



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro
mezioborová studia (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0216, OPVK)

Úvod do logiky (PL): logický čtverec

doc. PhDr. Jiří Raclavský, Ph.D.

(raclavsky@phil.muni.cz)

3. Logický čtverec

Aristotelská a posléze tradiční scholastická logika pracovala jen s jednomístnými (tj. monadickými) predikáty, je tudíž pouze fragmentem PL1. Věty byly analyzovány jako určitá spojení subjektu (nikoli gramatického subjektu, ale subjektu v logickém-aristotelském smyslu) a predikátu; říkáme přitom, že prostřednictvím takové věty subjektu predikujeme vlastnost F.

Specifickými druhy výroků, které byly utříděny, jsou ty, které se nachází v *logickém čtverci* („square of opposition“, vzácněji „logical square“). Výroky-soudy logického čtverce jsou takové stavby, že na místě subjektu je ‚třídivý termín‘ (budeme ho obecně značit A) a v místě predikátu je jiný ‚třídivý termín‘ (ten budeme obecně značit B). Když budeme níže mluvit o neprázdnosti termínu A, znamená to, že existuje individuum, které je (má vlastnost) A.

Kvality výroků

U těchto základních výroků-soudů byly rozpoznány celkem dvě dvojice charakteristik, totiž to, zda je daný výrok obecný či částečný, tedy tzv. *kvantita* soudu, a dále to, zda se jedná o výrok-soud kladný či záporný, tedy tzv. *kvalita* soudu. Výrok se nazývá:

obecný - pokud se v něm něco tvrdí o individuích obecně

částečný - pokud se v něm něco tvrdí jen o některých individuích

kladný - pokud se v něm nevyskytuje zápor (resp. negace)

záporný - pokud se v něm vyskytuje zápor (resp. negace)

Na základě možných distribucí kvality a kvantity vznikají celkem čtyři možnosti druhů výroků. Tyto možnosti byly ve středověku označovány písmeny

a, e, i, o,

příčemž *a*, značící obecný kladný soud, a *i*, značící částečný kladný soud, pochází ze samohlásek latinského slova *affirmo* (tj. tvrdím) a *e*, značící obecný záporný soud, a *o*, značící částečný záporný soud, pochází ze samohlásek latinského slova *nego* (tj. popírám). S pomocí těchto písmen jsou druhy soudů značeny následujícím způsobem:

„Každé A je B.“	<i>AaB</i>	<i>obecný kladný soud</i>
„Některá A jsou B.“	<i>AiB</i>	<i>částečný kladný soud</i>
„Žádné A není B.“	<i>AeB</i>	<i>obecný záporný soud</i>
„Některá A nejsou B.“	<i>AoB</i>	<i>částečný záporný soud</i>

Zde je srovnání vyjádření těchto čtyř druhů výroků v tradiční logice, predikátové logice, Boolově algebře; v posledním sloupci je vyjádření s tzv. omezenými („restricted“) kvantifikátory:

tradiční logika	predikátová logika	Boolova algebra	s omezenými kvantifikátory
<i>AaB</i>	$\forall x (A(x) \rightarrow B(x))$ či $\neg \exists x (A(x) \wedge \neg B(x))$	$A \cap B = A$ ($A \cup B = B$)	$(\forall x \in A) B(x)$
<i>AiB</i>	$\exists x (A(x) \wedge B(x))$ či $\neg \forall x (A(x) \rightarrow \neg B(x))$	$A \cap B \neq \emptyset$	$(\exists x \in A) B(x)$
<i>AeB</i>	$\forall x (A(x) \rightarrow \neg B(x))$ či $\neg \exists x (A(x) \wedge B(x))$	$A \cap B = \emptyset$	$(\forall x \in A) \neg B(x)$
<i>AoB</i>	$\exists x (A(x) \wedge \neg B(x))$ či $\neg \forall x (A(x) \rightarrow B(x))$	$A \cap B' \neq \emptyset$ ($A \cup B \neq B$)	$(\exists x \in A) \neg B(x)$

Pohotové chápání formulí predikátové logiky, jimiž přepisujeme výroky diskutovaných čtyř druhů, je jednou z nejpodstatnějších dovedností, jež adept logiky musí v úvodním kurzu ovládnout. Jako pomůcku zde proto uvádíme převyprávění těchto čtyř formulí do „logičtiny“.

$\forall x (A(x) \rightarrow B(x))$	Všechna A jsou B.	tj.	Co je v A, je v B.
	nebo:		Je-li x v (množině) A, tak je i v (množině) B
$\exists x (A(x) \wedge B(x))$	Některá A jsou B.	tj.	Něco je v průniku A s B.
	nebo:		Alespoň jedno x je v (množině) A i v (množině) B.
$\forall x (A(x) \rightarrow \neg B(x))$	Žádná A nejsou B.	tj.	Nic není v průniku A s B.
	nebo:		Je-li x v (množině) A, tak není v (množině) B.
$\exists x (A(x) \wedge \neg B(x))$	Některá A nejsou B.	tj.	Prvek A není v B.
	nebo:		Alespoň jedno x je v (množině) A, ale není v (množině) B.

Vztahy výroků

Výroky těchto čtyř kvalit mají rozmanité vztahy, jež byly předměty logického zájmu. Tradiční logika jich rozpoznávala více než moderní logika, jež si ponechala jen první z níže jmenovaných vztahů. Zbylé vztahy neplatí zcela obecně a příčina jejich neplatnosti se dává do souvislosti s tzv. neprázdností některých termínů.

- *kontradikčnost* (kontradiktoričnost, protikladnost): přesný opak, negace daného výroku

např. „Všichni šimpanzi jsou zvířata“, „Někteří šimpanzi nejsou zvířata“

- *subalternost* (podřazenost): lze přejít od a k i (nikoli však naopak), či od o k e (nikoli však naopak), tedy a implikuje i (podobně pro o a e) (Dle moderní logiky tento vztah neplatí, protože první věta je pravdivá i za okolností, kdy žádní šimpanzi neexistují a tedy ta druhá věta je nepravdivá.)

např. „Všichni šimpanzi jsou zvířata“, „Někteří šimpanzi jsou zvířata“

- *kontrárnost* (protiva): výroky a a e nemohou být oba pravdivé, ovšem oba mohou být nepravdivé

např. „Všichni šimpanzi jsou zvířata“, „Žádní šimpanzi nejsou zvířata“

- *subkontrárnost* (podprotiva): výroky *o* a *i* nemohou být oba nepravdivé, ovšem oba mohou být pravdivé

např. „Některá zvířata nejsou šimpanzi“, „Některá zvířata jsou šimpanzi“

Obraty (platné ekvivalence výroků)

Tradiční logika si uvědomovala i ekvivalentnost zachovávající transformace výroků, které uznává i moderní logika. Důvody zachování ekvivalentnosti v rámci moderní logiky jsou jasné z formálních přepisů.

obrat prostý (konverze výroků) - kvantita je zachována

$$AiB \leftrightarrow BiA \quad \exists x (A(x) \wedge B(x)) \leftrightarrow \exists x (B(x) \wedge A(x))$$

$$AeB \leftrightarrow BeA \quad \forall x (A(x) \rightarrow \neg B(x)) \leftrightarrow \forall x (B(x) \rightarrow \neg A(x))$$

obrat po případě - kvantita je oslabena

$$AaB \rightarrow BiA \quad \forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow \exists x (A(x) \wedge B(x))$$

(předpokladem platnosti tohoto vztahu je ale neprázdnot A a B)

$$AeB \rightarrow BoA \quad \forall x (A(x) \rightarrow \neg B(x)) \rightarrow \exists x (A(x) \wedge \neg B(x))$$

(předpokladem pravdivosti je ale neprázdnot A)

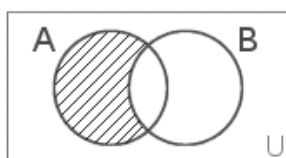
Nedostatky logického čtverce

Logický čtverec jako takový je značným zjednodušením jazykové situace, usouvztažňuje totiž pouze některé výroky. V jeho obvykle prezentované formě logický čtverec nezahrnuje singulární výroky (někteří středověcí logici ale do logického čtverce singulární výroky kladli, byť je museli upravovat na kvantifikující výroky). Neklasifikuje ovšem ani výroky, v nichž kromě kvantifikátoru vystupují jiné logické spojky, než v obvyklém přepisu výroků logického čtverce; srov. například „Něco je kulaté nebo hranaté“.

Logický čtverec

Schématické výroky diskutovaných čtyři druhů jsou pro smyslovou názornost nanášeny na vrcholy čtverce tak, aby byly vyjádřeny i výše diskutované vztahy kontradiktornosti, (sub)kontrárnosti a subalterace.

Tento obvyklý obrázek zde pro komplexnost informace obohacujeme i o formální přepisy (vč. ekvivalentu odvoditelného na základě De Morganových zákonů a tautologií z výrokové logiky odvoditelného na základě De Morganových zákonů a tautologií z výrokové logiky) a zvláště pak grafické vyjádření výroků Vennovými diagramy, jež prodiskutujeme níže.

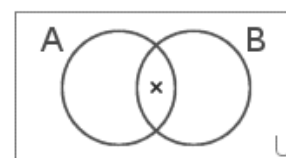


„Všechna A jsou B.“

$$\forall x (A(x) \rightarrow B(x))$$

nebo: $\neg \exists x (A(x) \wedge \neg B(x))$

obecný kladný výrok

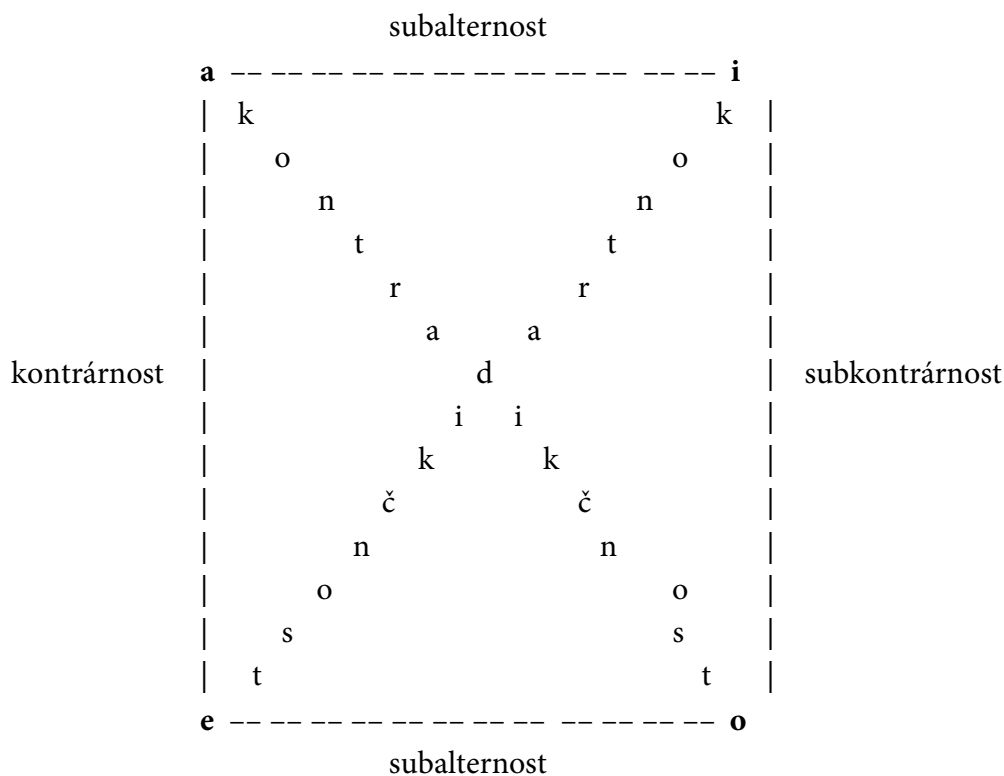


„Některá A jsou B.“

$$\exists x (A(x) \wedge B(x))$$

nebo: $\neg \forall x (A(x) \rightarrow \neg B(x))$

částečný kladný výrok



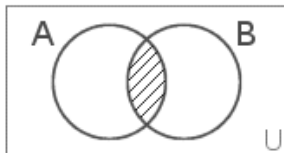
„Žádná A nejsou B.“

„Některá A nejsou B.“

$$\forall x (A(x) \rightarrow \neg B(x))$$

nebo: $\neg \exists x (A(x) \wedge B(x))$

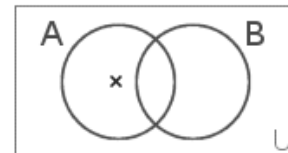
obecný záporný výrok



$$\exists x (A(x) \wedge \neg B(x))$$

nebo: $\neg \forall x (A(x) \rightarrow B(x))$

částečný záporný výrok



Vennovy diagramy

Vennovy diagramy jsou množinovým grafickým vyjádřením výroků (připomeňme, že predikáty jsou v PL chápány jako množiny). Vennovy diagramy jsou odlišné od známějších diagramů Eulerových (Eulerovy diagramy nepostihují všechny případy vyjádření, které jsou nezbytné k zachycení výroků spadajících pod logický čtverec, následně pak nepostačují k zachycení platnosti kategorických sylogismů).

Částečné výroky vyznačujeme pomocí křížku, které reprezentuje nějaké (alespoň jedno) individuum, o kterém daný výrok může platit. V případě částečného kladného výroku zakresluje křížek do (graficky vyjádřeného) průniku („rybičky“) obou množin; vyznačujeme tedy takový stav, kdy alespoň jedno individuum má vlastnost A i B.

V případě částečného záporného výroku zakresluje křížek do té (graficky vyjádřené) části množiny A, „půlměsíce“, který je mimo množinu B; vyznačujeme tedy takový stav, kdy alespoň jedno individuum má vlastnost A, avšak nemá vlastnost B.

Obecné výroky vyznačujeme pomocí šrafování, které reprezentuje, že v daném poli se zcela žádné individuum nenachází. Šrafování je takto jaksi negativní, což je rozdíl od šrafování, které je zažité ze základní školy a Eulerových diagramů (pozor na konfúzi!). (Pozn.: v mnoha novějších učebnicích se místo šrafu radši používá znak prázdné množiny, tj. $\emptyset$ (přeškrtnutá 0); šrafování je ale přece jen výhodnější.) V případě obecného záporného výroku šrafujeme (graficky vyjádřený) průnik („rybičku“) obou množin; vyznačujeme tedy takový stav, že žádný prvek A nenáleží zároveň do množiny B. V případě obecného kladného výroku šrafujeme tu (graficky vyjádřenou) část množiny A, „půlměsíce“, který je mimo množinu B;

vyznačujeme tedy takový stav, kdy žádné individuum nemá vlastnost A, aniž by mělo vlastnost B.

Ačkoliv se vyznačování toho, že v případě obecného kladného výroku se žádné individuum v „půlměsíci“ nenachází, zdá neobvyklé, zcela přesně reprezentuje to, co vyjadřuje daný výrok (totiž implikativní spojení atomických formulí). Uvědomme si, že výrok

„Každý jednorožec je savec“

je nepravdivý jen v případě, že jednorožci nejsou savci, avšak je pravdivá v případech, kdy a) pro všechna x , která jsou jednorožcem (atomický výrok $J(x)$ je pravdivý) platí, že jsou savcem (atomický výrok $S(x)$ je tedy také pravdivý), b) žádné jednorožci nejsou (atomický výrok $J(x)$ je nepravdivý) a nikdo také není savcem (atomický výrok $S(x)$ je tedy také nepravdivý), anebo c) b) žádné jednorožci nejsou (atomický výrok $J(x)$ je nepravdivý), avšak nějaký x - o nichž nic bližšího nevíme - jsou savci (atomický výrok $S(x)$ je tedy pravdivý).

Dále si na Vennových diagramech všimněme, že pokud chceme vyjádřit pravý opak tvrzení, že A a B mají společný prvek, tak musíme říci (a vyšrafovat), že v průniku A a B žádná individua nejsou. Pokud chceme vyjádřit pravý opak tvrzení, že všechny prvky A (jsou-li jaké) jsou též v množině B, tak musíme říct, že existuje alespoň jeden prvek množiny A, který nenáleží do množiny B. Analogicky naopak.