INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0216, OPVK)

Úvod do logiky (PL): jazyk predikátové logiky

doc. PhDr. Jiří Raclavský, Ph.D.

(raclavsky@phil.muni.cz)

1. Jazyk predikátové logiky prvního řádu (PL1)

Jazyk predikátové logiky prvního řádu (PL1) lze zadat různými zadáními abecedy a zčásti i gramatiky. Níže ukazujeme jednu z častých možností.

Abeceda:

i. symboly pro individuové proměnné $x, y, z, \ldots x_1, y_1, z_1, \ldots$

ii. symboly pro individuové konstanty $\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_n$

iii. symboly pro predikáty (i značí aritu predikátu; $i \geq 1$) $\mathrm{P}^i, \mathrm{Q}^i, \mathrm{R}^i, \ldots, \mathrm{P}_1{}^i, \mathrm{P}_2{}^i, \ldots$

iv. symboly pro výrokově logické spojky $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \ldots$

v. symboly pro kvantifikátor částečný a obecný $\exists, \forall$

vi. pomocné symboly (,), , příp. [,].

Poznámky. Částečný (existenční) kvantifikátor je značen podle prvního písmene německého slova Exist (je zván též malý kvantifikátor); někdy je značen pomocí Σ (či \/), anebo v anglosaské literatuře někdy pomocí „(Ex)“. Obecný kvantifikátor je značen podle prvního písmene německého slova „Alle“ (je nazýván též velký kvantifikátor); někdy je značen pomoci Π (či /\), anebo zvláště v anglosaské literatuře pomocí „(x)“.

Jednomístným predikátům (P^1, Q^1, ...) se říká *monadické predikáty*. Dvojmístným predikátům (P^2, Q^2...) se říká *binární predikáty*. Obecně n-místným predikátům (P^n, Q^n...) se říká *n-ární predikáty*.

PL1 bývá rozšiřována o funkcionální symboly o identitu (=) a ($\mathrm{f}_1{}^i$, $\mathrm{f}_2{}^i$, ...). Viz pšíslušná (pod)kapitola.

Gramatika:

1) *termy*

i) každá individuová proměnná je *term*

ii) každá individuová konstanta je *term*

Pozn.: Termy druhu i) a ii) nechť jsou značeny d_x, někdy t_x.

2) *správně utvořené formule (s.u.f.)*

2.1) *atomické formule*

i) jestliže P^k je k-místný predikátový symbol a jestliže d_1, ..., d_k jsou termy, pak $P^k(d_1, ..., d_k)$ je s.u.f.

2.2) *molekulární formule*

i) jestliže A, B jsou s.u.f. (avšak nejen atomické), pak $\neg$A, (A*B) (kde * je $\wedge$ nebo $\vee$, či $\rightarrow$, či $\leftrightarrow$) jsou s.u.f.

ii) jestliže x je proměnná a A je s.u.f., pak $\exists x$A a $\forall x$A jsou s.u.f.

3) nic jiného není s.u.f.

Poznámky. Znaky A, B, C jsou metajazykovými znaky pro formule (ve kterých mohou být proměnné).

Můžeme užívat notační konvenci, podle níž budeme psát $\forall x_1 ... x_n$A místo $\forall x_1$, $\forall x_2$, ... , $\forall x_n$A; stejně tak pro $\exists$.

Mj. obecný kvantifikátor lze v případě konečného univerza nahradit konjunkcí $P(a_1) \wedge ... \wedge P(a_n)$, existenční kvantifikátor zase disjunkcí $P(a_1) \vee ...\ P(a_n)$ (kde a_1, ..., a_n jsou individuové konstanty).

Volnost a vázanost proměnných,

Volnost, resp. vázanost proměnné se vždy týká určitého výskytu dané proměnné. V jedné formuli proto může být jedna proměnná jak volná (v určitém výskytu), tak vázaná (v nějakém jiném výskytu).

i. Výskyt x v x je volný;
ii. výskyt x je volný v $\neg$A, A*B, je-li volný v A, resp. i v B;
iii. výskyt x je volný v $\forall y$A, $\exists y$A, je-li volný v A a jde o proměnnou odlišnou od y.

Čili proměnná je volná v A, jestliže má v A alespoň jeden výskyt volný, a naopak - proměnná je vázaná v A, jestliže jsou všechny její výskyty v A vázány kvantifikátorem.

Uzavřená formule je formule, v níž jsou všechny proměnné vázány.
Otevřená formule je taková formule, v níž je alespoň jeden výskyt alespoň jedné proměnné volný.