



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0216, OPVK)

Úvod do logiky (VL): 10. Výrokově-logické vyplývání

doc. PhDr. Jiří Raclavský, Ph.D.

(raclavsky@phil.muni.cz)

10. Výrokově-logické vyplývání

Už výše jsme si představili intuitivní pojem vyplývání. Pověšili jsme si, že odkazuje na intuitivní pojem všech okolností, tedy intuitivní pojem nutnosti. Řekli jsme, že tento pojem je třeba nahradit nějakým rigorózním pojmem, aby se tak stal rigorózním i pojem vyplývání. VL nabízí určitý rigorózní pojem vyplývání, poněvadž nabízí rigorózní náhradu intuitivního pojmu okolností, totiž pojem valuace (ohodnocení výrokových proměnných); tento pojem byl definován již výše v kapitole 2.

Výrokově-logické vyplývání

Formule Z výrokově-logicky vyplývá z formulí P_1, P_2, \dots, P_n právě tehdy, když Z nabývá pravdivostní hodnotu pravda při všech valuacích, při nichž nabývají pravdivostní hodnotu pravda všechny formule P_1, P_2, \dots, P_n .

Zde je věcně shodná definice, jež má však přehlednější logickou strukturu definienda: Formule Z výrokově-logicky vyplývá z formulí P_1, P_2, \dots, P_n právě tehdy, když při všech valuacích platí, že jsou-li všechny formule P_1, P_2, \dots, P_n pravdivé, je pravdivá rovněž formule Z . Vyplývání Z z P_1, P_2 až P_n zapisujeme:

$$P_1, P_2, \dots, P_n \models Z.$$

V klasické logice platí, že Z vyplývá z P_1, P_2 až P_n tehdy, když konjunkce všech formulí P_1, P_2 až P_n implikuje Z s logickou nutností, tedy když je formule $(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow Z$ tautologií, což značíme:

$$\models (P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow Z.$$

Neexistuje tedy případ, kdy by se pravdivost formulí P_1, P_2, \dots, P_n nepřenesla na Z , neboli všechny premisy byly pravdivé a závěr nepravdivý. (Mj. při reprezentaci pravdivosti a nepravdivosti pomocí 1 a 0 to znamená, že při všech valuacích v platí, že $(\mathfrak{I}(v, P_1) \wedge \mathfrak{I}(v, P_2) \wedge \dots \wedge \mathfrak{I}(v, P_n)) \leq \mathfrak{I}(v, Z)$.)

Připomeňme si ještě shodu pojmu vyplývání s výše uváděným pojmem tautologického důsledku systému formulí T : A je tautologickým důsledkem systému formulí T , tj. $T \models A$, právě tehdy, když $\mathfrak{I}(v, A) = 1$ při každé interpretaci, při níž $\mathfrak{I}(v, B) = 1$ pro každou formuli B , jež je prvkem T . Jinými slovy, A výrokově-logicky vyplývá z T právě tehdy, když A je splňována přinejmenším těmi všemi interpretacemi, jež splňují T .

Vyplývání v klasické logice a tedy i VL-vyplývání má následující tři vlastnosti. Necht $Cn(X)$ je množina sémantických důsledků množiny formulí X , tj. $Cn(X)$ je množina všech formulí, jež vyplývají z X :

- i. *monotónnost* vyplývání: jestliže $X \subseteq Y$, tak $Cn(X) \subseteq Cn(Y)$, čili vyplývá-li Z z P_1, P_2, \dots, P_n , tak Z vyplývá i z množiny obsahující P_1, P_2, \dots, P_n a nějakou další formuli Q
- ii. *reflexivnost* vyplývání: $X \subseteq Cn(X)$, čili jestliže Z je jednou z P_1, P_2, \dots, P_n , tak Z vyplývá z P_1, P_2, \dots, P_n
- iii. *tranzitivita* vyplývání: $Cn(Cn(X)) \subseteq Cn(X)$, čili důsledky důsledků X jsou také důsledky X (tj. jestliže $P_1, P_2, \dots, P_n \models Z$ a $Q_1, Q_2, \dots, Q_n, Z \models Z'$, tak $P_1, P_2, \dots, P_n, Q_1, Q_2, \dots, Q_n, Z \models Z'$).

Připomeňme si též, že úsudek U je platný právě tehdy, když jeho závěr Z vyplývá z jeho premis P_1, P_2, \dots, P_n . Znamená to, že jeho závěr nemůže být nepravdivý, jestliže jsou všechny jeho premisy pravdivé. Logika se ovšem nestará o konkrétní obsahy úsudků, jejich platnost ověřuje výlučně na základě jejich *logické formy*. V případě VL například slovně vyjádřený úsudek:

Jestliže prší, je mokro.

Prší.

Je mokro.

prohlásíme za platný, protože je platnou jeho logická forma:

$p \rightarrow q$

p

q

Dle VL závěr q dané úsudkové formy výrokově-logicky vyplývá z premis $p \rightarrow q$ a p . Logická forma daného úsudku tedy garantuje, že se pravdivost premis přenese na závěr.

Pro názornost se podívejme na tři z možných distribucí pravdivostních hodnot skrze danou úsudkovou formu, tj. tři valuace v_1-v_3 :

$v_1)$	$v_2)$	$v_3)$
$p_1 \rightarrow q_1$ 1	$p_1 \rightarrow q_0$ 0	$p_0 \rightarrow q_1$ 1
p_1 1	p_1 1	p_0 0
-----	-----	-----
q_1 1	q_0 0	q_1 1

Daná úsudková forma je platná bez ohledu na tu, či onu valuaci. Platnost je založena na tom, že při valuaci jako v_1 , při níž jsou pravdivé všechny premisy, je pravdivý také závěr. Když premisy pravdivé nejsou, závěr pravdivý být může, ale nemusí, srov. $v_2)$ a $v_3)$; to nic nemění na platnosti této úsudkové formy.

Uzavřeme to tím, že platnost úsudků můžeme explicitně opřít o výrokově-logické vyplývání: (jazykově formulovaný) úsudek U je *výrokově-logicky platný* právě tehdy, když

závěr Z jeho logické formy výrokově-logicky vyplývá z jeho premis P_1, P_2, \dots, P_n jeho úsudkové formy.

* * *

Doplňující informace. Naneštěstí je pojem výrokově-logického vyplývání slabší než intuitivní pojem vyplývání (a též pojem vyplývání, který nadefinujeme v pokračování této knihy). K protipříkladům se využívá slabina VL, jíž je přílišná hrubost analýz, jichž je VL schopna. VL tedy nedokáže dostatečně charakterizovat logickou formu úsudků. Ukažme si tyto dva jazykové příklady:

Každý člověk je smrtelný.

Aristotelés je člověk.

Aristotelés je smrtelný.

Hlavní město České republiky má přes milion obyvatel.

Praha je hlavní město České republiky.

Praha má přes milion obyvatel.

V obou případech se jedná o intuitivně platné úsudky. Logickou formou těchto úsudků je ale podle VL:

p

q

r

Pro tuto úsudkovou formu existuje valuace, jmenovitě $v(p)=v(q)=1$, $v(r)=0$, při níž jsou všechny premisy pravdivé, ale závěr pravdivý není – pravdivost premis se tedy nepřenesla na závěr. Z hlediska VL se jedná o neplatnou úsudkovou formu a oba jazykové úsudky jsou proto vyhodnoceny jako neplatné. VL tedy nesprávně vyhodnotila platnost těchto jazykových úsudků. Nedokázala totiž správně zachytit jejich logickou formu. Konkrétně to, že v prvním případě se vyplývání zakládá na překrývajících se extenzích predikátů v daných jednoduchých výrociích, v druhém zase na vzájemné substitutivě identických termínů z druhé premisy.

V důsledku těchto zkoumání můžeme proto formulovat následující tvrzení: Jestliže výrok Z výrokově-logicky vyplývá z výroků P_1, P_2, \dots, P_n , pak z nich také vyplývá. Neplatí ovšem obrácené tvrzení: Jestliže výrok Z vyplývá z výroků P_1, P_2, \dots, P_n , pak z nich také výrokově-logicky vyplývá. Z hlediska praktického je výhodou VL to, že díky vysoké abstrakci od detailů umožňuje rychle ověřit platnost mnoha jazykových úsudků. Nevýhodou je, že tyto výsledky nemůžeme absolutizovat, v některých případech není VL s to platnost správně určit.