B}(x) \rightarrow \neg \mathrm{S}(x))$

Věta říká, že pro všechna x platí, že jestliže se bojí, pak nesmí do lesa. V češtině je však výraz „kdo“, „kdokoli“ (na rozdíl od „cokoli“) indikátorem, že jde o lidi („Č“ jako člověk). Proto je možno uvažovat analýzu:

$\forall x\ (\check{\mathrm{C}}(x) \rightarrow (\mathrm{B}(x) \rightarrow \neg \mathrm{S}(x))\ )$

Ještě odlišíme „les“ (L; platí to pro všechny lesy – nesmí do žádného lesa) a „smět do lesa“ („x smí do y“):

$\forall x\ (\check{\mathrm{C}}(x) \rightarrow (\mathrm{B}(x) \rightarrow \forall y (\mathrm{L}(y) \rightarrow \neg \mathrm{S}(x,y))\ )$

8)

Někteří lidé nemají nikoho rádi.

$\exists x\ (\mathrm{L}(x) \wedge (\forall y\ (\mathrm{L}(y) \rightarrow \neg \mathrm{R}(x,y))\ )$

Formální zápis této věty by mohl vyvolat určité pochyby, avšak výraz „nikoho“ se dá považovat za gramatický signál, že jde o opět o lidi, v analýze píšeme $\mathrm{L}(y)$. Kvantifikace obecným kvantifikátorem se však vztahuje až k předmětu toho, co onen x, který je člověkem, dělá, obecný kvantifikátor pro y, vkládáme až za znak konjunkce (celou formuli proto nezapisujeme jako $\exists x \forall y\ (\mathrm{L}(x) \wedge \neg \mathrm{R}(x,y))$).

9)

Milan nekamarádí s nikým, kdo kamarádí s Láďou.

$\forall x\ (\mathrm{K}(x,\mathrm{l}) \rightarrow \neg \mathrm{K}(\mathrm{m},x))$

Čili: pro všechna *x* platí, že kamarádí-li s *x* Láďa, tak Milan s tím *x* nekamarádí. Nutnou podmínkou je zde, že Milan nekamarádí s (někým), proto je tato podmínka vyjádřena v konsekventu.

10)

Karel je strýcem někoho, kdo je manželkou Petra.

$\exists x\ (\mathrm{S}(\mathrm{k},x) \wedge \mathrm{M}(x,\mathrm{p}))$

Čili: existují *x* taková, že Karel je strýcem toho *x* a to *x* je manželkou Petra.

11)

Každý člověk je mladší než jeho rodiče.

$\forall x\ (\check{\mathrm{C}}(x) \rightarrow \mathrm{M}(x))$

Lepší analýza:

$\forall x\ (\check{\mathrm{C}}(x) \rightarrow \forall y\ (\mathrm{R}(y,x) \rightarrow \mathrm{M}(x,y))\ )$

Čili: pro všechna *x* platí, že je-li *x* člověkem, tak pro všechna *y* platí, že je-li *y* rodičem *x*, tak *x* je mladší než *y*.

12)

Každý člověk má otce a matku.

$\forall x\ (\ \check{\mathrm{C}}(x) \rightarrow (\mathrm{O}(x) \wedge \mathrm{M}(x))\ )$

Lepší analýza, která nepoužívá predikáty „*x* má otce“ a „*x* má matku“ :

$\forall x\ (\ \check{\mathrm{C}}(x) \rightarrow \exists y,z\ (\mathrm{O}(y,x) \wedge \mathrm{M}(z,x))\ )$

Tedy: Pro všechna *x* platí, že je-li *x* člověkem, tak někdo je jeho otcem (*y* je otcem *x*) a někdo je jeho matkou (*z* je matkou *x*).

13)

Každý, kdo má otce, má i matku.

$\forall x\ (\mathrm{O}(x) \rightarrow \mathrm{M}(x))$

Lepší analýza zahrne, že „y je otcem x“ a „z je matkou x“:

$$\forall x\ (\exists y\ O(y,x) \rightarrow \exists z\ M(z,x))$$

Pro všechna x platí, že pokud existuje nějaké y takové, že y je otcem x, tak existuje nějaké z takové, že z je matkou x.

14)

Každý obyvatel vesnice má příbuzného staršího než on.

$$\forall x \exists yz\ ((V(z) \wedge O(x,z)) \rightarrow (P(x,y) \wedge S(y,x)))$$

Čili: pro všechna x existují y a z taková, že jestliže z je vesnicí a x je obyvatelem z, tak x je příbuzný y a ten y je starší než x.

15)

Kdo seje vítr, ten sklízí bouři.

$$\forall x\ (S(x) \rightarrow B(x))$$

Lepší analýza (zahrnující všechny predikáty):

$$\forall x\ (\ [\exists y(V(y) \wedge S(x,y))] \rightarrow [\exists z(B(z) \wedge S'(x,z))]\ )$$

Čili: pro všechna x platí, že pokud je nějaké y, které větrem a které ten x seje, tak je nějaké z, které je bouří a x ho sklízí; částečné kvantifikátory jsou zde proto, že x může sít nejen vítr a může sklízet nejen bouři.