INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0216, OPVK)

Úvod do logiky (VL): 11. Ověřování, zda je formule tautologií metodou protipříkladu

doc. PhDr. Jiří Raclavský, Ph.D.

(raclavsky@phil.muni.cz)

11. Ověřování, zda je formule tautologií metodou protipříkladu

V této kapitole si osvojíme metodu, jež se v rozvinutější podobě s oblibou užívá při zjišťování platnosti úsudků.

Výše jsme viděli, že pomocí sémantické tabulky lze určit průběh pravdivostních hodnot formule a tudíž i to, zda daná formule je, či není tautologií. Zde jsou dva konkrétní příklady uplatnění tabulkové metody, na nichž je ovšem vidět její relativní pracnost, která exponenciálně roste s vyšším počtem proměnných:

$\neg$	p	$\rightarrow$	$(q$	$\vee$	$p)$
0	1	*1*	1	1	1
0	1	*1*	0	1	1
1	0	*1*	1	1	0
1	0	*0*	0	0	0

Jak si lze všimnout, k určení toho, že daná formule není tautologií, by stačilo najít jen jeden řádek této tabulky. Přesněji, stačilo by zjistit, že daná formule nabývá pravdivostní hodnoty 0 při $v(p)=v(q)=0$.

V následujícím příkladu je k ověření, že daná formule je tautologií, potřeba prověřit všechny řádky. Bylo by ale žádoucí najít metodu, jak rychle zjistit, že v žádném řádku není výslednou hodnotou 0, tedy že neexistuje valuace, při níž je formule nepravdivá – a tedy je tautologií.

$\neg$	p	$\rightarrow$	$(q$	$\vee$	$\neg$	$p)$
0	1	*1*	1	1	0	1
0	1	*1*	0	0	0	1
1	0	*1*	1	1	1	0
1	0	*1*	0	1	1	0

Skutečnost, že formule A není tautologií, pokud alespoň při jedné valuaci nabývá pravdivostní hodnotu 0, a že A je tautologií, pokud tomu tak není, využívá *metoda protipříkladu*. Ta se snaží prokázat netautologičnost A tím, že hledá valuaci, při níž A nabývá hodnotu 0. (Jedná se tedy o důkaz sporem, viz níž kap. 13.)

Metodu protipříkladu si nejprve přiblížíme na příkladech našich dvou formulí. Formuli $\neg p \rightarrow (q \vee p)$ stručně označujme A. Připomeňme si, že hledáme alespoň jednu valuaci – existuje-li nějaká –, při níž naše formule A nabývá pravdivostní hodnoty 0, tehdy by totiž A tautologií nebyla. Toto celé je naší hypotézou H:

$$\begin{array}{l}\neg p \rightarrow (q \vee p)\\ \quad\;\; 0\end{array}$$

Naše formule je tvaru $B \rightarrow C$ a implikace je nepravdivá, pakliže antecedent je 1 a konsekvent 0:

$$\begin{array}{l}\neg p \rightarrow (q \vee p)\\ \quad\;\; 0\\ 1 \qquad 0\end{array}$$

Toto (předběžné) ohodnocení podle hypotézy H se budeme snažit prosadit směrem k nejmenším podformulím A, totiž k p a q. Pokud se nám H podaří prosadit, najdeme tím alespoň jednu valuaci (v našem konkrétním případě to bude $v(p)=v(q)=0$), při níž je formule A nepravdivá a tedy není tautologií. Prosadit se nám to ale nepodaří v případě, že bychom k prosazení potřebovali, aby nějaká proměnná při takové valuaci nabývala hned dvě pravdivostní hodnoty 1 a 0, což je logicky vyloučeno.

Vraťme se k naší formuli. Aby byla H prosazena v antecedentu, p musí být 0, což není problém prosadit:

$$\begin{array}{l}\neg p \rightarrow (q \vee p)\\ \quad\;\; 0\\ 1 \qquad 0\\ \;\; 0\end{array}$$

(Získanou hodnotu pro proměnnou p si můžeme pro lepší orientaci vyznačovat třeba podtržením.) Nyní se hypotézu H snažíme prosadit také v konsekventu. Aby $q \vee p$ měla hodnotu 0, tak obě její dílčí podformule musí být 0:

$$\begin{array}{l}\neg p \rightarrow (q \vee p)\\ \quad\;\; 0\\ 1 \qquad 0\\ \;\; 0\\ \qquad\;\; 0 \;\; 0\end{array}$$

Vidíme, že nás nic nenutilo k tomu, aby nějaká proměnná měla v zájmu H rozporné odhodnocení, hypotézu H se nám tedy podařilo prosadit. To znamená, že jsme našli alespoň jednu valuaci, při níž A není pravdivá, a tudíž A není tautologií.

Ukažme si ještě, že v případě druhé formule, $\neg p \rightarrow (q \vee \neg p)$, bychom v zájmu H museli mít rozpornou valuaci pro p. Tuto skutečnost zde označujeme tučným řezem.

$\neg p \rightarrow (q \vee \neg p)$

0

1 0

0

0 0

1

Znamená to vlastně, že pro danou formuli neexistuje valuace, která by ji činila nepravdivou, a tudíž je daná formule tautologií.

Poznamenejme, že někdy může být při řešení příkladu výhodný trochu jiný postup, kdy valuaci získanou na jedné straně formule přeneseme na druhou stranu, poté dopočítáme pravdivostní hodnotu dané podformule a zjistíme, že tato hodnota je odlišná od té původně zamýšlené. Rozpor mezi plánem a dosaženou hodnotou si můžeme vyznačit třeba tučným řezem:

$\neg p \rightarrow (q \vee \neg p)$

0

1 **0**

0

0 (valuace získaná na levé straně)

0 1

1

Doplňující poznámka. Už výše bylo zmíněno, že jde vlastně o důkaz sporem. Právě ukázaná metoda se dá přepsat do podoby, z níž je zjevné, že jde o důkaz, protože jde o posloupnost formulí, které jsou vyvozovány pomocí nějakých odvozovacích pravidel (k pojmu důkazu a odvozovacího pravidla viz kapitolu 13.). V daném případě by formule byly spjaty rovnou se získanými pravdivostními hodnotami h, tj. pracovali bychom s útvary jako h:A. (Níže v kapitole 14. budeme uplatňovat současnou podobu metody sémantických tabel, jimž se naše následující ukázka podobá.) Zde je přepis výše uváděného příkladu.

1.	0: $\neg p \rightarrow (q \vee \neg p)$	
2.	1: $\neg p$	důsledek kroku 1. na základě definice $\rightarrow$
3.	0: $(q \vee \neg p)$	důsledek kroku 1. na základě definice $\rightarrow$
4.	0: p	důsledek kroku 2. na základě definice $\neg$
5.	0: q	důsledek kroku 3. na základě definice $\vee$
6.	0: $\neg p$	důsledek kroku 3. na základě definice $\vee$
7.	1: p	důsledek kroku 6. na základě definice $\neg$

Nyní vidíme spor mezi kroky 4. a 7., proto neplatí předpoklad důkazu sporem, totiž krok 1. Protože daná formule nemůže být nepravdivá (jak předpokládal důkaz sporem), je tautologií.

11.1 Příklady – ověřování, zda je formule tautologií metodou protipříkladu

Metodou protipříkladu ověřte, zda je daná formule tautologií:

1)

$$p \rightarrow (q \rightarrow p)$$

1. Hypotéza H: 0
2. aby H, musí být: **1** 0
3. aby H, pak musí být: 1 **0**
4. rozpor valuace pro *p* v 2. a 3. (vyznačeno tučně)
5. protože se nepodařilo prosadit hypotézu H, formule je tautologií.

2)

$$(p \rightarrow q) \rightarrow p$$

1. Hypotéza H: 0
2. aby H, musí být: 1 0
3. přenos valuace pro *p* nalevo: 0
4. je-li antecedent 0, $(p \rightarrow q)$ je 1, 1

což je v souladu s hypotézou H (viz 2.):

5. protože se podařilo prosadit H, daná formule není tautologií.

Všimněme si, že daná formule je 0 při $v(p)=v(q)=0$ a také při $v'(p)=0$, $v'(q)=1$, ale my se nemusíme starat o to, při které z těchto valuací to je.

3)

$$(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

1. Hypotéza H: 0
2. aby H, musí být: 1 0
3. aby H, pak v konsekventu musí být: 1 **0**
4. aby H, pak v antecedentu: 1 **1**
5. rozpor valuace pro *q* v 3. a 4.
6. protože se nepodařilo prosadit hypotézu H, formule je tautologií.

4)

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$$

1. Hypotéza H: 0
2. aby H, musí být: 1 0
3. aby H, pak v konsekventu musí být: 1 0
4. vyhodnocení negací *p* a *q*: 0 1
5. přenos valuace *p* a *q*: 0 1
6. načež $(p \rightarrow q)$ je 1, což je v souladu s hypotézou H (viz 2.);
7. protože se podařilo prosadit hypotézu H, formule není tautologií.

5)

$(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)$

1. Hypotéza H: 0
2. aby H, musí být: **1** 0
3. aby H, pak v konsekventu musí být: 1 0
4. přenos valuace pro *p*, *q*: 0 1
5. vyhodnocení negací: 1 0
6. takže implikace je nepravdivá: **0**
7. což je rozpor s H (viz 2.);
8. protože hypotézu H se nepodařilo prosadit, formule je tautologií.

6)

$(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \wedge r) \rightarrow (q \wedge \neg r))$

1. Hypotéza H: 0
2. aby H, musí být: 1 0
3. aby H, pak v konsekventu musí být: 1 0
4. takže první konjunkce musí být: 1 1
5. přenos valuace pro *r*: 1
6. negace *r* je tedy: 0
7. přenos valuace pro *p*: 1
8. aby antecedent byl pravdivý, tak *q* musí být: 1
9. přenos valuace pro *q*: 1
10. vyhodnocení druhé konjunkce: 0
11. protože se podařilo prosadit H, formule není tautologií.

7)

$((p \vee q) \wedge r) \rightarrow (\neg p \rightarrow r)$

1. Hypotéza H: 0
2. aby H, musí být: **1** 0
3. aby H, pak v konsekventu musí být: 1 0
4. takže valuace pro *p* je: 0
5. přenos valuace pro *p*, *r*: 0 0
6. aby disjunkce byla pravdivá: 1
7. takže disjunkce je pravdivá: 1
8. avšak konjunkce vychází jako: **0**
9. jenže to je rozpor s H (viz 2.)
10. protože se nepodařilo prosadit hypotézu H, formule je tautologií (T).

Všimněme si však, že v 5. jsme už mohli skončit. Neboť jsme zjistili, že pravý konjunkt (totiž *r*) má být nepravdivý, ačkoli celá konjunkce má být pravdivá.

8)

$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$

1. Hypotéza H: 0
2. aby H, musí být: **1** 0
3. aby H, pak v konsekventu musí být: 1 0
4. aby H, tak musí být: 1 0

5. přenos valuace pro p: 1

6. aby H platila pro konsekvent, tak q musí být: 1

7. přenos valuace pro p, q, r: 1 1 0

8. vyhodnocení implikace: 0

9. vyhodnocení celého antecedentu: **0**

10. avšak výsledek v 9. je v rozporu s H (viz 2.)

11. protože se nepodařilo prosadit hypotézu H, formule je tautologií.

9)

$$((((p\lor q)\to r)\land\neg r)\land\neg p)\to\neg q$$

1. Hypotéza H: 0

2. aby H, musí být: 1 0

3. aby H, musí být dále: **1** 1

4. zjištění valuace pro q: 1

5. aby H, musí být: 1

6. aby H, tak negace p: 1

7. zjištění valuace pro p: 0

8. zjištění valuace pro r: 0

9. přenos valuace pro p: 0

10. přenos valuace pro q: 1

11. přenos valuace pro r: 0

12. vyhodnocení disjunkce: 1

13. vyhodnocení implikace: **0**

14. avšak aby platila H, tak měla být implikace pravdivá (viz 3.), aby byly obě konjunkce antecedentu (srov. 2. a 3.) v souladu s H pravdivé; je tu tedy spor;

15. protože hypotézu H se nepodařilo prosadit, formule je tautologií.

10)

$$(p\to(q\to r)) \to ((p\to q)\to r)$$

1. Hypotéza H: 0

2. aby H, musí být: 1 0

3. aby H, pak v konsekventu musí být: 1 0

4. přenos valuace pro r: 0

5. aby H, tak platí například tato možnost: 0

6. vyhodnocení implikace: 1

7. přenos valuace pro q: 0

8. při zvolené valuaci pro q musí být p: 0

9. aby tak byla pravdivá vnitřní implikace konsekventu: 1

10. přenos valuace pro p: 0

11. vyhodnocení antecedentu: 1

12. protože se podařilo prosadit H, formule není tautologií.

Uvědomme si, že po dokončení kroku 3. jsme v situaci, kdy se nám prosazování větví na tři možnosti, tři větve. Víme sice, že v zájmu H má být r=0, ale to k volbě jedné ze tří větví nestačí. V danou chvíli tedy můžeme volit náhodně jednu z nich, jak je to vyvedeno výše. Lze však vybrat efektivnější větev: p=0; to totiž znamená, že celý antecedent $(p \rightarrow (q \rightarrow r))$=1 a hypotéza H je tedy prosazena.