INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0216, OPVK)

Úvod do logiky (VL): 14. Důkazové systémy

doc. PhDr. Jiří Raclavský, Ph.D.

(raclavsky@phil.muni.cz)

14. Důkazové systémy

V této kapitole si ukážeme nejznámější důkazové systémy, tedy systémy organizující dokazování formulí (úžeji: tautologických formulí) z nějakých formulí. Každý z těchto systémů akcentuje jinou stránku našeho běžného usuzování, ovšem některé systémy vystihují naše usuzování lépe než jiné. Například hilbertovská dedukce s důkazy bez předpokladů si adresuje primárně otázku generování tautologických formulí, kdežto předpokladové systémy přirozené dedukce jsou vhodnější ke studiu běžných úsudků; metoda sémantických tabel zase zužitkovává sémantickou rovinu natolik, že není čistě syntaktickou manipulací symbolů. Ne všem těmto systémům věnujeme stejnou pozornost. Ač to nebudeme vždy opakovat, všechny tyto systémy jsou úplné v tom smyslu, že dokazují všechny tautologie VL, a jsou korektní v tom smyslu, že dokazují pouze tautologie.

14.1 Hilbertovská dedukce

Davidem Hilbertem navržený systém dedukce, dále jen *hilbertovská dedukce*, je korektní dedukční kalkul pro VL. Lze snadno ověřit, že všechny axiomy námi uváděného systému jsou tautologie a že jediné pravidlo systému, totiž MP, je korektní, takže formule B, která vznikne aplikací pravidla na formule A_1 a A_2, z těchto formulí logicky vyplývá, čili platí, že pokud $\{A_1, A_2\} \vdash B$, pak $\{A_1, A_2\} \models B$.

Definice formálního systému Hilbertova typu pro VL je:

1) Jazyk s $\neg$, $\rightarrow$.
2) Axiomová schémata:

Ax 1: $A\rightarrow(B\rightarrow A)$
Ax 2: $(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$
Ax 3: $(\neg B\rightarrow\neg A)\rightarrow(A\rightarrow B)$

3) Odvozovací pravidlo MP:

$A\rightarrow B, A \vdash B.$

Z níže uvedených ilustračních příkladů je zřejmé, že nalezení důkazů i velmi jednoduchých teorémů nemusí být přímočaré. To souvisí s tím, že v axiomatickém systému je minimalizován počet axiomů a počet odvozovacích pravidel na nezbytně nutný počet. S přibývajícím množstvím dokázaných teorémů a odvozených pomocných odvozovacích pravidel se však neustále zlepšují možnosti pro hledání důkazů. Stojí rovněž za zmínku, že rutinou při sestavování strategie důkazu v rámci hilbertovské dedukce je v mysli postupovat od toho, co se má dokázat k bezprostředně předcházejícím formulím. Poté se doplní předpoklady, pokud nějaké jsou. Následně hledáme vhodné substituce do axiomů, abychom mohli pomocí MP dospět k dokazované formuli.

14.2 Příklady důkazů v hilbertovském systému dedukce

1)

Dokažte, že platí $\vdash A \rightarrow A$. Užijeme obyčejný přímý důkaz:

1.	$A \rightarrow (B \rightarrow A)$	Ax 1
2.	$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$	Ax 2
3.	$(A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A))$	substituce do 3. (A/C)
4.	$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A)$	MP (3,1)
5.	$(A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$	substituce do 4. $((B \rightarrow A)/B)$
6.	$A \rightarrow A$	MP (5,1)

2)

Dokažte, že platí $A \vdash A$. Užijeme přímý důkaz, který je až po krok 5. (včetně) jiným důkazem $A \rightarrow A$, než v předchozím příkladu:

1.	$(A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$	Ax 2 $((A \rightarrow A)/B, A/C)$
2.	$A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$	Ax 1 $((A \rightarrow A)/B)$
3.	$(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$	MP (1,2)
4.	$A \rightarrow (A \rightarrow A)$	Ax 1 (A/B)
5.	$A \rightarrow A$	MP (3,4)
6.	$A \vdash A$	VD (5)

3)

Dokažte, že platí $A \rightarrow C$ za předpokladu $A \rightarrow B$ a $B \rightarrow C$. Užijeme důkaz z předpokladů:

1.	$A \rightarrow B$	předpoklad

2.	$B\rightarrow C$	předpoklad
3.	$(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$	Ax 2
4.	$(B\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow(B\rightarrow C))$	Ax 1 $((B\rightarrow C)/A,\ A/B)$
5.	$A\rightarrow(B\rightarrow C)$	MP (4,2)
6.	$(A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C)$	MP (3,5)
7.	$A\rightarrow C$	MP (6,1)

4)

Dokažte, že platí-li $(A\rightarrow C)$, $(A\rightarrow C)$, $(A\vee B)$ $\vdash$ C, tak je dokazatelné $(A\rightarrow C)\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow((A\vee B)\rightarrow C))$:

1.	$(A\rightarrow C), (B\rightarrow C), (A\vee B) \vdash C$	dané předpoklady
2.	$(A\rightarrow C), (B\rightarrow C) \vdash (A\vee B)\rightarrow C$	VD (1)
3.	$(A\rightarrow C) \vdash (B\rightarrow C)\rightarrow((A\vee B)\rightarrow C)$	VD (2)
4.	$\vdash (A\rightarrow C)\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow((A\vee B)\rightarrow C))$	VD (3)

5)

Dokažte, že platí A, $\neg A \vdash B$ (Pravidlo Dunse Scota). Užijeme důkaz z předpokladů:

1.	A	předpoklad
2.	$\neg A$	předpoklad
3.	$(\neg B\rightarrow\neg A)\rightarrow(A\rightarrow B)$	Ax 3
4.	$\neg A\rightarrow(\neg B\rightarrow\neg A)$	Ax 1 $(\neg A/A,\ \neg B/B)$
5.	$\neg B\rightarrow\neg A$	MP (4,2)
6.	$A\rightarrow B$	MP (3,5)
7.	B	MP (6,1)

S pomocí VD pak můžeme dokázat $\vdash A\rightarrow(\neg A\rightarrow B)$:

8.	$\neg A\rightarrow B$	VD (2,7)
9.	$A\rightarrow(\neg A\rightarrow B)$	VD (1,8)

6)

Dokažte, že $\vdash \neg A \to (A \to B)$. Užijeme obyčejný přímý důkaz:

1.	$\vdash \neg A \to (\neg B \to \neg A)$	Ax 1 ($\neg A/A$, $\neg B/B$)
2.	$\neg A \vdash (\neg B \to \neg A)$	VD (1)
3.	$\neg A \vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$	Ax 3
4.	$\neg A \vdash (A \to B)$	MP (3,2)
5.	$\vdash \neg A \to (A \to B)$	VD (4)

7)

Dokažte, že $\neg\neg A \vdash A$.

1.	$\vdash \neg\neg A \to (\neg A \to \neg\neg\neg A)$	teorém $\neg A \to (A \to B)$ ($\neg A/A$, $\neg\neg\neg A/B$)
2.	$\vdash (\neg A \to \neg\neg\neg A) \to (\neg\neg A \to A)$	Ax 3 ($\neg\neg A/A$, B/A)
3.	$\neg\neg A \vdash (\neg A \to \neg\neg\neg A)$	VD (1)
4.	$\neg\neg A \vdash (\neg\neg A \to A)$	MP (3,2)
5.	$\neg\neg A \vdash A$	VD (4)

Pohodlný je i důkaz z předpokladů:

1.	$\neg\neg A$	předpoklad
2.	$(\neg A \to \neg\neg\neg A) \to (\neg\neg A \to A)$	Ax 3
3.	$\neg\neg A \to (\neg A \to \neg\neg\neg A)$	teorém $\vdash A \to (\neg A \to B)$
4.	$\neg A \to \neg\neg\neg A$	MP (1,3)
5.	$\neg\neg A \to A$	MP (4,2)
6.	A	MP (1,5)

8)

Dokažte, že platí $\vdash A \to \neg\neg A$:

1.	$\neg\neg\neg A \to \neg A$	teorém $\neg\neg A \to A$ ($\neg A/A$)
2.	$(\neg\neg\neg A \to \neg A) \to (A \to \neg\neg A)$	Ax 3 ($\neg A/A$)
3.	$A \to \neg\neg A$	MP (3,2)

9)

Dokažte, že platí $\vdash \neg(A \to \neg B) \to A$, resp. pravidlo $\neg(A \to \neg B) \vdash A$.

1.	$\neg(A \to \neg B)$	předpoklad
2.	$(\neg A \to (A \to \neg B)) \to (\neg(A \to \neg B) \to \neg\neg A)$	teorém $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$
3.	$\neg A \to (A \to \neg B)$	teorém $\vdash A \to (\neg A \to B)$

4.	$\neg(A\rightarrow\neg B)\rightarrow\neg\neg A$	MP (3,2)
5.	$\neg\neg A$	MP (1,4)
6.	$\neg\neg A\rightarrow A$	teorém $\vdash \neg\neg A\rightarrow A$
7.	A	MP (5,6)
8.	$\vdash \neg(A\rightarrow\neg B)\rightarrow A$	VD (1,7)

14.3 Přirozená dedukce

Hilbertovská dedukce má stále zastánce třeba v matematických kruzích, je však asi stěží obhajitelná jako model našeho běžného usuzování. Už v době vzniku moderní logiky byly hledány její alternativy, jež by naše přirozené uvažování vystihovaly lépe. Pionýrské práce Gerharda Gentzena (a nezávisle Stanisława Jaśkowského) přitom vedly ke dvěma důležitým současným druhům důkazových systémů, přirozené dedukci a k sekvenčnímu kalkulu. Myšlenka *přirozené dedukce*, která si ve svém vyjádření ponechává mnohé z hilbertovské dedukce, se opírá o řadu intuitivně platných odvozovacích pravidel, nikoli o jedno, jak je tomu v hilbertovské dedukci. To značně usnadňuje usuzování. Tato pravidla byla známa již po staletí, a proto mají mnohá tradiční názvy.

Zde je seznam těch nejznámějších odvozovacích pravidel:

Modus ponens (MP; modus ponendo ponens; pravidlo odloučení):

$$\begin{array}{l} A\rightarrow B \\ A \\ \hline B \end{array}$$

Modus tollens (MT; modus tollendo tollens, lat. způsob záporně záporný):

$$\begin{array}{l} A\rightarrow B \\ \neg B \\ \hline \neg A \end{array}$$

Pravidlo *Disjunktivní sylogismus* (DS; starším názvem Modus tollendo ponens, lat. způsob záporně kladný):

$$\begin{array}{l} A\lor B \\ \neg A \\ \hline B \end{array} \qquad \text{nebo:} \qquad \begin{array}{l} A\lor B \\ \neg B \\ \hline A \end{array}$$

Pravidlo Dunse Scota (PDS) (ze sporu plyne cokoliv, srov. zákon Dunse Scota):

$$\begin{array}{l} A \\ \neg A \\ \hline B \end{array} \qquad \text{event.} \qquad \begin{array}{l} A\land\neg A \\ \hline B \end{array}$$

Pravidlo *Hypotetický sylogismus* (HS): $A \to B$ $B \to C$ −−−−− $A \to C$	Pravidlo *Reductio ad absurdum* (RAA): $A \to B$ $A \to \neg B$ −−−−−− $\neg A$
Pravidlo simplifikace (Simp): nebo: $A \wedge B$ $A \wedge B$ −−−− −−−− A B	*Pravidlo přidání* (Add): nebo: A B −−−− −−−− $A \vee B$ $A \vee B$
Pravidlo *Konstruktivní dilema* (KD): $A \to B$ $C \to D$ $A \vee C$ −−−− $B \vee D$	Pravidlo *Destruktivní dilema* (DD): $A \to B$ $C \to D$ $\neg B \vee \neg D$ −−−−−− $\neg A \vee \neg C$
Pravidlo *Jednoduché konstruktivní dilema* (JKD): $A \to C$ $B \to C$ $A \vee B$ −−−− C	Pravidlo *Jednoduché destruktivní dilema* (JDD): $A \to B$ $A \to C$ $\neg B \vee \neg C$ −−−− $\neg A$
Pravidlo absorbce (Abs): $A \to B$ −−−−−−−− $A \to (A \wedge B)$	*Pravidlo exportace* (Exp): nebo: $A \to (B \to C)$ $(A \wedge B) \to C$ −−−−−−−− −−−−−−−− $(A \wedge B) \to C$ $A \to (B \to C)$

Často se uvažují také pravidla pro introdukci nebo eliminaci jednotlivých spojek, například zavedení konjunkce A, B / $A \wedge B$, dále De Morganovy zákony, atd. (některá z těchto pravidel jsou explicitně uvedena níže v sekci o gentzenovské dedukci). Na tyto zákony budeme odkazovat buď snadno pochopitelnými zkratkami, anebo jejich explicitním uvedením.

Nyní ještě jedna doplňující informace. Jak lze zjistit, dokázání podmíněných tvrzení, tj. formulí tvaru $A \rightarrow B$, je v přirozené dedukci obtížné a někdy jednoduše nemožné. Z hilbertovského dokazování víme, že by v takových případech šlo aplikovat Větu o dedukci a dokázanou formuli B tedy podmínit formulí A, jež se nám v důkazu vyskytla někde výše. Náhrada VD existuje ve variantě přirozené dedukce, kterou navrhl Frederic B. Fitch, někdy se úžeji hovoří o *větveném důkazu*, angl. „conditional proof" (to, že jsme k nějakému kroku dospěli pomocí něj, bývá indikováno pomocí CP). V anglicky psaných úvodech do logiky se s touto důkazovou technikou setkáváme poměrně často, my ji však používat nebudeme. Podstata dokazování tkví v tom, že v průběhu dokazování přijmeme dočasný předpoklad (dále jen DP), který nám z dosavadního umožní odvodit formuli, kterou podmíníme tímto DP. Tomu, že se nám v důkazu objeví příslušná implikace a tedy onen vnořený důkaz je ukončen, se říká vypuštění (angl. „discharge"). Daný vnořený důkaz bývá oddělován čarou, zde jsou dvě notační varianty téhož.

1.	$A \rightarrow B$	předpoklad
2.	A	DP
3.	B	MP (1,2)
4.	$A \wedge B$	zavedení $\wedge$ (2,3)
5.	$A \rightarrow (A \wedge B)$	CP (2,4)

1.	$A \rightarrow B$	předpoklad
2.	A	DP
3.	B	MP (1,2)
4.	$A \wedge B$	zavedení $\wedge$ (2,3)
5.	$A \rightarrow (A \wedge B)$	CP (2,4)

Ještě dodejme, že oněch ‚vnořených' důkazů může být v jednom důkazu více. Následně dostaneme podobnost s důkazy v sekvenčním kalkulu, který rovněž běžně pracuje s takto komplexními důkazy.

14.4 Příklady důkazů v systému přirozené dedukce

Základní strategii vedení důkazů v přirozené dedukci lze z několika příkladů rychle pochopit i bez vysvětlování. V premisách se snažíme ‚uvidět' hledanou formuli, a to jako následek některého (nebo některých) z pravidel z našeho rezervoáru pravidel. V průběhu důkazu se dostáváme do situací, které vyloženě volají po užití určitého pravidla, načež se posouváme v důkazu dopředu. Stojí ještě za poznámku, že množinu odvozovacích pravidel lze různým způsobem rozdělit na pravidla základní a odvozená, kdy ta odvozená jsou odvozena z těch základnějších. Důkazem nějaké formule z množiny jiných formulí získáváme v přirozené dedukci další odvozené dedukční pravidlo.

1)

Dokažte, že z formule $A\wedge(A\rightarrow\neg B)$ lze odvodit $\neg B$, tj. $A\wedge(A\rightarrow\neg B) \vdash \neg B$.

1.	$A\wedge(A\rightarrow\neg B)$	předpoklad
2.	$A\rightarrow\neg B$	Simp (1)
3.	A	Simp (1)
4.	$\neg B$	MP (2,3)

2)

Dokažte, že z formulí $A\rightarrow\neg B$, A a $C\rightarrow B$ lze odvodit $\neg C$.

1.	$A\rightarrow\neg B$	předpoklad
2.	A	předpoklad
3.	$C\rightarrow B$	předpoklad
4.	$\neg B$	MP (1,2)
5.	$\neg C$	MT (3,4)

3)

Dokažte, že z formulí $A\rightarrow B$, $A\wedge\neg D$ a $B\rightarrow C$ lze odvodit $C\wedge\neg D$.

1.	$A\rightarrow B$	předpoklad
2.	$A\wedge\neg D$	předpoklad
3.	$B\rightarrow C$	předpoklad
4.	A	Simp (2)
5.	B	MP (1,4)
6.	C	MP (3,5)
7.	$\neg D$	Simp (2)
8.	$C\wedge\neg D$	zavedení $\wedge$ (6,7)

4)

Dokažte, že z formulí $A\vee(B\rightarrow A)$ a $\neg A$ lze odvodit $\neg B$.

1.	$A\vee(B\rightarrow A)$	předpoklad
2.	$\neg A$	předpoklad
3.	$B\rightarrow A$	DS (1)
4.	$\neg B$	MT (3,2)

5)

Dokažte, že z formulí A a $\neg A$ lze odvodit B, tedy Pravidlo Dunse Scota.

1.	A	předpoklad
2.	$\neg A$	předpoklad
3.	$A \lor B$	Pravidlo přidání (Add, tj. zavedení $\lor$) (1)
4.	B	DS (3,1)

6)

Dokažte, že z formulí $A \rightarrow (B \rightarrow C)$, $D \rightarrow (C \rightarrow E)$, A a D lze odvodit $B \rightarrow E$.

1.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	předpoklad
2.	$D \rightarrow (C \rightarrow E)$	předpoklad
3.	A	předpoklad
4.	D	předpoklad
5.	$B \rightarrow C$	MP (1,3)
6.	$C \rightarrow E$	MP (2,4)
7.	$B \rightarrow E$	HS (5,6)

7)

Dokažte, že z formulí $A \rightarrow B$, $\neg B$ a $\neg A \rightarrow C$ lze odvodit $\neg A \land C$.

1.	$A \rightarrow B$	předpoklad
2.	$\neg B$	předpoklad
3.	$\neg A \rightarrow C$	předpoklad
4.	$\neg A$	MT (1,2)
5.	C	MP (3,4)
6.	$\neg A \land C$	zavedení $\land$ (4,5)

8)

Dokažte, že z formulí $A \lor B$, $C \rightarrow D$, $A \rightarrow C$ a $\neg D$ lze odvodit B.

1.	$A \lor B$	předpoklad
2.	$C \rightarrow D$	předpoklad
3.	$A \rightarrow C$	předpoklad
4.	$\neg D$	předpoklad
5.	$\neg C$	MT (2,4)
6.	$\neg A$	MT (3,5)
7.	B	DS (1,6)

9)

Dokažte, že z formulí $A \rightarrow (B \rightarrow C)$, $C \lor A$ a $\neg C$ lze odvodit $\neg B$.

1.	$A\to(B\to C)$	předpoklad
2.	$C\vee A$	předpoklad
3.	$\neg C$	předpoklad
4.	A	DS (2,3)
5.	$B\to C$	MP (1,4)
6.	$\neg B$	MT (5,3)

10)

Dokažte, že z formulí $A\to B$, $(B\vee C)\to(D\wedge E)$ a A lze odvodit D.

1.	$A\to B$	předpoklad
2.	$(B\vee C)\to(D\wedge E)$	předpoklad
3.	A	předpoklad
4.	B	MP (1,3)
5.	$B\vee C$	zavedení $\vee$ (4)
6.	$D\wedge E$	MP (2,5)
7.	D	Simp (6)

11)

Dokažte, že z formulí $A\to B$, $C\to D$, A a $\neg D$ lze odvodit $(A\wedge\neg D)\wedge(B\wedge\neg C)$.

1.	$A\to B$	předpoklad
2.	$C\to D$	předpoklad
3.	A	předpoklad
4.	$\neg D$	předpoklad
5.	B	MP (1,3)
6.	$\neg C$	MT (2,4)
7.	$A\wedge\neg D$	zavedení $\wedge$ (3,4)
8.	$B\wedge\neg C$	zavedení $\wedge$ (5,6)
9.	$(A\wedge\neg D)\wedge(B\wedge\neg C)$	zavedení $\wedge$ (7,8)

12)

Dokažte, že z formulí $A\to B$, $C\vee D$, $\neg A\to\neg C$ a $\neg B$ lze odvodit D.

1.	$A\to B$	předpoklad
2.	$C\vee D$	předpoklad
3.	$\neg A\to\neg C$	předpoklad
4.	$\neg B$	předpoklad
5.	$\neg A$	MT (1,4)
6.	$\neg C$	MP (3,5)
7.	D	DS (2,6)

13)

Dokažte, že z formulí $A \rightarrow B$ a $A \rightarrow \neg B$ lze odvodit $\neg A$, tedy Pravidlo Reductio ad absurdum. Důkaz sporem.

1.	$A \rightarrow B$	předpoklad
2.	$A \rightarrow \neg B$	předpoklad
3.	$\neg\neg A$	předpoklad důkazu sporem
4.	A	eliminace dvojité negace (3)
5.	B	MP (1,4)
6.	$\neg B$	MP (2,4)
7.	$\neg A$	na základě důkazu sporem (*reductio*; 5,6)

14)

Dokažte, že z formulí $(A \wedge B) \vee C$ a $\neg A \wedge \neg D$ lze odvodit C.

1.	$(A \wedge B) \vee C$	předpoklad
2.	$\neg A \wedge \neg D$	předpoklad
3.	$C \vee (A \wedge B)$	komutativita $\vee$ (1)
4.	$(C \vee A) \wedge (C \vee B)$	distributivita $\vee$ (3)
5.	$C \vee A$	Simp $\wedge$ (4)
6.	$\neg A$	Simp $\wedge$ (2)
7.	C	DS (5,6)

15)

Dokažte, že z formulí $A \rightarrow B$, $B \rightarrow C$, $C \rightarrow D$ a $\neg D$ lze odvodit $(A \rightarrow C) \wedge (\neg B \wedge \neg C)$.

1.	$A \rightarrow B$	předpoklad
2.	$B \rightarrow C$	předpoklad
3.	$C \rightarrow D$	předpoklad
4.	$\neg D$	předpoklad
5.	$A \rightarrow C$	HS (1,3)
6.	$\neg C$	MT (3,4)
7.	$\neg B$	MT (2,6)
8.	$\neg B \wedge \neg C$	zavedení $\wedge$ (6,7)
9.	$(A \rightarrow C) \wedge (\neg B \wedge \neg C)$	zavedení $\wedge$ (5,8)

16)

Dokažte, že z formulí $A \rightarrow B$, $\neg B \wedge C$, $D \wedge E$ a $(\neg A \wedge D) \rightarrow F$ lze odvodit $F \wedge C$.

1.	$A \rightarrow B$	předpoklad
2.	$\neg B \wedge C$	předpoklad
3.	$D \wedge E$	předpoklad

4.	$(\neg A \wedge D) \rightarrow F$	předpoklad
5.	$\neg B$	Simp $\wedge$ (2)
6.	$\neg A$	MT (1,5)
7.	D	Simp $\wedge$ (3)
8.	$\neg A \wedge D$	zavedení $\wedge$ (6,7)
9.	F	MP (4,8)
10.	C	Simp $\wedge$ (2)
11.	$F \wedge C$	zavedení $\wedge$ (9,10)

17)

Dokažte, že z formulí $A \rightarrow B$ a $\neg B$ lze odvodit $\neg A$, tedy Modus tollens. Důkaz sporem.

1.	$A \rightarrow B$	předpoklad
2.	$\neg B$	předpoklad
3.	$\neg\neg A$	předpoklad důkazu sporem
4.	A	pravidlo eliminace dvojité negace (3)
5.	B	MP (1,4)
6.	$\neg A$	na základě důkazu sporem (*reductio*; 2,5)

18)

Dokažte, že z formulí $A \rightarrow \neg(B \wedge C)$ a $A \wedge C$ lze odvodit $\neg B$.

1.	$A \rightarrow \neg(B \wedge C)$	předpoklad
2.	$A \wedge C$	předpoklad
3.	A	Simp $\wedge$ (2)
4.	$\neg(B \wedge C)$	MP (1,3)
5.	C	Simp $\wedge$ (2)
6.	$\neg B \vee \neg C$	De Morganův zákon (4)
7.	$\neg B$	DS (6,5)

19)

Dokažte, že z formulí $\neg A \rightarrow (A \vee \neg B)$, $\neg B \rightarrow (C \rightarrow \neg B)$ a $\neg A$ lze odvodit $\neg C$.

1.	$\neg A \rightarrow (A \vee \neg B)$	předpoklad
2.	$\neg B \rightarrow (C \rightarrow B)$	předpoklad
3.	$\neg A$	předpoklad
4.	$A \vee \neg B$	MP (1,3)
5.	$\neg B$	DS (4,3)
6.	$C \rightarrow B$	MP (2,5)
7.	$\neg C$	MT (6,5)

20)

Dokažte, že z formulí $(A\vee B)\wedge C$ a $\neg(B\wedge C)$ lze odvodit $(C\wedge A)$.

1.	$(A\vee B)\wedge C$	předpoklad
2.	$\neg(B\wedge C)$	předpoklad
3.	$C\wedge(A\vee B)$	komutativita $\wedge$ (1)
4.	$(C\wedge A)\vee(C\wedge B)$	distributivita $\wedge$ (3)
5.	$(C\wedge A)\vee(B\wedge C)$	komutativita $\wedge$ (4)
6.	$(C\wedge A)$	DS (5,2)

21)

Dokažte, že z formulí $A\to(B\to C)$, $D\to(C\to E)$, $A\vee F$, $\neg F$ a D lze odvodit $(B\to C)\wedge(B\to E)$.

1.	$A\to(B\to C)$	předpoklad
2.	$D\to(C\to E)$	předpoklad
3.	$A\vee F$	předpoklad
4.	$\neg F$	předpoklad
5.	D	předpoklad
6.	$C\to E$	MP (2,5)
7.	A	DS (3,4)
8.	$B\to C$	MP (1,7)
9.	$B\to E$	HS (8,6)
10.	$(B\to C)\wedge(B\to E)$	zavedení $\wedge$ (8,9)

22)

Dokažte, že z formulí $A\to B$, $A\vee C$, $\neg B$ a $C\to(B\to D)$ lze odvodit $A\to D$.

1.	$A\to B$	předpoklad
2.	$A\vee C$	předpoklad
3.	$\neg B$	předpoklad
4.	$C\to(B\to D)$	předpoklad
5.	$\neg A$	MT (1,3)
6.	C	DS (2,5)
7.	$B\to D$	MP (4,6)
8.	$A\to D$	HS (1,7)

23)

Dokažte, že z formulí $(B\to C)\to A$ a $\neg(D\vee A)$ lze odvodit B.

1.	$(B\to C)\to A$	předpoklad
2.	$\neg(D\vee A)$	předpoklad

3.	$\neg D \wedge \neg A$	De Morganův zákon (2)
4.	$\neg A$	Simp $\wedge$ (3)
5.	$\neg(B \rightarrow C)$	MT (1,4)
6.	$B \wedge \neg C$	převod $\rightarrow$ na $\wedge$ (5)
7.	B	Simp $\wedge$ (6)

24)

Dokažte, že z formulí $\neg A \rightarrow B$ a $A \rightarrow (C \vee D)$ lze odvodit $\neg C \rightarrow (\neg D \rightarrow B)$.

1.	$\neg A \rightarrow B$	předpoklad
2.	$A \rightarrow (C \vee D)$	předpoklad
3.	$\neg B \rightarrow A$	transpozice $\rightarrow$ (1)
4.	$\neg B \rightarrow (C \vee D)$	HS (3,2)
5.	$\neg(C \vee D) \rightarrow B$	transpozice $\rightarrow$ (4)
6.	$(\neg C \wedge \neg D) \rightarrow B$	De Morganův zákon (5)
7.	$\neg C \rightarrow (\neg D \rightarrow B)$	Exp (6)

25)

Dokažte, že z formulí $(A \rightarrow \neg B) \wedge \neg C$ a $B \rightarrow (\neg A \rightarrow C)$ lze odvodit $B \rightarrow A$.

1.	$(A \rightarrow \neg B) \wedge \neg C$	předpoklad
2.	$B \rightarrow (\neg A \rightarrow C)$	předpoklad
3.	$A \rightarrow \neg B$	Simp (1)
4.	$\neg C$	Simp (1)
5.	$(B \wedge \neg A) \rightarrow C$	Exp
6.	$\neg(B \wedge \neg A)$	MT (5,4)
7.	$\neg B \vee \neg\neg A$	De Morganův zákon (6)
8.	$\neg B \vee A$	eliminace dvojité negace (7)
9.	$B \rightarrow A$	převod $\vee$ na $\rightarrow$ (8)

26)

Dokažte, že z formulí $A \rightarrow B$, $C \rightarrow D$ a $\neg B \vee \neg D$ lze odvodit $\neg A \vee \neg C$, tedy Pravidlo Destruktivní dilema. Důkaz sporem.

1.	$A \rightarrow B$	předpoklad
2.	$C \rightarrow D$	předpoklad
3.	$\neg B \vee \neg D$	předpoklad
4.	$\neg(\neg A \vee \neg C)$	negace závěru za účelem důkazu sporem
5.	$\neg\neg A \wedge \neg\neg C$	De Morganův zákon (4)
6.	$A \wedge C$	eliminace dvojité negace (na obě části 5.)
7.	A	Simp (6)
8.	B	MP (1,7)

9.	C	Simp (6)
10.	D	MP (2,9)
11.	$\neg B$	DS (3,10), což je spor s 8.
12.	$\neg C$	MT (2,11), což je spor s 9. (tento řádek je nadbytečný)
13.	$\neg A$	MT (1,11), což je spor s 7. (tento řádek je nadbytečný)
14.	$\neg A \lor \neg C$	na základě (několikanásobného) sporu (*reductio*)

27)

Dokažte, že z formulí $A \to B$, $C \to (D \land E)$, $\neg C \to \neg B$ a $D \to (E \to A)$ lze odvodit $A \leftrightarrow C$.

1.	$A \to B$	předpoklad
2.	$C \to (D \land E)$	předpoklad
3.	$\neg C \to \neg B$	předpoklad
4.	$D \to (E \to A)$	předpoklad
5.	$B \to C$	transpozice $\to$ (3)
6.	$A \to C$	HS (1,5)
7.	$(D \land E) \to A$	Exp (4)
8.	$C \to A$	HS (2,7)
9.	$(A \to C) \land (C \to A)$	zavedení $\land$ (6,8)
10.	$A \leftrightarrow C$	zavedení $\leftrightarrow$ (9)

14.5 Gentzenovská dedukce

Na rozdíl od hilbertovské dedukce, v níž je jen jedno odvozovací pravidlo a několik axiomových schémat, systém gentzenovské přirozené dedukce má vlastně jen jeden axiom (k němu se někdy přidávají dva další), avšak disponuje několika jednoduchými dedukčními pravidly. Ta jsou považována za výchozí, a proto se nedokazují; na základě těchto výchozích pravidel se pak dokazují další složitější dedukční pravidla.

Důležitým ideovým prvkem gentzenovská dedukce je, že každý krok důkazu je logicky pravdivý. (Toto např. hilbertovská dedukce nesplňuje v případě důkazu z předpokladů.) V každém kroku jsou totiž uváděny rovněž všechny předpoklady dané formule.

Nechť Γ je konečná množina formulí. Γ vlastně reprezentuje množinu našich přesvědčení (formulí). K množině Γ budeme někdy přibírat ne nutně disjunktní množinu Δ. Znak „$\Rightarrow$“ je obdobou dokazovátka „$\vdash$“, ovšem na rozdíl od něho coby metaznaku hilbertovské dedukce je v gentzenovské přirozené dedukci zadán systémově. Jednotkou dokazování je *sekvent*, má tvar:

$$\Gamma, A_1, A_2, \ldots, A_n \Rightarrow B,$$

V sekventu je $A_1, A_2, \ldots, A_n$ označením jisté množiny formulí, přičemž sekvence $A_1, A_2, \ldots, A_n \Rightarrow B$ je ekvivalentní s $(A_1 \land A_2 \land \ldots \land A_n) \to B$. (Vlastní Gentzenův systém namísto B obsahuje

$B_1 \lor B_2 ... \lor B_n$; při pravdivosti všech formulí nalevo od $\Rightarrow$ je alespoň jedna formule napravo od $\Rightarrow$ pravdivá.) Jak už bylo výše řečeno, každý sekvent je vždy logicky pravdivý. Aby byl každý sekvent logicky pravdivý, nesmí se nalevo vyskytovat nadbytečné předpoklady.

Odvozovací pravidla jsou tvaru:

sekvent$_1$; ... ; sekvent$_n$
––––––––––––––––
sekvent

Ze sekventů nad čarou lze tedy odvodit sekvent pod čarou. V naší expozici ovšem neukazujeme samotný *sekvenční kalkul*, ale přirozenou dedukci opírající se o myšlenky gentzenovského sekvenčního kalkulu. Vlastní sekvenční kalkul se vyznačuje jednak zacházením s několika strukturálními pravidly, jež zde neuvádíme, jednak dvoudimenzionálním zápisem reprezentujícím inference.

Axiomová schémata (druhé a třetí je pomocné):

$\Gamma, A \Rightarrow A$	základní axiom (ZA)
$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma, B \Rightarrow A}$	zavedení předpokladu („weakening“) (ZP)
$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B;\ \Delta \Rightarrow \neg A \rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow B}$	eliminace předpokladu (EP)

Za výchozí, tj. nedokazovaná, pravidla jsou obvykle volena ta následující. Písmeno „I“ zkracuje „introdukce“ (tj. „zavedení“), písmeno „E“ zkracuje „eliminace“. Všimněme si, že introdukce $\rightarrow$ je de facto VD a eliminace $\rightarrow$ je de facto MP; podobně introdukce $\neg$ je RAA a eliminace $\neg$ je PDS.

I$\wedge$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \,;\, \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A\wedge B}$	E$\wedge$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A\wedge B}{\Gamma \Rightarrow A \text{ (či } B\text{)}}$
I$\rightarrow$	$\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A\rightarrow B}$	E$\rightarrow$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \,;\, \Delta \Rightarrow A\rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow B}$
I$\vee$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \text{ (či } B\text{)}}{\Gamma \Rightarrow A\vee B}$	E$\vee$	$\dfrac{\Gamma, A\Rightarrow B \,;\, \Delta_1, B\Rightarrow C \,;\, \Delta_2 \Rightarrow A\vee B}{\Gamma, \Delta_1, \Delta_2 \Rightarrow C}$
I$\neg$	$\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow B \,;\, \Delta, A \Rightarrow \neg B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow \neg A}$	E$\neg$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow B \,;\, \Delta \Rightarrow \neg B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A}$
I$\leftrightarrow$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A\rightarrow B \,;\, \Delta \Rightarrow B\rightarrow A}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A\leftrightarrow B}$	E$\leftrightarrow$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A\leftrightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A\rightarrow B \text{ (či } B\rightarrow A\text{)}}$

14.6 Příklady důkazů v gentzenovském systému přirozené dedukce

1)

Odvoďte formuli $p\rightarrow p$ (zákon totožnosti). Postup bude takový, že pomocí ZA zavedeme p. Zároveň se tak p stane předpokladem nalevo od $\Rightarrow$, jehož se posléze ‚zbavíme' tak, že jej převedeme napravo od $\Rightarrow$ pomocí I$\rightarrow$.

1.	$\Gamma, p \Rightarrow p$	ZA
2.	$\Gamma \Rightarrow p\rightarrow p$	I$\rightarrow$

(Bod 2. vlastně znamená, že $p\rightarrow p$ plyne z prázdné množiny předpokladů.)

2)

Dokažte, že z předpokladů $p \rightarrow q$ a $q \rightarrow r$ je odvoditelné $p \rightarrow r$, tj. ověřte úsudek $p \rightarrow q$, $q \rightarrow r$ $\therefore$ $p \rightarrow r$ (vlastně pravidlo hypotetický sylogismus). Postup bude takový, že formule $p \rightarrow q$ a $q \rightarrow r$ budou prvními kroky důkazu, přičemž zůstanou na levé straně jako předpoklady, a proto se právě jich nebudeme snažit zbavit. Z těchto předpokladů pak bude odvoditelná – to bude poslední krok – formule $p \rightarrow r$. V posledním kroku se tedy pomocí I$\rightarrow$ dostane napravo náš pomocný předpoklad p:

1.	$\Gamma, p \rightarrow q \Rightarrow p \rightarrow q$	ZA
2.	$\Gamma, p \rightarrow q, q \rightarrow r \Rightarrow q \rightarrow r$	ZA
3.	$\Gamma, p \rightarrow q, q \rightarrow r, p \Rightarrow p$	ZA
4.	$\Gamma, p \rightarrow q, q \rightarrow r, p \Rightarrow q$	E$\rightarrow$ (1,3)
5.	$\Gamma, p \rightarrow q, q \rightarrow r, p \Rightarrow r$	E$\rightarrow$ (2,4)
6.	$\Gamma, p \rightarrow q, q \rightarrow r \Rightarrow p \rightarrow r$	I$\rightarrow$

Kdybychom pokračovali ještě následujícími dvěma kroky, dokázali bychom formuli $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$ (zákon hypotetického sylogismu):

8.	$\Gamma, p \rightarrow q \Rightarrow (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$	I$\rightarrow$ (7)
9.	$\Gamma \Rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$	I$\rightarrow$ (8)

3)

Dokažte formuli $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$ (předpoklad p zavádíme až po q, abychom pak hladce zavedli $\rightarrow$):

1.	$\Gamma, p \rightarrow (q \rightarrow r) \Rightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$	ZA
2.	$\Gamma, p \rightarrow (q \rightarrow r), q \Rightarrow q$	ZA
3.	$\Gamma, p \rightarrow (q \rightarrow r), q, p \Rightarrow p$	ZA
4.	$\Gamma, p \rightarrow (q \rightarrow r), q, p \Rightarrow (q \rightarrow r)$	E$\rightarrow$ (1,3)
5.	$\Gamma, p \rightarrow (q \rightarrow r), q, p \Rightarrow r$	E$\rightarrow$ (4,2)
6.	$\Gamma, p \rightarrow (q \rightarrow r), q \Rightarrow (p \rightarrow r)$	I$\rightarrow$ (5)
7.	$\Gamma, p \rightarrow (q \rightarrow r) \Rightarrow q \rightarrow (p \rightarrow r)$	I$\rightarrow$ (6)

4)

Dokažte formuli $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$:

1.	$\Gamma, (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	ZA
2.	$\Gamma, (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r), p \Rightarrow p \rightarrow q$	E$\wedge$ (1)
3.	$\Gamma, (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r), p \Rightarrow q \rightarrow r$	E$\wedge$ (1)
4.	$\Gamma, (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r), p \Rightarrow p$	ZA
5.	$\Gamma, (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r), p \Rightarrow q$	E$\rightarrow$ (2,4)
6.	$\Gamma, (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r), p \Rightarrow r$	E$\rightarrow$ (3,5)

7. $\Gamma, (p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow p \to r$ I→ (6)
8. $\Gamma \Rightarrow ((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$ I→ (7)

5)

Dokažte formuli $p \vee \neg p$ (zákon vyloučeného třetího):

1. $\Gamma, p \Rightarrow p$ ZA
2. $\Gamma, p \Rightarrow p \vee \neg p$ I∨
3. $\Gamma, p, \neg p \Rightarrow \neg p$ ZA
4. $\Gamma, p, \neg p \Rightarrow p \vee \neg p$ I∨
5. $\Gamma \Rightarrow p \vee \neg p$ EP (2,4)

6)

Dokažte formuli $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$:

1. $\Gamma, p \to q \Rightarrow p \to q$ ZA
2. $\Gamma, p \to q, p \Rightarrow p$ ZA
3. $\Gamma, p \to q, p \Rightarrow q$ E→ (1,2)
4. $\Gamma, p \to q, p, \neg q \Rightarrow \neg q$ ZA
5. $\Gamma, p \to q, \neg q \Rightarrow \neg p$ EP (3,4)
6. $\Gamma, p \to q \Rightarrow \neg q \to \neg p$ I→ (5)
7. $\Gamma \Rightarrow (p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$ I→ (6)

7)

Dokažte, že z předpokladu $p \to (q \to r)$ lze odvodit $(p \to q) \to (q \to r)$. Jinými slovy, ověřte úsudek $p \to (q \to r)\ \therefore\ (p \to q) \to (q \to r)$:

1. $\Gamma, p \to (q \to r) \Rightarrow p \to (q \to r)$ ZA
2. $\Gamma, p \to (q \to r), p \Rightarrow p$ ZA
3. $\Gamma, p \to (q \to r), p \Rightarrow q \to r$ E→ (1,2)
4. $\Gamma, p \to (q \to r), p, p \to q \Rightarrow p \to q$ ZA
5. $\Gamma, p \to (q \to r), p, p \to q \Rightarrow q$ E→ (2,4)
6. $\Gamma, p \to (q \to r), p, p \to q \Rightarrow r$ E→ (3,5)
7. $\Gamma, p \to (q \to r), p \to q \Rightarrow p \to r$ I→ (6)
8. $\Gamma, p \to (q \to r) \Rightarrow (p \to q) \to (p \to r)$ I→ (7)

8)

Dokažte, že z předpokladu $p \to (q \to r)$ lze odvodit $(p \wedge q) \to r$, čili ověřte úsudek $p \to (q \to r)\ \therefore\ (p \wedge q) \to r$ (tj. Pravidlo exportace):

1. $\Gamma, p \to (q \to r) \Rightarrow p \to (q \to r)$ ZA
2. $\Gamma, p \to (q \to r), p \wedge q \Rightarrow p \wedge q$ ZA

3.	$\Gamma, p\rightarrow(q\rightarrow r), p\wedge q \Rightarrow p$	E$\wedge$ (2)
4.	$\Gamma, p\rightarrow(q\rightarrow r), p\wedge q \Rightarrow q\rightarrow r$	E$\rightarrow$ (1,3)
5.	$\Gamma, p\rightarrow(q\rightarrow r), p\wedge q \Rightarrow q$	E$\wedge$ (2)
6.	$\Gamma, p\rightarrow(q\rightarrow r), p\wedge q \Rightarrow r$	E$\rightarrow$ (4,5)
7.	$\Gamma, p\rightarrow(q\rightarrow r) \Rightarrow (p\wedge q)\rightarrow r$	I$\rightarrow$ (6)

9)

Dokažte, že z předpokladu $(p\wedge q)\rightarrow r$ lze odvodit $p\rightarrow(q\rightarrow r)$, čili ověřte úsudek $p\rightarrow(q\rightarrow r)\ \therefore\ (p\wedge q)\rightarrow r$ (tj. Pravidlo exportace):

1.	$\Gamma, (p\wedge q)\rightarrow r \Rightarrow (p\wedge q)\rightarrow r$	ZA
2.	$\Gamma, (p\wedge q)\rightarrow r, p \Rightarrow p$	ZA
3.	$\Gamma, (p\wedge q)\rightarrow r, p, q \Rightarrow q$	ZA
4.	$\Gamma, (p\wedge q)\rightarrow r, p, q \Rightarrow p\wedge q$	I$\wedge$ (2,3)
5.	$\Gamma, (p\wedge q)\rightarrow r, p, q \Rightarrow r$	E$\rightarrow$ (1,4)
6.	$\Gamma, (p\wedge q)\rightarrow r, p \Rightarrow q\rightarrow r$	I$\rightarrow$ (5)
7.	$\Gamma, (p\wedge q)\rightarrow r \Rightarrow p\rightarrow(q\rightarrow r)$	I$\rightarrow$ (6)

10)

Dokažte, že z předpokladu $(p\wedge q)\rightarrow r$ lze odvodit $(p\rightarrow q)\rightarrow(p\rightarrow r)$:

1.	$\Gamma, (p\wedge q)\rightarrow r \Rightarrow (p\wedge q)\rightarrow r$	ZA
2.	$\Gamma, (p\wedge q)\rightarrow r, p\rightarrow q \Rightarrow p\rightarrow q$	ZA
3.	$\Gamma, (p\wedge q)\rightarrow r, p\rightarrow q, p \Rightarrow p$	ZA
4.	$\Gamma, (p\wedge q)\rightarrow r, p\rightarrow q, p \Rightarrow q$	E$\rightarrow$ (2,3)
5.	$\Gamma, (p\wedge q)\rightarrow r, p\rightarrow q, p \Rightarrow p\wedge q$	I$\wedge$ (3,4)
6.	$\Gamma, (p\wedge q)\rightarrow r, p\rightarrow q, p \Rightarrow r$	E$\rightarrow$ (1,5)
7.	$\Gamma, (p\wedge q)\rightarrow r, p\rightarrow q \Rightarrow p\rightarrow r$	I$\rightarrow$ (6)
8.	$\Gamma, (p\wedge q)\rightarrow r \Rightarrow (p\rightarrow q) \rightarrow (p\rightarrow r)$	I$\rightarrow$ (7)

11)

Dokažte, že z předpokladů $(p\rightarrow q)$ a $\neg q$ lze odvodit $\neg p$ (tj. pravidlo Modus tollens):

1.	$\Gamma, p\wedge q \Rightarrow p\wedge q$	ZA
2.	$\Gamma, p\wedge q, p \Rightarrow p$	ZA
3.	$\Gamma, p\wedge q, p, \neg q \Rightarrow \neg q$	ZA
4.	$\Gamma, p\wedge q, p, \neg q \Rightarrow q$	E$\wedge$ (1)
5.	$\Gamma, p\wedge q, \neg q \Rightarrow \neg p$	I$\neg$ (3,4)

12)

Dokažte formuli $(\neg q\rightarrow\neg p)\rightarrow(p\rightarrow q)$:

1.	$\Gamma, \neg q \rightarrow \neg p \Rightarrow \neg q \rightarrow \neg p$	ZA
2.	$\Gamma, \neg q \rightarrow \neg p, \neg q \Rightarrow \neg q$	ZA
3.	$\Gamma, \neg q \rightarrow \neg p, \neg q \Rightarrow \neg p$	E→ (1,2)
4.	$\Gamma, \neg q \rightarrow \neg p, p, \neg q \Rightarrow p$	ZA
5.	$\Gamma, \neg q \rightarrow \neg p, p \Rightarrow q$	I¬ (a s pomocí zákona dvojité negace) (3,4)
6.	$\Gamma \Rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)$	Z→ (5)

14.7 Metoda sémantických tabel

Současná podoba metody dokazování pomocí *sémantických* (či *analytických*) *tabel*, resp. *sémantických stromů* (angl. „semantic tableaux“, „tree proofs“), stručně někdy *tablová metoda*, se vyvinula z metody proponované Evertem Willemem Bethem a rozvinuté Raymondem Smullyanem. Jedná se vlastně o dokazování sporem, poněvadž při dokazování závěru z premis se zužitkovává negace závěru.

Jak už bylo uvedeno výše, při dokazování sporem se vychází z faktu (totiž sémantické podoby Věty o důkazu sporem), že $T \mid\!- A$, kde T je množina premis a A závěr, právě tehdy, když $T \cup \{\neg A\} \mid\!- \neg(B \rightarrow B)$ (spor). Sémanticky pak řečeno, jakmile ukážeme, že množina obsahující premisy T a negaci závěru, tj. množina $T \cup \{\neg A\}$, je nesplnitelnou množinou formulí (čili neexistuje valuace, při níž by všechny prvky T a též formule $\neg A$ byly pravdivé), tak A vyplývá z T, tj. $T \models A$, takže úsudek $T \therefore A$ je platný. Jednoduchý ilustrativní příklad: $p \wedge q \models q$, poněvadž množina $\{p \wedge q, \neg q\}$ je nesplnitelná.

Metoda sémantických tabel je založena na tom, že složené formule, jež jsou součástí množiny $T \cup \{\neg A\}$, postupně dekomponujeme podle odvozovacích pravidel na jejich součásti. (Přehled těchto pravidel uvádíme níže, zatím si vystačíme jen s intuitivním náhledem. Termín „dekomponování“ se v problematice obvykle nepoužívá, ale je příhodný.) Tato pravidla jsou korektní, tj. zachovávají splnitelnost. Například formule $p \wedge q$ je dekomponována na p a q, přičemž tyto atomické formule jsou splňovány tou valuací, která splňuje $p \wedge q$. Tyto dekomponované formule jsou věšeny na konce větví postupně vznikajícího stromu. V kořeni tohoto stromu jsou formule z množiny $T \cup \{\neg A\}$, na konci těchto větví, tj. v listech, jsou atomické formule nebo jejich negace. Strom je postupně rozvíjen směrem dolů. Zde je příklad stromu pro úsudek $(p \wedge \neg q)$, $(q \vee \neg r) \therefore r$.

```
    p∧¬q  ✓     premisa
    q∨¬r  ✓     premisa
    ¬r    ✓     negace závěru
     |
     p          důsledek aplikace pravidla dekomponujícího p∧¬q
    ¬q          důsledek aplikace pravidla dekomponujícího p∧¬q
  /  \
 q   ¬r         důsledek aplikace pravidla dekomponujícího q∨¬r
 ×
```

V našem příkladu vidíme, že ‚stvol‘ obsahující p a pod ním bezprostředně $\neg q$ je důsledkem aplikace pravidla, které nezpůsobuje větvení. To znamená, že platí-li $p \wedge \neg q$, platí jak p, tak $\neg q$. K větvení dochází až v důsledku pravidla dekomponujícího $q \vee \neg r$: platí-li $q \vee \neg r$, platí q nebo platí $\neg r$. Větvíme tedy proto, že nevíme, která z těchto možností platí, takže musíme v našem důkazu obě možnosti prošetřit. (Pravidlům nezpůsobujícím větvení se někdy říká *α-pravidla*; těm způsobujícím větvení se pak říká *β-pravidla*.)

Při dokazování pomocí sémantických tabel není rigidně dáno pořadí aplikace pravidel. Důkazem námi studovaného úsudku proto může být také:

$p\wedge\neg q$	✓	premisa
$q\vee\neg r$	✓	premisa
$\neg r$	✓	negace závěru
/ \		
q $\quad\neg r$		důsledek aplikace pravidla dekomponujícího $q\vee\neg r$
| $\quad$ |		
p $\quad p$		(2x) důsledek aplikace pravidla dekomponujícího $p\wedge\neg q$
$\neg q$ $\quad\neg q$		(2x) důsledek aplikace pravidla dekomponujícího $p\wedge\neg q$
×		

V zájmu efektivity a co nejmenší složitosti důkazu však aplikujeme přednostně pravidla, která nezpůsobují větvení; přesněji, volíme taková pravidla a formule k dekompozici, která vedou k brzkému ukončování větví.

Nyní si povšimněme, že všechny složené formule, i ty, co se mohou objevit někde v půli stromu, musíme dekomponovat. Během toho, jak důkaz budujeme, proto používáme pro indikaci, že jsme danou složenou formuli dekomponovali, zatržítko ✓.

Větev, v níž se vyskytuje atomická formule a její negace, například q a $\neg q$, je zvána uzavřená a pod její list vepisujeme křížek × (popř. $\perp$, alternativní značení: danou atomickou formuli podtrhneme). Na rozdíl od dokončené otevřené větve neobsahuje uzavřená větev splnitelnou množinu formulí; obsahuje totiž spor, v našem příkladu q a $\neg q$. (Někteří autoři uvádí na konci dokončených otevřených větví symbol $\uparrow$, aby indikovali její otevřenost a dokončenost.) Poznamenejme, že ne vždy platí, že v každé větvi jsou všechny atomické proměnné nebo jejich negace, ačkoli je tato větev uzavřena (tedy obsahuje spor nebo nelze získat další atomickou formuli nebo negaci).

Jako i u jiných důkazů sporem činí adeptům logiky největší potíž vyhodnotit, čeho dokončením důkazu dosáhli. Uvědomme si proto, že existují dva druhy (dokončených) tablových důkazů. Důkaz čili strom, jehož všechny větve jsou uzavřené (×), demonstroval, že množina $T\cup\{\neg A\}$ je nesplnitelná. To proto, že neexistuje valuace ohodnocující všechny její formule. To poznáme právě z toho, že jsou v příslušných větvích – jež jsou de facto návrhy možných valuací –, přítomny atomické formule jako p i $\neg p$, jež nemohou být dohromady jednou valuací splňovány. Důkaz čili strom s alespoň jednou dokončenou otevřenou větví ukazuje splnitelnost $T\cup\{\neg A\}$, což obnáší, že A nevyplývá z T. Atomické formule v otevřené větvi ukazují takovou valuaci, při níž je $T\cup\{\neg A\}$ splnitelná. V našem příkladu výše je to valuace $v(p)=1$, $v(q)=v(r)=0$, protože právě při ní jsou splnitelné formule p, $\neg q$, $\neg r$ z otevřené větve $\neg r$ – p – $\neg q$ – $\neg r$. Námi výše uváděný příklad důkazu tedy ukázal, že daný úsudek platný není.

Srovnejme aplikaci tablové metody s aplikací metody protipříkladu. Při metodě protipříkladu taky dokazujeme sporem, předpokládáme totiž, že závěr je nepravdivý a premisy přitom pravdivé. V tablové metodě nepravdivost závěru syntakticky vyznačujeme negací a pravdivost premis vyznačujeme vlastně absencí nějakého indikátoru. Tím, že v tablovém důkazu najdeme otevřenou větev, zjistíme vlastně valuaci, při níž jsou všechny premisy a taky negace závěru pravdivé (jinak řečeno: daná množina formulí je splnitelná). To znamená, že jsme našli valuaci, při níž jsou premisy pravdivé a nenegovaný závěr nepravdivý.

Uvědomme si, že metoda sémantických tabel se dá využít i k nalezení valuace, je-li jaká, jež splňuje nějakou množinu formulí. Valuací splňující danou množinu formulí je valuace vyznačená pomocí proměnných a jejích negací v otevřených větvích důkazu.

Metoda sémantických tabel (stromů) se dá rovněž využít k ověřování tautologičnosti formulí. To je založeno na faktu, že $\emptyset \models A$ právě tehdy, když $\emptyset\cup\{\neg A\} \models \neg(B\rightarrow B)$ (kde A je tautologie a $\emptyset$ je prázdná množina formulí T, což normálně neznačíme). V kořeni stromu důkazu, že daná formule A je tautologií, je tedy jen jedna formule, jmenovitě $\neg A$.

(Určitý druh splnitelných množin formulí jsou *Hintikkovy množiny formulí*. Množina formulí H se nazývá Hintikkova množina právě tehdy, když pro formule H platí, že a) je-li $\neg p\in$ H, tak $p\notin$ H, b) je-li $\neg\neg p\in$ H, tak $p\in$ H, c) je-li $p\wedge q\in$ H, tak $p\in$ H i $q\in$ H, d) je-li $p\vee q\in$ H, tak $p\in$ H nebo $q\in$ H, e) je-li $\neg(p\wedge q)\in$ H, tak $\neg p\in$ H nebo $\neg q\in$ H, f) je-li $\neg(p\vee q)\in$ H, tak $\neg p\in$ H i $\neg q\in$ H. Platí, že každá Hintikkova množina je splnitelná.)

Původní verze tablové metody využívala poněkud jiná pravidla, než si uvádíme níže. Obsahovala především indikaci pravdivosti a nepravdivosti formulí, pro což byly používány nejčastěji „TA“ a „FA“, popř. „A=1“ a „A=0“, apod. Námi užívaný systém pravdivost A nijak neindikuje, nepravdivost A však indikuje jakožto $\neg A$, čímž se odstranila zjevnou závislost této důkazové metody na sémantice. Náš výše uváděný příklad by tedy vypadal například takto:

$\mathrm{T}(p\wedge\neg q)$	✓	premisa
$\mathrm{T}(q\vee\neg r)$	✓	premisa
$\mathrm{F}r$	✓	negace závěru
|		
$\mathrm{T}p$		důsledek aplikace pravidla dekomponujícího $p\wedge\neg q$
$\mathrm{F}q$		důsledek aplikace pravidla dekomponujícího $p\wedge\neg q$
/ \		
$\mathrm{T}q$ $\quad$ $\mathrm{F}r$		důsledek aplikace pravidla dekomponujícího $q\vee\neg r$
$\times$		

Zde je seznam odvozovacích pravidel námi užívané varianty metody sémantických tabel. Některá z těchto pravidel jakoby předpokládají De Morganovy zákony či převod implikace na disjunkci; to proto, že rozvětvení složené formule odpovídá disjunkci, kdežto dekompozice složené formule na formule, jež jsou zařazeny za sebou, odpovídá konjunkci.

$A \wedge B$: | A B	$\neg(A \wedge B)$: / \\ $\neg A$ $\neg B$
$A \vee B$: / \\ A B	$\neg(A \vee B)$: | $\neg A$ $\neg B$
$A \rightarrow B$: / \\ $\neg A$ B	$\neg(A \rightarrow B)$: | A $\neg B$
$A \leftrightarrow B$: / \\ A $\neg A$ B $\neg B$	$\neg(A \leftrightarrow B)$: / \\ A $\neg A$ $\neg B$ B
$\neg\neg A$: | A	

14.8 Příklady důkazů metodou sémantických tabel

V anotacích tablových důkazů na výše uváděná pravidla stručně referujeme symboly výrokových spojek, jež jsou hlavní v dekomponované formuli. Například $\wedge$ odkazuje na pravidlo dekomponující $A \wedge B$, $\neg\wedge$ odkazuje na pravidlo dekomponující $\neg(A \wedge B)$. Námi uváděné anotace bychom mohli zjednodušit tak, že bychom odkazovali na čísla formulí, což by ale obnášelo, že postupně vznikající formule bychom museli postupně číslovat.

Znovu připomínáme elementární způsob vyhodnocení: jsou-li všechny větve uzavřeny (×), daný úsudek je platný; je-li aspoň jedna větev otevřená, daný úsudek platný není. V případě ověřování tautologičnosti je to podobné, tautologie je vlastně úsudek s nula premisami.

1)

Metodou sémantických tabel ověřte úsudek $p \rightarrow q$, $p \;\therefore\; q$ (tj. vlastně Modus ponens).

$p \rightarrow q$	✓	premisa
p		premisa
$\neg q$		negace závěru (tj. předpoklad důkazu sporem)
/ \		
$\neg p$ $\quad q$		dekompozice první premisy; $\rightarrow$
× $\quad$ ×		

Všechny větve stromu jsou uzavřeny, čili neexistuje valuace, která by splňovala množinu obsahující premisy a negaci závěru. Znamená to, že úsudek je platný.

2)

Metodou sémantických tabel ověřte úsudek $p \vee \neg q$, $q \;\therefore\; \neg p$.

$p \vee \neg q$	✓	premisa
q		premisa
$\neg\neg p$	✓	negace závěru (tj. předpoklad důkazu sporem)
|		
p		
/ \		
p $\quad \neg q$		dekompozice první premisy; $\vee$
$\quad\quad$ ×		

Všechny větve stromu nejsou uzavřeny, čili existuje valuace, která splňuje množinu obsahující premisy a negaci závěru. Znamená to, že úsudek není platný.

3)

Metodou sémantických tabel ověřte úsudek $p \rightarrow q$, $\neg q \;\therefore\; \neg p$ (tj. vlastně Modus tollens).

$p \rightarrow q$	✓	premisa
$\neg q$		premisa
$\neg\neg p$	✓	negace závěru
|		
p		dekompozice negace závěru; $\neg\neg$
/ \		
$\neg p$ $\quad q$		dekompozice první premisy; $\rightarrow$
× $\quad$ ×		

Všechny větve stromu jsou uzavřeny, čili neexistuje valuace, která by splňovala množinu obsahující premisy a negaci závěru. Znamená to, že úsudek je platný.

4)

Metodou sémantických tabel ověřte úsudek $p \to q,\ q \to r \ \therefore\ p \to r$ (tj. vlastně Hypotetický sylogismus).

```
        p→q          ✓      premisa
        q→r          ✓      premisa
        ¬(p→r)       ✓      negace závěru
         |
         p                  dekompozice negace závěru; ¬→
        ¬r                  dekompozice negace závěru; ¬→
      /   \
   ¬p      q                dekompozice první premisy; →
    ×     /  \
        ¬q    r             dekompozice druhé premisy; →
         ×    ×
```

Všechny větve stromu jsou uzavřeny, čili neexistuje valuace, která by splňovala množinu obsahující premisy a negaci závěru. Znamená to, že úsudek je platný.

5)

Metodou sémantických tabel ověřte úsudek $\neg p \lor \neg q,\ \neg r \to p \ \therefore\ q \to r$.

```
        ¬p∨¬q        ✓      předpoklad
        ¬r→p         ✓      předpoklad
        ¬(q→r)       ✓      negace závěru
         |
        q                   dekompozice negace závěru; ¬→
        ¬r                  dekompozice negace závěru; ¬→
       /  \
  ¬¬r✓  p                   dekompozice druhé premisy; →
   |     /  \
   r   ¬p   ¬q              dekompozice ¬¬r; ¬¬; dekompozice první premisy; ∨
   ×    ×    ×
```

Všechny větve stromu jsou uzavřeny, čili neexistuje valuace, která by splňovala množinu obsahující premisy a negaci závěru. Znamená to, že úsudek je platný.

6)

Metodou sémantických tabel ověřte úsudek $p \to q,\ \neg(q \land \neg r) \therefore\ p \lor r$.

$p \to q$	✓	premisa
$\neg(q \land \neg r)$	✓	premisa
$\neg(p \lor r)$	✓	negace závěru
$\vert$		
$\neg p$		dekompozice negace závěru; $\neg\lor$
$\neg r$		dekompozice negace závěru; $\neg\lor$
/ \		
$\neg p$ q		dekompozice první premisy; $\to$
/ \ / \		
$\neg q$ r $\neg q$ r		dekompozice druhé premisy; $\neg\land$
× × ×		

Úsudek není platný.

7)

Metodou sémantických tabel ověřte úsudek $p \to q$, $q \to r$, $\neg r \lor \neg p$ $\therefore$ $\neg p$.

$p \to q$	✓	premisa
$q \to r$	✓	premisa
$\neg r \lor \neg p$	✓	premisa
$\neg\neg p$	✓	negace závěru
$\vert$		
p		dekompozice negace závěru; $\neg\neg$
/ \		
$\neg p$ q		dekompozice první premisy; $\to$
× / \		
$\neg r$ $\neg p$		dekompozice třetí premisy; $\lor$
/ \ ×		
$\neg q$ r		dekompozice druhé premisy; $\to$
× ×		

Úsudek je platný.

8)

Metodou sémantických tabel ověřte úsudek $p \to q$, $r \lor \neg q$ $\therefore$ $(p \lor q) \to r$.

$p\to q$	✓	premisa
$r\lor\neg q$	✓	premisa
$\neg((p\lor q)\to r)$	✓	negace závěru
|		
$(p\lor q)$	✓	dekompozice negace závěru; $\neg\neg$
$\neg r$		dekompozice negace závěru; $\neg\neg$
/ \		
r $\neg q$		dekompozice druhé premisy; $\lor$
× / \		
$\neg p$ q		dekompozice první premisy; $\to$
/ \ ×		
p q		dekompozice složené formule pod závěrem; $\lor$
× ×		

Úsudek je platný.

9)

Metodou sémantických tabel ověřte úsudek $p\to(q\to r)\ \therefore\ (p\land q)\to\neg r$.

$p\to(q\to r)$	✓	premisa
$\neg((p\land q)\to\neg r)$	✓	negace závěru
|		
$(p\land q)$	✓	dekompozice negace závěru; $\neg\to$
$\neg\neg r$	✓	dekompozice negace závěru; $\neg\to$
|		
p		dekompozice $(p\land q)$; $\land$
q		dekompozice $(p\land q)$; $\land$
r		dekompozice $\neg\neg r$; $\neg\neg$
/ \		
$\neg p$ $q\to r$	✓	dekompozice první premisy; $\to$
× / \		
$\neg q$ r		dekompozice $q\to r$; $\to$
×		

Úsudek není platný.

10)

Metodou sémantických tabel ověřte úsudek $p\to q,\ q\to\neg r,\ \neg r\to s\ \therefore\ p\to s$.

$p\to q$	✓	premisa
$q\to\neg r$	✓	premisa
$\neg r\to s$	✓	premisa
$\neg(p\to s)$	✓	negace závěru
|		
p		dekompozice negace závěru; $\neg\to$

```
        ¬s                       dekompozice negace závěru; ¬→
      /  \
   ¬p     q                      dekompozice první premisy; →
    ×    /  \
        ¬q   ¬r                  dekompozice druhé premisy; →
         ×   /  \
          ¬¬r ✓  s               dekompozice třetí premisy; →
           |     ×
           r                     dekompozice ¬¬r; ¬¬
           ×
```

Úsudek je platný.

11)

Metodou sémantických tabel ověřte úsudek (p∨q)↔(r∧s), q↔(¬r→p) ∴ r→(p∨q).

```
        (p∨q)↔(r∧s)  ✓           premisa
        q↔(¬r→p)     ✓           premisa
        ¬(r→(p∨q))   ✓           negace závěru
           |
           r                     dekompozice negace závěru; ¬→
         ¬(p∨q)      ✓           dekompozice negace závěru; ¬→
           |
          ¬p                     dekompozice (p∨q); ¬∨
          ¬q                     dekompozice (p∨q); ¬∨
          /  \
   p∨q ✓  ¬(p∨q)     ✓           dekompozice první premisy; ↔
   r∧s ✓  ¬(r∧s)     ✓           dekompozice první premisy; ↔
   /  \       |
  p    q      |                  dekompozice p∨q; ∨
  ×    ×      |
             ¬p                  dekompozice ¬(p∨q); ¬∨
             ¬q                  dekompozice ¬(p∨q); ¬∨
             /  \
          ¬r     ¬s              dekompozice ¬(r∧s); ¬∧
           ×     /  \
               q       ¬q                 dekompozice druhé premisy; ↔
          (¬r→p)✓  ¬(¬r→p) ✓              dekompozice druhé premisy; ↔
               ×       |
                      ¬r         dekompozice ¬(¬r→p); ¬→
                      ¬p         dekompozice ¬(¬r→p); ¬→
                       ×
```

Úsudek je platný.

12)

Metodou sémantických tabel ověřte, zda je formule $A\rightarrow(B\rightarrow A)$ tautologií. (Pro volbu A, B, C namísto p, q, r v těchto úlohách nemáme s výjimkou odlišení od ověřování úsudků zvláštní důvod.) Jak už bylo řečeno výše, tautologie je vlastně závěr pomyslného úsudku o nula premisách. Při důkazu sporem tedy celou tautologii negujeme.

$\neg(A\rightarrow(B\rightarrow A))$ ✓	negace formule
|	
A	dekompozice negace formule; $\neg\rightarrow$
$\neg(B\rightarrow A)$ ✓	dekompozice negace formule; $\neg\rightarrow$
|	
B	dekompozice předchozí složené formule; $\neg\rightarrow$
$\neg A$	dekompozice předchozí složené formule; $\neg\rightarrow$
×	

Daná formule je tautologií, neboť neexistuje valuace, která by splňovala negaci této formule. Protože je nesplnitelná, negace dané formule je kontradikce a formule daná je tudíž tautologií.

13)

Metodou sémantických tabel ověřte, zda je formule $(\neg B\rightarrow\neg C)\rightarrow(A\rightarrow B)$ tautologií.

$\neg((\neg B\rightarrow\neg C)\rightarrow(A\rightarrow B))$	✓	negace formule
|		
$\neg B\rightarrow\neg C$	✓	dekompozice negace dané formule; $\neg\rightarrow$
$\neg(A\rightarrow B)$	✓	dekompozice negace dané formule; $\neg\rightarrow$
|		
A		
$\neg B$		dekompozice $\neg(A\rightarrow B)$; $\neg\rightarrow$
/ \		
B $\neg C$		dekompozice $(\neg B\rightarrow\neg C)$; $\rightarrow$
×		

Daná formule není tautologií, neboť existuje valuace, která splňuje negaci této formule.

14.10 Rezoluční metoda

Rezoluční metoda či *rezoluční dokazování*, v návaznosti na předchůdce vypracovaná Johnem Alanem Robinsonem, se uplatňuje při automatickém dokazování, a proto je procvičována zejména v prostředí informatiky. Jak uvidíme, problematika má souvislost s problematikou disjunktivních/konjunktivních forem.

Rezoluční metoda využívá následující pravidlo (kde l je literál, tj. atomická formule nebo její negace), nebo jeho dvě neúplné varianty:

$(A\lor l)\land(B\lor\neg l)$	$(A\lor l)\land\neg l$	$(A\lor\neg l)\land l$
–––––––––––	––––––––	––––––––
$(A\lor B)$	A	A

Závěr tohoto pravidla, $(A\lor B)$, je nazýván *rezolventa*. Rezolventa je sémantický důsledek, nikoli však ekvivalent, konjunkce $(A\lor l)$ a $(B\lor\neg l)$.

Nyní tzv. *klauzule* je literál nebo disjunkce literálů. Například $(A\lor l)$ i $(B\lor\neg l)$ jsou klauzule. Klauzule odpovídá nekontradiktorické formuli. To znamená, že tautologiím odpovídají klauzule jako např. $p\lor l\lor\neg l$, které obsahují literál i jeho negaci. Kontradikcím na druhou stranu odpovídá prázdná klauzule (kdyby byla neprázdná, byla by pravdivá aspoň při nějaké valuaci). Tzv. *klauzulární forma* dané formule není nic jiného než její konjunktivní normální forma, tj. konjunkce klauzulí. Například $\neg a\lor(b\land c)$ má jako klauzulární formu $(\neg a\lor b)\land(\neg a\lor c)$.

Rezoluční metoda má více možností uplatnění, zde je jen několik ukázek.

1)

Začněme příkladem odvození důsledku z množiny formulí, resp. s ověřením úsudku jako třeba:

$p\rightarrow q$
$\neg p\rightarrow r$
–––––
$q\lor r$

Premisy úsudku převedeme na klauzule (eliminujeme dvojitou negaci) a seřadíme pod sebe jako první kroky našeho důkazu, tedy jako jeho předpoklady. Poté na dané kroky aplikujeme rezoluční pravidlo:

1.	$\neg p\lor q$	předpoklad
2.	$p\lor r$	předpoklad
3.	$q\lor r$	rezoluce (1,2)

2)

Pravidlo rezoluce můžeme nasadit podle potřeby opakovaně i na průběžně vzniklé formule. Zde je příklad ověření složitějšího úsudku $p\rightarrow(q\lor r)$, $\neg s\rightarrow\neg q$, $t\lor\neg r$ $\therefore$ $p\rightarrow(s\lor t)$:

1.	$\neg p\lor q\lor r$	předpoklad (1. premisa v úpravě)
2.	$s\lor\neg q$	předpoklad (2. premisa v úpravě)
3.	$t\lor\neg r$	předpoklad (3. premisa v úpravě)
4.	$\neg p\lor s\lor r$	rezoluce (1,2)
5.	$\neg p\lor s\lor \mathrm{t}$	rezoluce (3,4)

6. $p \rightarrow (s \vee t)$ (úprava 5.)

3)

Jako další příklad uplatnění rezoluční metody si ukážeme generování logických důsledků formulí. Uvažme pro příklad, že lidé se jmény A až E se dívají na televizi, čemuž odpovídají atomické výroky a až e. Víme, že platí doslova toto $(a \rightarrow b)$, $(d \vee e)$, $(b \vee c) \wedge \neg(b \wedge c)$, $(d \leftrightarrow c)$, $e \rightarrow (a \wedge d)$. Dané výroky převedeme do klauzulární podoby:

1. $(a \rightarrow b)$, tj. $(\neg a \vee b)$
2. $(d \vee e)$
3. $(b \vee c) \wedge \neg(b \wedge c)$, tj. $(b \vee c) \wedge (\neg b \vee \neg c)$
4. $(d \leftrightarrow c)$, tj. $(\neg d \vee c) \wedge (\neg c \vee d)$
5. $e \rightarrow (a \wedge d)$, tj. $\neg e \vee (a \wedge d)$ čili $(\neg e \vee a) \wedge (\neg e \vee d)$

Konjunkce rozdělíme na jednotlivé klauzule a všechny získané klauzule seřadíme do posloupnosti jako první kroky důkazu:

1. $\neg a \vee b$
2. $d \vee e$
3. $b \vee c$
4. $\neg b \vee \neg c$
5. $\neg d \vee c$
6. $\neg c \vee d$
7. $\neg e \vee a$
8. $\neg e \vee d$

Další kroky získáme rezolucí. Snažíme se přitom vygenerovat nejjednodušší rezolventy, čímž získáme všechny platné elementární (pozitivní nebo negativní) fakty:

9. d rezoluce (2,8), tj. D se dívá
10. c rezoluce (5,9), tj. C se dívá
11. $\neg b$ rezoluce (4,10), tj. B se nedívá
12. $\neg a$ rezoluce (1,11), tj. A se nedívá
13. $\neg e$ rezoluce (7,12), tj. E se dívá

4)

Před aplikací rezoluční metody k ověření splnitelnosti množiny formulí si připomeňme, že množina formulí je nesplnitelná, pokud obsahuje spor nebo je spor z dané množiny odvoditelný. Takže pokud v důkazu vygenerujeme prázdnou rezolventu, daná množina je nesplnitelná. Ověřme splnitelnost množiny $\{p \vee q \vee \neg r, \neg p, p \vee q \vee r, p \vee \neg q\}$:

1.	$p \lor q \lor \neg r$	
2.	$\neg p$	
3.	$p \lor q \lor r$	
4.	$p \lor \neg q$	
5.	$q \lor \neg r$	rezoluce (1,2)
6.	$p \lor q$	rezoluce (1,3)
7.	p	rezoluce (4,6)
8.		spor (2,7)

Další rezolventy již generovat nemusíme, daná množina je nesplnitelná.

5)

Úsudky lze ověřovat rovněž aplikací metody rezoluce v rámci důkazu sporem. Ověřme tak například úsudek $p \lor q$, $\neg p \lor r$ a $\neg q \lor s$ $\therefore$ $r \lor s$. Při důkazu sporem negujeme závěr a převedeme ho pomocí DM na $\neg r \lor \neg s$. Na dané formule opakovaně aplikujeme rezoluční pravidlo:

1.	$p \lor q$	předpoklad
2.	$\neg p \lor r$	předpoklad
3.	$\neg q \lor s$	předpoklad
4.	$\neg r$	první konjunkt negace závěru
5.	$\neg s$	druhý konjunkt negace závěru
6.	$\neg p$	rezoluce (2,4)
7.	q	rezoluce (1,6)
8.	$\neg q$	rezoluce (3,5)
9.		spor (7,8)

Při důkazu sporem jsme tedy došli k prázdné klauzuli, takže příslušná množina předpokládaná v důkazu sporem splnitelná není. Proto daný závěr plyne ze zadané množiny formulí, úsudek je platný.