



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0216, OPVK)

Úvod do logiky (VL): 15. Neklasické výrokové logiky

doc. PhDr. Jiří Raclavský, Ph.D.

(raclavsky@phil.muni.cz)

15. Neklasické výrokové logiky

Posláním této kapitoly je aspoň stručně referovat o současných významných a zavedených alternativách ke klasické VL; pro bližší seznámení s nimi je nezbytné konzultovat doporučenou literaturu. Neklasičnost znamená, že tyto logické systémy záměrně rezignují na některý z fundamentálních principů klasické logiky. Jak uvidíme, nezřídka se rozešly s Principem dvouhodnotovosti; někdy se částečně rozešly i s Principem kompozicionality (někdy se v této souvislosti říká, že jsou proto intenzionální), což znamená, že význam formule nelze jednoduše dopočítat z významů složek, jak bychom očekávali. Věk neklasických logik začíná vlastně až po druhé světové válce. V prostředí filosofické logiky má dominantní postavení modální logika a její varianty. Nutno ještě podotknout, že všechny z níže jmenovaných logik mají predikátově-logickou variantu.

Trojhodnotové logiky

Trojhodnotová logika byla v době mezi dvěma světovými válkami navržena nezávisle více autory, nejvýznamnější je Jan Łukasiewicz. Toho inspiroval Aristotelův příklad vět o budoucích událostech (např. o budoucí námořní bitvě), jejichž pravdivost není nyní zjištělná. Dmitrije Bočvara zase inspirovaly paradoxní věty, jejichž pravdivost rovněž není určitelná. Třetí pravdivostní hodnota bývá značena například pomocí „ $\frac{1}{2}$ “ (nebo „2“, „U“, „I“ či „ $\perp$ “) a je čtena jako „nerozhodnuto“, „neurčitelná“, „není známo“ či „paradoxní hodnota“ apod. Po druhé světové válce Stephen C. Kleene pomohl propagaci *parciální dvouhodnotové logiky*, přičemž absence pravdivostní hodnoty u nějaké funkce bývá reprezentována právě třetí pravdivostní hodnotou, takže daný přístup je chápán jako trojhodnotový. (Bočvarova logika je známa pod názvem Kleeneho slabá („weak“) logika.) V trojhodnotové logice máme 3 umocněno na 3^n n -argumentových spojek, tj. 27 unárních spojek, 729 binárních, atd. Dílčí trojhodnotové logiky se liší tím, jaké spojky si vybírají. Například Kleene vybral operátory, které se sémanticky chovají jako zobecněné-rozšířené klasické spojky. Pro ilustraci si zde ukážeme jen tři různé implikace a tzv. slabou (angl. „weak“) a silnou (angl. „strong“) negaci (angl. zvanou též „denial“):

$\neg$	p
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0

$\sim$	p
0	1
1	$\frac{1}{2}$
1	0

$\rightarrow$		q		
Łukasiewicz		1	$\frac{1}{2}$	0
p	1	1	$\frac{1}{2}$	0
	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
	0	1	1	1

$\rightarrow$ Bočvar		q		
		1	$\frac{1}{2}$	0
p	1	1	$\frac{1}{2}$	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	0	1	$\frac{1}{2}$	1

$\rightarrow$ Kleene		q		
		1	$\frac{1}{2}$	0
p	1	1	$\frac{1}{2}$	0
	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	0	1	1	1

V trojhodnotové logice obvykle neplatí tautologie klasické logiky. Například Bočvarův systém „propaguje“ třetí pravdivostní hodnotu natolik, že třetí pravdivostní hodnotu má každá formule, jejíž nějaká podformule nabývá třetí pravdivostní hodnotu; zákonitě pak žádná formule nemůže mít pravdivostní hodnotu 1 při všech valuacích. To odpovídá pojetí třetí pravdivostní hodnoty jako paradoxní hodnoty, jež „nakazí“ vždy celý výrok. V jiných trojhodnotových logikách tomu tak ale není, například je rozumné disponovat disjunkcí, jež je 1, pokud aspoň jeden disjunkt je 1, takže má-li ten druhý disjunkt třetí pravdivostní hodnotu, celek je stejně 1.

Vícehodnotové logiky

Vícehodnotových logik („many valued“) je celá řada, některé z nich však vystupují jako soběstačné systémy, např. fuzzy logika, poněvadž se vyznačují něčím více, než jen implementací více než dvou pravdivostních hodnot. Někteří autoři mají tendenci vícehodnotové logiky porovnávat (např. Siegfried Gottwald, Melvin Fitting), jiní zas pracují na vybrané z nich (např. Heinrich Wansing a Jaroslav Šramko pracují na 16hodnotové logice). V poslední době měla v rámci filosofické logiky značný ohlas 4hodnotová logika Nuela Belnapa, který se pro uvedení 4 pravdivostních hodnot inspiroval tím, že počítač, jehož činnost chceme modelovat, dostává pro své stavy informace pravdivé / nepravdivé / sporné / žádné.

Fuzzy logiky

Fuzzy logika (česky někdy *mlhavá logika*) byla vyvinuta v následnictví teorie fuzzy množin, kterou navrhl v 60. letech 20. století Lofti A. Zadeh jako množinovou teorii uplatnitelnou v oblastech, v nichž nejsou striktně určeny prvky daných množin, resp. dané predikáty jsou vágní (příkladem je hromada písku a mj. s tím související paradox sorites). Fuzzy logika patří mezi vícehodnotové logiky, namísto určitých hodnot používá celý interval $[1,0]$, výroky tedy ohodnocuje mírou pravdivosti. Nutno podotknout, že výrokové spojky se chovají zcela klasicky na klasických hodnotách 1 a 0. Fuzzy logika je úspěšně nasazována v teorii řídicích systémů (aplikacemi jsou fuzzy regulátory např. v automatických pračkách), neboť je s to zpracovávat neurčitou informaci či instrukci (např. „voda je středně málo teplá“, „zatočit hodně doleva“). Rozvoj fuzzy logiky akceleroval v 80. letech 20. století, významnými představiteli jsou Siegfried Gottwald a náš Petr Hájek, dále jsou v mezinárodním prostředí úspěšní Vilém Novák, Jan Pavelka, z mladší generace pak Libor Běhounek, Petr Cintula; fuzzy logika se však pěstuje v celém technologicky vyspělém světě. Fuzzy VL se základně dělí na tzv.

základní, Łukasiewiczovu, Gödelovu a produktovou logiku, jež se navzájem liší druhem t-normy („triangular norm“), což je např. $\min(x,y)$ jakožto sémantika spojky $\wedge$.

Modální logiky

Modální logika má kromě trojhodnotové logiky ještě předchůdce v *kalkulu striktní implikace*. Operátor *striktní implikace* (značena budiž třeba $\gg$, oficiální znak připomíná malou harpunu) uvedl Clarence I. Lewis po první světové válce v kritické reakci na Russellova a Whiteheadova Principia Mathematica. Striktní implikace má slovní obdobu „není pravda, aby bylo možné, že A je pravdivé a B nepravdivé“; formálně $A \gg B =_{\text{df}} \neg \Diamond(A \wedge \neg B)$, kde $\Diamond$ je znak pro „je možné, že“. S kalkulem striktní implikace pracovala i významná modální logička Ruth Barcan Marcusová.

Modální logika využila formalizovaného pojmu možnosti a nutnosti k vystavění celé řady logických systémů. Před jejich stručným popisem nejprve rozšíříme gramatiku VL. Logická nutnost, značená $\Box$ (angl. „box“) je v běžném jazyce vyjádřena pomocí „je nutné, že ...“; logická možnost, značená $\Diamond$ (angl. „diamond“), je v jazyce vyjadřována pomocí „je možné, že ...“; možnost je zpravidla zavedena jako $\Diamond A =_{\text{df}} \neg \Box \neg A$. Oba slovní obraty jsou samozřejmě poněkud vágní (nutnost třeba znamená logickou, ale někdy i fyzikální modalitu, atp.), čemuž odpovídají různá zpřesnění v rámci různých modálních systémů. Protože v pozici „...“ je výrok, modální operátory se chovají přibližně jako kvantifikátory, avšak vztažené k větám; například nutnost A se zdá znamenat, že A je pravdivá za všech okolností, vždy. Aplikujeme-li modální operátory na predikáty, věc se stane méně samozřejmou a po formální i výkladové stránce vznikne řada komplikací.

Modální systém značený K je základní a rovněž slabý systém. Vznikne tím, že k VL (tj. k nějakému úplnému a korektnímu kalkulu pro VL) přidáme *Pravidlo necesitace*:

Jestliže $\vdash A$, pak také $\vdash \Box A$.

a *Axiom distributivity*, značený někdy též K:

$$\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B).$$

Systém T vznikne přidáním axiomu T ke K:

(T) $\Box A \rightarrow A$ („je-li nutné, že A , tak A “)

T-axiom se chová jako intuitivní axiom pravdivosti: „je-li pravdivé, že A , tak A “. Známé a používané systémy S4 a S5 mají řadu dílčích variant. Vzniknou kromě jiného přidáním iteračních axiomů:

(4) $\Box A \rightarrow \Box \Box A$ („je-li nutné, že A , tak je nutné, že je nutné, že A “)

(5) $\Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A$ („je-li možné, že A , tak je nutné, že je možné, že A “)

Základní modální systémy byly navrženy již C. I. Lewisem, ovšem jejich intuitivní sémantika byla nahrazena explicitní sémantikou, kterou na počátku 60. let navrhl Saul A. Kripke, jenž při tom uplatnil teorii modelů; výsledek se obecně jmenuje *sémantika možných světů* (angl. „possible world semantics“). Základní myšlenkou Kripkeho sémantiky je, že formule A je pravdivá relativně k tzv. *možnému světu* w . Tento w můžeme chápat jako alternativní popis našeho světa (historický termín „možný svět“ svádí k nevhodné konotaci, že jde o nějaký alternativní vesmír). Kolekci možných světů značme W ; jeden prvek W je aktuálním možným světem, jde tedy o platný popis světa. Poněkud zjednodušeně řečeno, formule $\Box A$ je pravdivá právě tehdy, když A je pravdivá ve všech w ; formule $\Diamond A$ je pravdivá právě tehdy, když A je pravdivá alespoň v jednom w .

To, co se označuje jako *kripkovská sémantika*, je vylepšením této ideje. Jistě ne každá posloupnost možných světů může korespondovat vývoji našeho světa, čili ne v každém w jsou zcela všechny možné w' reálnými alternativami. Například je-li Alík psem, není bezprostředním pokračováním daného světa svět, v němž je Alík kočkou (v oblasti epistemické logiky: vím-li ve w A , pokračováním není w' , v němž platí $\neg A$). Uspořádávání světů do posloupností je dáno povahou na nich operující relace R , která je nazývána *relací dosažitelnosti* (angl. „accessibility“). Její vlastnosti jsou zachyceny axiomy, například reflexivně odpovídá $\Box A \rightarrow A$, symetrii $A \rightarrow \Box \Diamond A$, tranzitivitě $\Box A \rightarrow \Box \Box A$; různým kombinacím těchto axiomů tedy odpovídají různé druhy R . K interpretaci formulí nejen modálních logik se pak používá tzv. struktura $\langle W, @, R \rangle$, kde $@$ je vybraný („startovní“) možný svět z W . Z mnoha modálních logiků či logiků aspoň někdy pracujících s modální logikou se omezme jen na autory významných učebnic či přehledů modální logiky, Maxe J. Cresswella, G. E. Hughese, Briana Chellase, Melvina Fittinga, Patricka Blackburna, Maarten de Rijke a Yde Venemu; známé aplikace v problematice kontrafaktualů pochází od Davida Lewise a Roberta Stalnakera.

Temporální logiky

Aletické modality jako třeba nutnost jsou jen jedním druhem modalit, úzce příbuznými jsou temporální modality. Proto není překvapením, že modální logika bývá vykládána jako *temporální logika*, kdy posloupnost časových okamžiků (namísto světů) je lineárně uspořádána. Základními operátory jsou P jakožto formalizace „platilo, že“ a F jakožto formalizace „bude platit, že“, dalšími pak H – „dosud platilo, že“, G – „(od teď) vždy bude platit, že“. Zakladatelem temporální logiky byl na konci 50. let Arthur N. Prior, pokračovateli pak např. Hans Kamp, Johan van Benthem, v aplikacích pro modelování stavů počítačových programů pak např. Richard Goldblatt.

Epistemické logiky

Epistemická logika zkoumá logické vztahy mezi výroky s epistémickými operátory jako například „je známo, že“ či „domnívám se, že“ (logika domnívání byla nazývána *doxastická logika*). Je-li epistemická logika výkladem modální logiky, $\Box$ je vykládáno jako vědění, $\Diamond$ jako domnívání; v *multimodální logice*, jež už užívá $\Box$ a $\Diamond$, jsou pro ony dva pojmy rezervovány znaky K a B . Zakladatelem epistemické logiky je Jaakko Hintikka, který ji na začátku 60. let 20.

století předložil jako variantu modální logiky. V současnosti je epistemická logika využívána například ve formální epistemologii. Je třeba poznamenat, že postupem doby se ukázalo, že klasické axiomy a teoremy modální logiky jsou příliš silné v tom smyslu, že reprezentují znalosti agentů, kteří jsou epistemicky přespříliš dokonalí. Pro příklady není třeba chodit daleko, stačí přezkoumat libovolný axiom (s výjimkou $KA \rightarrow A$, jež reprezentuje část klasického názoru, že znalost je odůvodněné pravdivé přesvědčení). Například $KA \rightarrow KKA$ (tj. iterační axiom S4) říká, že vím-li A , tak také vím, že to vím, ač reálně mohou být moje kognitivní schopnosti oslabeny, takže konsekvent by neplatil; axiom $K(A \rightarrow B) \rightarrow (KA \rightarrow KB)$ zase zavazuje agenty ke znalosti vůbec všech logických důsledků svých přesvědčení, ač reálně žádní vševědoucí agenti neexistují.

Deontické logiky

Deontická logika (řecké „deontos“ znamená povinný, žádoucí), resp. *logika norem*, někdy též *logika imperativů*, byla založena v 50. letech 20. století Georgem Henrykem von Wrightem jako jedna z prvních variant modální logiky, a to za účelem využití v oblasti tzv. *právní logiky*. Základními operátory jsou O (angl. „obligatory“, „je přikázáno“), P (angl. „permitted“, „je dovoleno“), F (angl. „forbidden“, „je zakázáno“); vzájemná definovatelnost je tato: $Op =_{df} \neg P\neg p$, $Pp =_{df} \neg O\neg p$, $Fp =_{df} \neg Pp$. Deontická logika se zdá být potřebná a žádoucí, nicméně od počátku zápasí s palčivými paradoxy, které plynou z příliš hrubé analýzy deontických pojmů. Například Rossův paradox ukazuje, že zdánlivě přijatelné formální odvození $Op \vdash O(p \vee q)$ je silně neintuitivní, uvažme „Odešli tento dopis“ $\vdash$ „Odešli tento dopis nebo jej spal“. Představiteli deontické logiky jsou dále např. Risto Hilpinen, Dagfin Føllesdal, Lennart Åqvist. V současnosti probíhá výzkum zvláště v oblasti (někdy i počítačově implementované) *deontic action logic*, představitelem je např. Krister Segerberg.

Erotetické logiky

Erotetická logika, často nazývaná i *logika otázek*, většinou staví na modální logice, ovšem někdy zavádí speciální operátory jako „?“ . Soustřeďuje se na logickou analýzu a klasifikaci otázek a problému přiměřenosti odpovědí. Jedním z prvních logiků věnujících se této tématice byl v polovině 70. let 20. století Nuel Belnap, v současnosti je významným např. Andrzej Wiśniewski. Dnes se objevuje erotetická logika jako součást dynamických epistemických logik (zkoumajících komunikaci agentů).

Intenzionální logiky

Termín *intenzionální logika* byl zaveden na počátku 70. let 20. století pro práce zejména Richarda Montagueho, které se sice zabývaly modální logikou, popřípadě nějak rozšířenou o temporální parametr, nicméně spíše než o studium logických struktur jako takových se jedná o aplikace v oblasti přirozeného jazyka, totiž o modelování jazykových významů. Montague a jeho následovníci (v lingvistice Barbara Hall Partee) uvažují, že významem běžných predikátů či vět jsou *intenze* modelované jakožto funkce z možných světů. Například propoziční postoj popisovaný ve větě jako „Adam si myslí, že prší“ je vztahem

Adama k určité intenzi (nazývané propozice), nikoli k pravdivostní hodnotě (což je hodnota té intenze v nějakém možném světě). Postulovat takový druh významu pro věty je nezbytné pro vysvětlení inferencí, které by byly vysvětleny chybně, pokud bychom využívali jen extenze (zde jmenovitě pravdivostní hodnoty). Spíše než v rámci výrokových logik jsou ideje intenzionální logiky uplatněny v prostředí predikátových logik.

Intuicionistické logiky

Intuicionistická logika má původ ve vlivné filosofii matematiky Luciena E. J. Brouwera, který argumentoval, že doposud nerozhodnuté matematické propozice nelze považovat za pravdivé nebo nepravdivé, a proto neplatí zákon vyloučeného třetího – což je základní znak intuicionistické logiky. Neplatí v ní ani další teoremy klasické VL; uznán není nepřímý důkaz. (Matematika je pro intuicionistické matematiky studiem myšlenkových konstrukcí, odtud termín *konstruktivismus*.) Technické vypracování intuicionistické VL provedl už ve 30. letech 20. století Arend Heyting. Sémantiku nezávisle vyvinul i Andrej Kolmogorov, proto termín BHK interpretace intuicionistické logiky (podle ní např. dokázat výrok $A \wedge B$ znamená dokázat A a B ; výroky jsou chápány spíše jako problémy než věty). V současné době filosoficky obhazuje intuicionismus Michael Dummett, Dirk van Dalen, v techničtější oblasti pracují Anne Sjerp Troelstra a Per Martin Löf, který podnítl i aplikace v teorii automatického dokazování. Některá rozšíření intuicionistické logiky se nazývají *intermediate logics*.

Relevanční logiky

Relevanční logika, nebo též *relevantní logika*, má inspiraci v Lewisově kritice materiální implikace. Například se nejeví příliš intuitivní z „Prší“ odvodit „Má-li Adam auto, prší“ (dle zákona $A \vdash B \rightarrow A$), odtud termín *paradoxy materiální implikace*. Relevantisté si na přelomu 60. a 70. let 20. století povšimli, že materiální implikace pomíjí relevanci, ‚obsahovou souvislost‘. Relevanční implikace (obvykle značená $\rightarrow$, takže se liší od materiální implikace $\supset$) tuto souvislost zapracovává. To znamená, že relevanční $\rightarrow$ nemůže mít sémantiku shodnou s kteroukoli z výše studovaných 16 výrokových spojek, ale nějakou podstatně sofistikovanejší sémantiku, což jednoduchý zápis $A \rightarrow B$ neprozrazuje. Proponenty byli Alan Ross Anderson, Nuel Belnap, v současnosti se často zmiňuje sémantika vypracována Richardem Routleym (po přejmenování: Richard Sylvan), k dalším významným relevantistům patří R. K. Meyer, Edwin Mares.

Parakonzistentní logiky

Parakonzistentní logika je v rámci filozofické logiky aktuálně velmi studována, dobu vzniku má ve druhé polovině 70. let 20. století. Původní motivaci pro její existenci můžeme najít ve snaze rozhodnout paradoxní věty, jež zřejmě buď nemají žádnou hodnotu (to bychom se ale přiklonili jako Kripke a jiní k nějaké parciální logice), anebo mají obě dvě pravdivostní hodnoty záraz. To navrhl nejznámější proponent parakonzistentní logiky, Graham Priest a toto okaté porušení Principu dvouhodnotovosti nazval dialetheia (dvojpravda). Důležité je, že ze sporu parakonzistentní logika nevyvozuje cokoli, odmítá totiž Princip Dunse Scota, jenž

je barvitě nazýván Princip exploze. Potvrzující motivaci lze vidět například v systémech právních norem, které většinou obsahují skrytý spor, ale z toho přece nevyvozujeme, že se smí cokoli. Priest se později přiklonil nejen k myšlenkám relevantní logiky, ale též ke čtyřhodnotové logice. Jako *logiku formální inkonzistence* pěstují parakonzistentní logiku Newton da Costa či Walter Carnielli, jako *adaptativní logiku* Diderik Batens, propagátorem je i Jean-Yves Béziau.

Substrukturální logiky

Substrukturální logika vypouští některá pravidla gentzenovského kalkulu, jež se týkají pouze strukturálních aspektů logického vyvozování jako např. možnost libovolné záměny premis. Studiu různých substrukturálních logik se věnují například Francesco Paoli, Peter Schroeder-Heister, Kosta Došen nebo Greg Restall či Jean-Yves Girard (ten navrhl specifickou variantu pod názvem *lineární logika*).