



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0216, OPVK)

Úvod do logiky (VL): 9. Úplná disjunktivní / konjunktivní normální forma a její minimalizace

doc. PhDr. Jiří Raclavský, Ph.D.

(raclavsky@phil.muni.cz)

9. Úplná disjunktivní / konjunktivní normální forma a její minimalizace

Výše jsme již zmínili, že adekvátně bohatý jazyk VL si vystačí jen s několika výrokovými spojky. Bohatý je v tom smyslu, že dokáže vyjádřit všechny pravdivostní funkce, což také znamená, že je do něj přeložitelná formule libovolného jiného jazyka VL. Nyní budeme uvažovat jazyk VL, který bude využívat výlučně množinu spojek $\{\neg, \wedge, \vee\}$ (níže uvedeme jejich jinou symbolickou reprezentaci).

Jeden z důvodů pro přednostní práci s tímto jazykem můžeme najít v následující úvaze. Každý stav světa se dá popsat souborem elementárních výroků, například je tu stav (miniaturního) světa, jenž je popsatelný pomocí konjunkce výroků „Alík je pes“ a „Kvido má auto“; jiný stav téhož světa je zas popsatelný konjunkcí výroků „Alík je pes“ a „Kvido nemá auto“. Všechny stavy tohoto našeho světa jsou tedy vyjádřitelné disjunkcí, jejímiž čtyřmi členy jsou ony jednotlivé konjunkce.

Nyní uvažme jeden z mnoha výroků, s jakými se můžeme setkat, totiž „Jestliže Alík je pes, tak Kvido má auto“. V kterých stavech světa je tento výrok pravdivý? To vidíme z tabulky ukazující průběh jeho pravdivostních hodnot:

Jestliže Alík je pes, tak Kvido má auto.		
Alík je pes.		Kvido má auto.
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0

Z tabulky však rovněž vidíme, že to, co daný výrok říká, se dá ekvivalentně vyjádřit výrokem „(Alík je pes a Kvido má auto) nebo (Alík není pes a Kvido má auto) nebo (Alík není pes a Kvido nemá auto)“, protože toto souvětí vyjadřuje soubor všech těch možných dílčích stavů světa, v nichž je pravdivý výrok „Jestliže Alík je pes, tak Kvido má auto“. Takovéto vyjádření má tedy výhodu v tom, že názorně vystihuje, jak vypadají příslušné stavy světa, a tedy je v principu snáze verifikovatelné, než třeba „Jestliže Alík je pes, tak Kvido má auto“. Všimněme si, že odpovídající konjunkce $(p \wedge q)$, $(\neg p \wedge q)$ a $(\neg p \wedge \neg q)$ (mezi tyto konjunkce pak vsuneme \vee) korespondují s těmi řádky, kdy je ve sloupci funkčních hodnot uvedena pravdivostní hodnota 1. Níže si ukážeme, že k výsledné formuli $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$ se můžeme dobrat i jiným způsobem, totiž ekvivalentními transformacemi $(p \rightarrow q)$.

Mnohokrát byl užitečně využit další důvod pro zkoumání problematiky této kapitoly. Uvažme navrhovatele nějakého elektrotechnického zařízení, jež využívá logické obvody. Navrhovatel určil, že obvod tohoto zařízení má tři vstupy p , q , r , přičemž předepsal, jaké pravdivostní hodnoty se mají objevit na výstupu f , pakliže jsou na vstupech ty, či jiné hodnoty.

Navrhovatel tedy ví, jak se má daný systém chovat, ví, které funkční hodnoty odpovídají kterým argumentům. Je to například:

p	q	r	$f(p,q,r)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

Zhotovitel příslušného logického obvodu musí k této tabulce funkce sestavit formuli, která má právě takovýto průběh pravdivostních hodnot. Teoreticky existuje nekonečně mnoho takových formulí, my potřebujeme alespoň jednu z nich. Výše jsme přitom už naznačili jednoduchý způsob zjištění takové formule: je to formule tvaru disjunkce, jejímiž členy jsou konjunkce odpovídající těm řádkům, v nichž daná funkce f vrací hodnotu 1. Tj. $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$.

Při výrobě zařízení implementujících logické obvody pochopitelně chceme daná zařízení a tedy i obvody zjednodušit a zmenšit, ať už z důvodů nákladů na výrobu, objemnost či provozní rychlost. Níže si ukážeme určitý postup, jak například právě uváděnou formuli převést na jí ekvivalentní, avšak podstatně kratší formuli $q \vee (\neg p \wedge r)$.

9.1 Úplná disjunktivní (konjunktivní) normální forma

Následující *Věta o reprezentaci* jednoduše říká, že všechny formule VL mohou být převedeny na ekvivalentní formule obsahující pouze výrokové spojky \neg , \wedge , \vee . Analogon této věty platí pro libovolnou jinou funkčně úplnou množinu výrokových spojek. Znamená to, že množinu všech formulí zobrazujeme na její podmnožinu, jejíž prvky obsahují jen \neg , \wedge , \vee a proměnné, což je výhodné, pokud chceme formule porovnávat, neboť takto jsme získali jejich standardizované tvary.

Věta o reprezentaci

Každou pravdivostní n -ární funkci f^n lze reprezentovat formulí, která obsahuje pouze spojky \neg , \wedge , \vee .

Ukážeme si, že formule lze reprezentovat i formulemi v jejich tzv. úplné disjunktivní nebo naopak konjunktivní normální formě. Disjunktivní a konjunktivní formy jsou k sobě duální. Disjunktivní formy syntakticky „popisují“ model dané formule, jak jsme si vysvětlili na

úvodním příkladu. Konjunktivní formy jsou zas výhodnější pro určité počítačové využití (například pro databázové dotazování). K jejich ukázání potřebujeme několik pomocných pojmů.

Literál

Literálem je libovolná atomická formule nebo negace atomické formule.

Příklady literálů jsou p , q , $\neg p$, $\neg q$; literály nejsou třeba $p \rightarrow q$ či $p \vee \neg p$ nebo $p \vee$.

Elementární konjunkce

Formule A je *elementární konjunkcí* nad p_1, p_2, \dots, p_n právě tehdy, když je libovolnou konjunkcí literálů z formulí p_1, p_2, \dots, p_n , přičemž se v této elementární konjunkci vyskytují jakožto literál právě jednou.

Příkladem elementární konjunkce je $p_1 \wedge \neg p_2$, ovšem třeba $p_1 \wedge \neg p_1$ nikoli.

Zcela analogicky: Formule A je *elementární disjunkcí* nad p_1, p_2, \dots, p_n právě tehdy, když je libovolnou disjunkcí literálů z formulí p_1, p_2, \dots, p_n , přičemž se v této elementární disjunkci vyskytují jakožto literál právě jednou.

Elementární konjunkce jsou někdy nazývány *mintermy*, elementární disjunkce pak *maxtermy*. V případě disjunkcí se také hovoří o *klauzulích* (tzv. *Hornova klauzule* je pak klauzule, jež obsahuje alespoň jeden nenegovaný literál).

Disjunktivní normální forma

Formule A je v *disjunktivní normální formě* nad formulemi p_1, p_2, \dots, p_n právě tehdy, když A je disjunkcí elementárních konjunkcí literálů z formulí p_1, p_2, \dots, p_n .

Příklady formulí v disjunktivní normální formě jsou $(p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2)$ či $(p_1 \wedge \neg p_2) \vee \neg p_1$.

Zcela analogicky: Formule A je v *konjunktivní normální formě* nad atomickými formulemi p_1, p_2, \dots, p_n právě tehdy, když A je konjunkcí elementárních disjunkcí literálů z formulí p_1, p_2, \dots, p_n .

V anglickém jazykovém prostředí, ale i u nás se pro disjunktivní i konjunktivní formu používají zkratky *DNF* a *CNF* (v tomto pořadí).

Úplná disjunktivní normální forma (ÚDNF)

Formule B je *úplnou disjunktivní normální formou* (ÚDNF) formule A právě tehdy, když B je ekvivalentní A , přičemž B je disjunkcí elementárních konjunkcí literálů z A , přičemž v každém jejím disjunktivu se vyskytují všechny literály A právě jednou.

Pro příklad, $(p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2)$ je ÚDNF nějaké formule obsahující p_1 a p_2 . Na druhou stranu, $(p_1 \wedge \neg p_2) \vee \neg p_1$ není ÚDNF, poněvadž $\neg p_1$ by měla být konjunkcí s p_2 či $\neg p_2$, ale tyto v ní chybí.

Formule B je úplnou konjunktivní normální formou (ÚKNF) formule A právě tehdy, když B je ekvivalentní A , přičemž B je konjunkcí elementárních disjunkcí literálů z A , přičemž v každém jejím disjunktů se vyskytují všechny literály A právě jednou.

Nyní jsme připraveni formulovat Větu o reprezentaci formulí pomocí ÚDNF (resp. ÚKNF) (mnoho autorů se omezuje na slabší větu využívající pouze DNF, resp. KNF).

Věta o reprezentaci pomocí ÚDNF (ÚKNF)

Ke každé formuli A , která není kontradikcí (tautologií), lze najít formuli B , která je ve tvaru ÚDNF (ÚKNF) a je ekvivalentní s A .

Uvědomme si, že ÚDNF nelze zkonstruovat pro kontradikce a ÚKNF zase nelze zkonstruovat pro tautologie.

9.2 Příklady – sestavení ÚDNF (ÚKNF)

Formule VL můžeme převádět na korespondující ÚDNF (či ÚKNF) pomocí ekvivalentních transformací, přičemž uplatňujeme zákony-tautologie VL. Pro ilustraci si ukážeme převod formule $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ na ÚDNF:

$$\begin{aligned}
 & p \rightarrow (q \rightarrow p) \\
 \Leftrightarrow & [p \rightarrow (\neg q \vee p)] && \text{převod } \rightarrow \text{ na } \vee \\
 \Leftrightarrow & [\neg p \vee (\neg q \vee p)] && \text{převod } \rightarrow \text{ na } \vee \\
 \Leftrightarrow & [\neg p \vee \neg q \vee p] && \text{vnitřní závorky možno vynechat (asociativita } \vee) \\
 \Leftrightarrow & [(\neg p \wedge (q \vee \neg q)) \vee \neg q \vee p] && \text{neutrálnost tautologie ke } \wedge: \neg p \Leftrightarrow (\neg p \wedge (q \vee \neg q)) \\
 \Leftrightarrow & [(\neg p \wedge (q \vee \neg q)) \vee (\neg q \wedge (p \vee \neg p)) \vee p] && \text{neutrálnost tautologie ke } \wedge: \neg q \Leftrightarrow (\neg q \wedge (p \vee \neg p)) \\
 \Leftrightarrow & [(\neg p \wedge (q \vee \neg q)) \vee (\neg q \wedge (p \vee \neg p)) \vee (p \wedge (q \vee \neg q))] && \text{neutrálnost tautologie ke } \wedge: p \Leftrightarrow (p \wedge (q \vee \neg q)) \\
 \Leftrightarrow & [((\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \vee ((\neg q \wedge p) \vee (\neg q \wedge \neg p)) \vee ((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q))] && \text{zákon distributivity pro } \wedge: (p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \\
 \Leftrightarrow & [((\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \vee ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \vee ((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q))] && \text{zákon komutativity } \vee \\
 \Leftrightarrow & [(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)] && \text{eliminace závorek (na základě asociativity } \vee) \\
 \Leftrightarrow & [(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)] && \text{zákon idempotence } \wedge: (p \wedge p) \Leftrightarrow p \\
 \Leftrightarrow & [(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)] && \text{zákon komutativity } \vee
 \end{aligned}$$

Podstatně jednodušší metodou pro získání ÚDNF než pomocí ekvivalentních transformací je postup, při němž z tabulky průběhu pravdivostních hodnot dané formule vyčteme ty řádky, kdy je daná formule pravdivá, a těm přiřadíme elementární konjunkci všech výrokových proměnných; v případě, že má v tomto řádku některá z proměnných prisouzenou pravdivostní hodnotu 0, před danou výrokovou proměnnou dáme negátor; všechny získané elementární konjunkce pak seřadíme do formule, v níž je spojíme pomocí disjunkce. Obdobně postupujeme v případě sestavování ÚKNF, ovšem tehdy přiřazujeme elementární disjunkce jen těm řádkům, kdy má celá formule přiřazenu pravdivostní hodnotu nepravda.

Při zápisu ÚDNF (ÚKNF) se uplatňuje notační konvence, podle níž se znak konjunkce (disjunkce) mezi literály elementárních konjunkcí (disjunkcí) vynechává. Dále, negace se vyznačuje čarou nad symbolem výrokové proměnné; což zde z důvodu typografického omezení realizujeme jako podtržení znaku výrokové proměnné.

1)

Sestavte ÚDNF k formuli $p \rightarrow q$.

$p \rightarrow q$	elementární konjunkce		
1	1	1	$p \wedge q$ tedy pq
1	0	0	-
0	1	1	$\neg p \wedge q$ tedy $\underline{p}q$
0	1	0	$\neg p \wedge \neg q$ tedy $\underline{p}\underline{q}$

ÚDNF k dané formuli je tedy $pq \vee \underline{p}q \vee \underline{p}\underline{q}$.

2)

Sestavte ÚKNF k formuli $p \leftrightarrow q$.

$p \leftrightarrow q$	elementární disjunkce		
1	1	1	-
1	0	0	$p \vee \neg q$ tedy $p\underline{q}$
0	0	1	$\neg p \vee q$ tedy $\underline{p}q$
0	1	0	-

ÚKNF k dané formuli je tedy $p\underline{q} \wedge \underline{p}q$.

3)

Sestavte ÚDNF k formuli $(p \rightarrow (q \wedge \neg q)) \rightarrow \neg p$.

$(p \rightarrow (q \wedge \neg q)) \rightarrow \neg p$	elementární konjunkce								
1	0	1	0	0	1	1	0	1	$p \wedge q$ tedy pq
1	0	0	0	1	0	1	0	1	$p \wedge \neg q$ tedy $p\underline{q}$
0	1	1	0	0	1	1	1	0	$\neg p \wedge q$ tedy $\underline{p}q$
0	1	0	0	1	0	1	1	0	$\neg p \wedge \neg q$ tedy $\underline{p}\underline{q}$

ÚDNF k dané formuli je tedy $pq \vee p\bar{q} \vee \bar{p}q \vee \bar{p}\bar{q}$ (mj. k ní nelze sestavit ÚKNF).

9.3 Minimalizace ÚDNF (ÚKNF)

Při minimalizaci ÚDNF se uplatňuje následující tautologie. Nechť l je nějaký literál a A je nějaká formule (pokud literál je tvaru $\neg B$, tak pod $\neg l$ myslíme díky zákonu dvojité negace B , nikoli $\neg\neg B$):

$$((A \wedge l) \vee (A \wedge \neg l)) \leftrightarrow A$$

Pravou stranu této tautologie si můžeme odvodit z levé formule uplatněním zákona distributivity na $(A \vee (l \wedge \neg l))$ a pak uplatněním zákona neutrálnosti kontradikce k disjunkci.

Zde je ještě zkrácený zápis této tautologie uplatněním výše uváděné konvence o vypouštění konjunkce a alternativního označení negace:

$$(A l \vee A \bar{l}) \leftrightarrow A$$

Všimněme si, že redukci (směr implikace doprava), resp. expanzi (směr implikace doleva) lze uplatnit jen tehdy, pokud se podformule tvaru konjunkce liší pouze jedním literálem. Dále upozorňujeme, že uváděný zákon můžeme uplatnit i tehdy, když jsou členy elementárních konjunkcí na jiných stranách. To proto, že můžeme uplatnit komutativitu konjunkce, jakou ukážeme v prostřední formuli: $((A \wedge l) \vee (\bar{l} \wedge A)) \leftrightarrow ((A \wedge l) \vee (A \wedge \bar{l})) \leftrightarrow A$. Speciálním případem tohoto je výskyt literálu jakoby uprostřed podformule A , což je opět řešitelné komutativitou konjunkce, např. $((pqr) \vee (p\bar{q}r)) \leftrightarrow ((prq) \vee (pr\bar{q})) \leftrightarrow pr$. Konečně při minimalizaci ÚKNF se uplatňuje obměna této tautologie, totiž:

$$(A l \wedge A \bar{l}) \leftrightarrow A$$

Jak uvidíme v příkladech níže, naše ÚDNF (ÚKNF) můžeme dále upravovat pomocí zákona idempotence disjunkce (konjunkce), popř. pomocí zákonů o agresivnosti / neutrálnosti tautologie / kontradikce vzhledem k disjunkci / konjunkci.

Minimalizační algoritmus

ÚDNF (ÚKNF) lze značně zjednodušit *Quine-McCluskeyho minimalizačním* (optimalizačním) *algoritmem*. Alternativní metoda využívá tzv. *Karnaughovy mapy*, které zde probírat nebudeme. Quine-McCluskeyho minimalizační algoritmus je mechanizovatelný postup, pomocí něhož lze ÚDNF (ÚKNF) maximálně zjednodušit, aniž by došlo k změně průběhu pravdivostních hodnot, zachovává tedy ekvivalenci.

Níže budeme uplatňovat pouze hlavní část tohoto algoritmu. Pro ilustraci minimalizujeme $pqr \vee \bar{p}qr \vee p\bar{q}\bar{r} \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r}$.

a) Elementární konjunkce dané ÚDNF si očíslováme:

$$\begin{array}{ccccccccc} pqr & \vee & \underline{p}qr & \vee & \underline{p}q\underline{r} & \vee & \underline{p}q\underline{r} & \vee & \underline{p}q\underline{r} \\ 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 \end{array}$$

b) Poté porovnáme elementární konjunkci 1. s 2. a můžeme-li je zkrátit podle tautologie $(A \vee \underline{A}) \leftrightarrow A$, tak výsledek zkrácení přepíšeme do dalšího řádku a nadepíšeme zkrácením čeho vznikl a přidáme pak disjunkci (formule po stranách \leftrightarrow považujeme za uzávorkované):

$$\begin{array}{c} 1-2 \\ \leftrightarrow \quad qr \vee \end{array}$$

Také si zapamatujeme, že elementární konjunkce 1. a 2. byly zkráceny (to můžeme indikovat v řádku, který krátíme, např. přeškrtnutím obou elementárních konjunkcí, níže ovšem uvedeme jiný postup). Poté porovnáme 1. s 3. a pokud je lze zkrátit, zkrátíme je. Ať už 1. s 3. zkrátíme či nikoli, stejně pokračujeme dále a 1. porovnááme s 4. a pokud je lze zkrátit, zkrátíme je. Poté porovnáme 1. s 5. Analogicky se pokoušíme zkrátit 2. s každou ji následující elementární konjunkcí, pak 3. s každou ji následující elementární konjunkcí, nakonec 4. s každou ji následující elementární konjunkcí. Výsledek, kdy se nám podařilo všechny formule krátit – některé byly kráceny vícekrát, například 2. – je:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1-2 & 2-3 & 2-4 & 3-5 & 4-5 \\ \leftrightarrow \quad qr \vee \underline{p}q \vee \underline{p}r \vee \underline{p}r \vee \underline{p}q \end{array}$$

Nyní zkontrolujeme, zda řetězec $1-2 \ 2-3 \ 2-4 \ 3-5 \ 4-5$ obsahuje čísla všech elementárních konjunkcí z předchozího řádku. Pokud některé číslo chybí, příslušnou nezkrácenou elementární konjunkci připojíme do našeho posledního řádku pomocí disjunkce (srov. ukázku níže).

c) Opět si elementární konjunkce očíslovujeme:

$$\begin{array}{ccccccccc} \leftrightarrow \quad qr \vee \underline{p}q \vee \underline{p}r \vee \underline{p}r \vee \underline{p}q \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \end{array}$$

a zkusíme je krátit podobně jako v b). Formulí, kterou se zkrátit nepodařilo, přepíšeme na konec řádku:

$$\begin{array}{c} 2-5 \quad 3-4 \quad 1 \\ \leftrightarrow \quad \underline{p} \vee \underline{p} \vee qr \end{array}$$

d) Nyní můžeme, ale to je již mimo onen algoritmus, nasadit zákon idempotence disjunkce a formulí zkrátit na:

$$\leftrightarrow \quad \underline{p} \vee qr$$

9.4 Příklady – sestavení a minimalizace ÚDNF

Sestavte ÚDNF k dané formuli a poté proveďte její minimalizaci:

1)

$(p \rightarrow (q \wedge \neg q)) \rightarrow p$ elementární konjunkce

1	0	1	0	0	1	1	1	$p \wedge q$	tedy pq
1	0	0	0	1	0	1	1	$p \wedge \neg q$	tedy $p\bar{q}$
0	1	1	0	0	1	0	0	-	
0	1	0	0	1	0	0	0	-	

ÚDNF je $pq \vee p\bar{q}$. Tu minimalizujeme: $pq \vee p\bar{q} \leftrightarrow p$, výsledkem je tedy p .

2)

$((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow q$ elementární konjunkce

1	1	1	1	1	1	1	$p \wedge q$	tedy pq
1	0	0	1	0	0	0	-	
0	1	1	1	1	1	1	$\neg p \wedge q$	tedy $\bar{p}q$
0	1	0	0	0	1	0	$\neg p \wedge \neg q$	tedy $\bar{p}\bar{q}$

ÚDNF je $pq \vee \bar{p}q \vee \bar{p}\bar{q}$. Tuto ÚDNF minimalizujeme: $pq \vee \bar{p}q \vee \bar{p}\bar{q} \leftrightarrow q \vee \bar{p}$.

3)

$(p \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow r$ elementární konjunkce

1	1	1	1	1	1	1	$p \wedge q \wedge r$	tedy pqr
1	1	1	1	1	0	0	-	
1	1	0	1	1	1	1	$p \wedge \neg q \wedge r$	tedy $p\bar{q}r$
1	1	0	1	1	0	0	-	
0	1	1	0	0	1	1	$\neg p \wedge q \wedge r$	tedy $\bar{p}qr$
0	1	1	0	0	0	0	-	
0	1	0	1	0	1	1	$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	tedy $\bar{p}\bar{q}r$
0	1	0	1	0	0	0	-	

ÚDNF je $pqr \vee p\bar{q}r \vee \bar{p}qr \vee \bar{p}\bar{q}r$, kterou minimalizujeme následovně (v zápisu vynecháváme číslování formulí):

$$\begin{aligned}
 & pqr \vee p\bar{q}r \vee \bar{p}qr \vee \bar{p}\bar{q}r \\
 & \quad \quad \quad \begin{matrix} 1-2 & 1-3 & 2-4 & 3-4 \end{matrix} \\
 \Leftrightarrow & pr \vee qr \vee \bar{q}r \vee \bar{p}r \\
 & \quad \quad \quad \begin{matrix} 1-4 & 2-3 \end{matrix} \\
 \Leftrightarrow & r \vee r
 \end{aligned}$$

Po uplatnění zákona idempotence pro disjunkci získáme jen r .

4)

$(p \rightarrow q) \wedge (\neg q \rightarrow r)$ elementární konjunkce

1	1	1	1	0	1	1	1	$p \wedge q \wedge r$	tedy pqr
1	1	1	1	0	1	1	0	$p \wedge q \wedge \neg r$	tedy $pq\bar{r}$
1	0	0	0	1	0	1	1	-	
1	0	0	0	1	0	0	0	-	
0	1	1	1	0	1	1	1	$\neg p \wedge q \wedge r$	tedy $\bar{p}qr$
0	1	1	1	0	1	1	0	$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	tedy $\bar{p}q\bar{r}$
0	1	0	1	1	0	1	1	$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	tedy $\bar{p}\bar{q}r$
0	1	0	0	1	0	0	0	-	

ÚDNF je $pqr \vee pq\bar{r} \vee \bar{p}qr \vee \bar{p}q\bar{r} \vee \bar{p}\bar{q}r$, kterou minimalizujeme následovně:

$$pqr \vee pq\bar{r} \vee \bar{p}qr \vee \bar{p}q\bar{r} \vee \bar{p}\bar{q}r$$

$$\begin{matrix} 1-2 & 1-3 & 2-4 & 3-4 & 3-5 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow pq \vee qr \vee q\bar{r} \vee \bar{p}q \vee \bar{p}r$$

$$\begin{matrix} 1-4 & 2-3 & 5 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow q \vee q \vee \bar{p}r$$

Tedy, po uplatnění zákona idempotence: $q \vee \bar{p}r$.

5)

Sestavte ÚDNF k systému, jehož vstupy a výstupy nabývají hodnoty uvedené v tabulce, a poté proveďte její minimalizaci:

p	q	r	výstup	elementární konjunkce
1	1	1	1	$p \wedge q \wedge r$, tedy pqr
1	1	0	1	$p \wedge q \wedge \neg r$, tedy $pq\bar{r}$
1	0	1	1	$p \wedge \neg q \wedge r$, tedy $p\bar{q}r$
1	0	0	1	$p \wedge \neg q \wedge \neg r$, tedy $p\bar{q}\bar{r}$
0	1	1	1	$\neg p \wedge q \wedge r$, tedy $\bar{p}qr$
0	1	0	0	
0	0	1	1	$\neg p \wedge \neg q \wedge r$, tedy $\bar{p}\bar{q}r$
0	0	0	0	

ÚDNF je $pqr \vee pq\bar{r} \vee p\bar{q}r \vee p\bar{q}\bar{r} \vee \bar{p}qr \vee \bar{p}\bar{q}r$, kterou minimalizujeme:

$$pqr \vee pq\bar{r} \vee p\bar{q}r \vee p\bar{q}\bar{r} \vee \bar{p}qr \vee \bar{p}\bar{q}r$$

$$\Leftrightarrow pq \vee \bar{p}r \vee qr \vee p\bar{r} \vee p\bar{q} \vee \bar{q}r \vee \bar{p}r$$

$$\Leftrightarrow p \vee r \vee r \vee r$$

po uplatnění zákona idempotence pak: $p \vee r$.

6)

Sestavte ÚKNF k systému, jehož vstupy a výstupy nabývají hodnoty uvedené v tabulce, a poté proveďte její minimalizaci podle tautologie-zákona $(A \wedge A) \Leftrightarrow A$:

p	q	r	výstup	elementární disjunkce
1	1	1	1	
1	1	0	1	
1	0	1	1	
1	0	0	1	
0	1	1	0	$\neg p \vee q \vee r$, tedy \underline{pqr}
0	1	0	0	$\neg p \vee q \vee \neg r$, tedy \underline{pqr}
0	0	1	1	
0	0	0	1	

ÚKNF je $\underline{pqr} \wedge \underline{pqr}$, kterou minimalizujeme: $\underline{pqr} \wedge \underline{pqr} \leftrightarrow \underline{pqr}$.

7)

Transformujte formuli $(p \rightarrow q)$ tak, abyste poté mohli sestavit její ÚDNF. Nejprve provedeme ekvivalentní transformaci:

$$\begin{aligned} & (p \rightarrow q) \\ \leftrightarrow & (\neg p \vee q) \quad \text{podle tautologie } (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B) \end{aligned}$$

Opakovaně provádíme opak minimalizace podle tautologie $A \leftrightarrow (A \vee A)$. Uplatňujeme při tom také zákon komutativity, abychom získali co nejpodobnější disjunkty (viz užití $pq \vee pq$ namísto $qp \vee qp$):

$$\begin{aligned} & \neg p \quad \vee \quad q \\ \leftrightarrow & \underline{pq} \quad \vee \quad \underline{pq} \quad \vee \quad pq \quad \vee \quad pq \end{aligned}$$

Podle zákona idempotence nyní vyškrtáme stejné elementární konjunkce:

$$\underline{pq} \quad \vee \quad \underline{pq} \quad \vee \quad pq$$

Všimněme si, že celá tato „deminimalizace“ není řádek po řádku přesným opakem minimalizace.

8)

Transformujte formuli $(p \wedge \neg q) \rightarrow (r \vee q)$ tak, abyste poté mohli sestavit její ÚDNF. Nejprve provedeme ekvivalentní transformace:

$$\begin{aligned} & (p \wedge \neg q) \rightarrow (r \vee q) \\ \leftrightarrow & \neg(p \wedge \neg q) \vee (r \vee q) \quad \text{podle tautologie } (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B) \\ \leftrightarrow & (\neg p \vee \neg \neg q) \vee (r \vee q) \quad \text{podle tautologie } \neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B) \text{ (De Morganův z.)} \\ \leftrightarrow & (\neg p \vee q) \vee (r \vee q) \quad \text{podle tautologie } \neg \neg A \leftrightarrow A \text{ (z. dvojitě negace)} \\ \leftrightarrow & \neg p \vee q \vee r \vee q \quad \text{díky komutativitě } \vee \\ \leftrightarrow & \neg p \vee q \vee r \quad \text{podle tautologie } (A \vee A) \leftrightarrow A \text{ (z. idempotence).} \end{aligned}$$

Poté opakovaně provádíme opak minimalizace podle tautologie $A \leftrightarrow (A \vee A)$:

$$\begin{aligned} & \neg p \quad \vee \quad q \quad \vee \quad r \\ \leftrightarrow & \underline{p}q \quad \vee \quad \underline{p}q \quad \vee \quad pq \quad \vee \quad \underline{p}q \quad \vee \quad pr \quad \vee \quad \underline{p}r \\ \leftrightarrow & \underline{p}qr \vee \underline{p}qr \vee \underline{p}qr \vee \underline{p}qr \vee pqr \vee pqr \vee \underline{p}qr \vee \underline{p}qr \vee pqr \vee pqr \vee \underline{p}qr \vee \underline{p}qr \end{aligned}$$

Podle zákona idempotence vyškrtáme stejné elementární konjunkce:

$$\leftrightarrow \underline{p}qr \vee \underline{p}qr \vee \underline{p}qr \vee \underline{p}qr \vee pqr \vee pqr \vee pqr$$

Jak si lze ověřit sestavením ÚDNF z tabulky, daná formule není tautologií, protože má méně než osm elementárních konjunkcí. Jedinou elementární konjunkcí, která nemá být součástí ÚDNF této formule, je \underline{pqr} , kterou jsme zcela správně neodvodili.

9)

Metoda ekvivalentních úprav formule na ÚDNF:

$\neg(p \rightarrow q)$	
$\leftrightarrow \neg(\neg p \vee q)$	převod \rightarrow na \vee
$\leftrightarrow p \wedge \neg q$	DM, z. $\neg\neg$
$\leftrightarrow (p \wedge (q \vee \neg q)) \wedge \neg q$	neutrálnost tautologie ke \wedge nalevo
$\leftrightarrow (p \wedge (q \vee \neg q)) \wedge (\neg q \wedge (p \vee \neg p))$	neutrálnost tautologie ke \wedge napravo
$\leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg q \wedge (p \vee \neg p))$	distributivita \wedge nalevo
$\leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \vee ((\neg q \wedge p) \vee (\neg q \wedge \neg p))$	distributivita \wedge napravo
$\leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \vee ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$	komutativita \wedge
$\leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \vee (\neg p \wedge \neg q)$	idempotence \vee

Hledanou ÚDNF je tedy $pq \vee p\bar{q} \vee \bar{p}\bar{q}$.