



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0216, OPVK)

Úvod do logiky (VL): 8. Negace výroků

doc. PhDr. Jiří Raclavský, Ph.D.

(raclavsky@phil.muni.cz)

8. Negace výroků

V tomto dalším praktickém okruhu opět využijeme VL k explicitnímu a tedy kontrolovatelnému provedení úkolu. Ten nyní tkví v určení ekvivalentu přímé negace daného výroku. Obecný postup řešení je totiž takový, že výrok V přirozeného jazyka převedeme na odpovídající formuli A ; tuto formuli A zcela mechanicky znegujeme tak, že před ní vložíme negátor \neg , získáme tedy $\neg A$; provedením ekvivalentních transformací převedeme $\neg A$ na jednodušší formuli B ; formuli B pak vyjádříme odpovídajícím českým výrokiem W . Všimněme si, že V a W k sobě nejsou ve vztahu přímé negace jako V a „Není pravda, že V “, ale de facto ve vztahu ekvivalentu negace; stručně však hovoříme o *negaci* (ev. *opaku*) výroku daného.

8.1 Příklady – negace výroků

S pomocí VL určete negaci daného výroku:

1)

Budu se procházet nebo si zazpívám.

Nejprve určíme příslušnou formuli: $p \vee q$.

Poté ji negujeme: $\neg(p \vee q)$.

Na tuto negaci uplatníme De Morganův zákon: $\neg p \wedge \neg q$.

Za proměnné dosadíme dílčí výroky a za spojky jejich jazykové ekvivalenty: „Nebudu se procházet a nezazpívám si“.

2)

Pokud ji miluješ, není co řešit.

Nejprve určíme příslušnou formuli: $p \rightarrow \neg q$.

Negujeme ji: $\neg(p \rightarrow \neg q)$.

Na tuto negaci uplatníme tautologii převádějící negovanou implikaci na konjunkci, jejíž druhý člen je negován: $p \wedge \neg \neg q$. Uplatníme ještě zákon dvojité negace: $p \wedge q$.

Za proměnné dosadíme dílčí výroky a za spojky jejich jazykové ekvivalenty: „Miluješ ji a je co řešit“.

3)

Je jaro a ptáci hnízdí.

Příslušná formule: $p \wedge q$; její negace: $\neg(p \wedge q)$. Uplatníme De Morganův zákon: $\neg p \vee \neg q$. Slovně pak: „Není jaro nebo ptáci nehnízdí“.

4)

Budeme se fotografovat nebo se nebudeme zastavovat.

Příslušná formule: $p \vee \neg q$; její negace: $\neg(p \vee \neg q)$. Uplatníme De Morganův zákon a hned poté zákon dvojité negace: $\neg p \wedge q$. Slovně pak: „Nebudeme se fotografovat a budeme se zastavovat“.

Určete ten jediný výrok z níže uvedených možností, který je negací daného výroku:

5)

Jestliže máš rád operu, chodíš do divadla.

- i) Jestliže nemáš rád operu, nechodíš do divadla.
- ii) Nemáš rád operu a nechodíš do divadla.
- iii) Nemáš rád operu nebo nechodíš do divadla.
- iv) Máš rád operu a nechodíš do divadla.
- v) Chodíš do divadla a máš rád operu.

Danému výroku koresponduje formule: $p \rightarrow q$. Její negací je: $\neg(p \rightarrow q)$. Ekvivalentem je: $p \wedge \neg q$, neboť „negovaná implikace je konjunkce s negací“. Slovně: „Máš rád operu a nechodíš do divadla“, správnou z uvedených možností je tedy iv).

6)

Program je chybný nebo nefunguje počítač.

- i) Jestliže program není chybný, nefunguje počítač.
- ii) Program je chybný a počítač funguje.
- iii) Program není chybný nebo počítač funguje.
- iv) Program není chybný a počítač funguje.
- v) Jestliže je program chybný, počítač funguje.

Příslušná formule: $p \vee \neg q$; její negace: $\neg(p \vee \neg q)$. Aplikujeme De Morganův zákon: $\neg p \wedge \neg \neg q$ a pak zákon dvojité negace: $\neg p \wedge q$. Slovně: „Program není chybný a počítač funguje“, správnou z uvedených možností je tedy možnost iv).

S pomocí VL určete negaci daného výroku:

7)

Je-li logika užitečná, tak je snadná a pochopitelná.

Příslušná formule: $p \rightarrow (q \wedge r)$; její negace: $\neg(p \rightarrow (q \wedge r))$. Ta je ekvivalentní formulí $p \wedge (\neg q \vee \neg r)$ (neboť „negovaná implikace je konjunkce s negací“ a „negovaná konjunkce je disjunkcí, jejímž prvním členem je negace“). Slovně tedy: „Logika je užitečná a tak není snadná nebo není pochopitelná“.

8)

Je-li matematika solidní disciplína, pak je možno dokázat Fermatovu větu nebo jsou matematikové neschopní.

Příslušná formule: $p \rightarrow (q \vee \neg r)$; její negace: $\neg(p \rightarrow (q \vee \neg r))$. Ta je ekvivalentní formuli $p \wedge \neg(q \vee \neg r)$ (neboť „negovaná implikace je konjunkce s negací“), která je zas ekvivalentní formuli $p \wedge (\neg q \wedge \neg \neg r)$ (uplatněním De Morganova zákona), ta zas ekvivalentní formuli $p \wedge (\neg q \wedge r)$ (uplatněním zákona dvojité negace). Slovně pak: „Matematika je solidní disciplína a Fermatovu větu není možno dokázat a matematici jsou schopní“.

8.2 Cvičení – negace výroků

Následující výrok převedte nejprve na formuli VL, tu negujte a převedte na ekvivalentní formuli takovou, abyste mohli formulovat její větné vyjádření, jež je negací daného výroku:

- 1) Nezastavíme se nebo budeme svačit.
- 2) Jestliže mám knihu, čtu si.
- 3) Píšu propiskou nebo nepoužívám fixu.
- 4) Jestliže prší, není suchá zahrada.
- 5) Moderní obrazy jsou sice umělecké, ale nejsou líbivé.
- 6) Zvítězí-li ve volbách obě pravicové strany, utvoří koalici a sestaví vládu.
- 7) Je-li pátek, tak není volno, ale je cvičení z logiky.
- 8) Bude-li pěkné počasí a nepokazí se nám auto, pojedeme na pláž a budeme se koupat.
- 9) Jestliže se budu pilně učit, tak uspěji u zkoušky nebo budu mít smůlu.
- 10) Zkoušku udělám, pokud se budu pilně učit nebo budu mít štěstí.

Určete negaci výroku, jak je uvedeno v zadání:

- 11) Mějme výrok: „Budou-li mít Petr a Jana vyznamenání, dostanou lyže a pojedou na hory“. Ukázalo se, že tento výrok neplatí. Co se vlastně stalo?
- 12) Mějme výrok: „Je-li vedro nebo mráz, nechodím po venku, ale jdu do knihovny nebo zůstávám doma“. Co se děje, jestliže tento výrok neplatí?
- 13)

Dva závodníci nastoupili k závodu. Předpověď trenéra zněla: „Stane se to, že A zvítězí nebo B zvítězí, nebo se stane to, že A nedokončí závod nebo B nebude druhý“. Předpověď se nesplnila. Jak dopadl závod, kdo vyhrál?

14)

Týž závod pro dva závodníky. Trenér tentokrát předpověděl: „A bude druhý a B zvítězí nebo A zvítězí a B nedokončí závod“. Předpověď se opět nesplnila. Jak dopadl závod?

8.2 Řešení – negace výroků

1)

Příslušná formule: $\neg p \vee q$; její negace: $\neg(\neg p \vee q)$. Formule ekvivalentní negované formuli: $\neg\neg p \wedge \neg q$, pak $p \wedge \neg q$; ve slovním vyjádření: „Zastavíme se a nebudeme svačit“.

2)

Příslušná formule: $p \rightarrow q$; její negace: $\neg(p \rightarrow q)$. Formule ekvivalentní negované formuli: $p \wedge \neg q$; ve slovním vyjádření: „Mám knihu a nečtu si“.

3)

Příslušná formule: $p \vee \neg q$; její negace: $\neg(p \vee \neg q)$. Formule ekvivalentní negované formuli: $\neg p \wedge \neg\neg q$, pak $\neg p \wedge q$; ve slovním vyjádření: „Nepíšu propiskou a používám fixu“.

4)

Příslušná formule: $p \rightarrow \neg q$; její negace: $\neg(p \rightarrow \neg q)$. Formule ekvivalentní negované formuli: $p \wedge \neg\neg q$, pak $p \wedge q$; ve slovním vyjádření: „Prší a je suchá zahrada“.

5)

Příslušná formule: $p \wedge \neg q$; její negace: $\neg(p \wedge \neg q)$. Formule ekvivalentní negované formuli: $\neg p \vee \neg\neg q$, pak $\neg p \vee q$; ve slovním vyjádření: „Moderní obrazy nejsou umělecké nebo jsou líbivé“.

6)

Příslušná formule: $p \rightarrow (q \wedge r)$; ekvivalence k její negaci: $\neg(p \rightarrow (q \wedge r)) \leftrightarrow (p \wedge \neg(q \wedge r)) \leftrightarrow (p \wedge (\neg q \vee \neg r))$. Slovně tedy „Obě pravicové strany zvítězily ve volbách, avšak neutvořily koalici nebo nesestavily vládu“.

7)

Příslušná formule: $p \rightarrow (\neg q \wedge r)$; ekvivalence k její negaci: $\neg(p \rightarrow (\neg q \wedge r)) \leftrightarrow (p \wedge \neg(\neg q \wedge r)) \leftrightarrow (p \wedge (\neg\neg q \vee \neg r)) \leftrightarrow (p \wedge (q \vee \neg r))$. Slovně tedy „Je pátek, a tak je volno nebo není cvičení z logiky“.

8)

Příslušná formule: $(p \wedge \neg q) \rightarrow (r \wedge s)$; ekvivalence k její negaci: $\neg((p \wedge \neg q) \rightarrow (r \wedge s)) \leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \wedge \neg(r \wedge s)) \leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \wedge (\neg r \vee \neg s))$. Slovně tedy „Bude pěkné počasí, nepokazí se nám auto a nepojedeme na pláž a nebudeme se koupat“. Pokud uděláme ještě jednu transformaci: $((p \wedge \neg q) \wedge (r \rightarrow \neg s))$, tak „Bude pěkné počasí, nepokazí se nám auto a jestliže pojedeme na pláž, tak se nebudeme koupat“.

9)

Příslušná formule: $p \rightarrow (q \vee r)$; ekvivalence k její negaci: $\neg(p \rightarrow (q \vee r)) \leftrightarrow (p \wedge \neg(q \vee r)) \leftrightarrow (p \wedge (\neg q \wedge \neg r))$. Slovně tedy „Budu se pilně učit a neuspěji u zkoušky a nebudu mít smůlu“.

10)

Příslušná formule: $p \leftarrow (q \vee r)$, tj. $(q \vee r) \rightarrow p$; ekvivalence k její negaci: $\neg((q \vee r) \rightarrow p) \leftrightarrow ((q \vee r) \wedge \neg p)$. Slovně tedy „Budu se pilně učit nebo budu mít štěstí a zkoušku neudělám“.

11)

Daný výrok zapíšeme formulí $(p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s)$. Poté provedeme její negaci a převedeme ji pomocí ekvivalentních transformací:

$$\begin{aligned} & \neg((p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s)) \\ \leftrightarrow & [(p \wedge q) \wedge \neg(r \wedge s)] && \text{převod } \rightarrow \text{ na } \wedge \\ \leftrightarrow & [(p \wedge q) \wedge (\neg r \vee \neg s)] && \text{DM} \end{aligned}$$

Stalo se toto: Petr a Jana dostali vyznamenání, avšak nedostali lyže nebo nejeli na hory.

12)

Daný výrok zapíšeme formulí $(p \vee q) \rightarrow (\neg r \wedge (s \vee t))$. Poté provedeme její negaci a převedeme ji pomocí ekvivalentních transformací:

$$\begin{aligned} & \neg((p \vee q) \rightarrow (\neg r \wedge (s \vee t))) \\ \leftrightarrow & [(p \vee q) \wedge \neg(\neg r \wedge (s \vee t))] && \text{převod } \rightarrow \text{ na } \wedge \\ \leftrightarrow & [(p \vee q) \wedge (\neg \neg r \vee \neg(s \vee t))] && \text{DM} \\ \leftrightarrow & [(p \vee q) \wedge (r \vee \neg(s \vee t))] && \text{z. } \neg \neg \\ \leftrightarrow & [(p \vee q) \wedge (r \vee (\neg s \wedge \neg t))] && \text{DM} \end{aligned}$$

Děje se toto: je vedro nebo mráz a zároveň chodím po venku nebo nejdu do knihovny a nezůstávám doma.

13)

Daný výrok zapíšeme formulí $((p \vee \neg q) \vee (\neg r \vee \neg s))$. Provedeme její negaci a převedeme ji pomocí ekvivalentních transformací:

$$\begin{aligned} & \neg((p \vee q) \vee (\neg r \vee \neg s)) \\ \leftrightarrow & [\neg(p \vee q) \wedge \neg(\neg r \vee \neg s)] && \text{DM} \\ \leftrightarrow & [(\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg(\neg r \vee \neg s)] && \text{DM} \\ \leftrightarrow & [(\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg(\neg r \vee \neg s)] && \text{DM} \\ \leftrightarrow & [(\neg p \wedge \neg q) \wedge (\neg \neg r \wedge \neg \neg s)] && \text{DM} \\ \leftrightarrow & [(\neg p \wedge \neg q) \wedge (r \wedge s)] && \text{z. } \neg \neg \end{aligned}$$

Tedy: „A neztvítězil a B nebyl druhý a zároveň A dokončil závod a B ztvítězil“. Protože celý výrok má být pravdivý, tak všechny členy konjunkcí musí být pravdivé. Takže ztvítězil B (nebyl totiž druhý), A sice závod dokončil, ale neztvítězil.

14)

Daný výrok zapíšeme formulí $(p \wedge q) \vee (r \wedge \neg s)$. Poté provedeme její negaci a převedeme ji pomocí ekvivalentních transformací:

$$\begin{aligned} & \neg((p \wedge q) \vee (r \wedge \neg s)) \\ \leftrightarrow & [\neg(p \wedge q) \wedge \neg(r \wedge \neg s)] && \text{DM} \\ \leftrightarrow & [(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg(r \wedge \neg s)] && \text{DM} \\ \leftrightarrow & [(\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee \neg \neg s)] && \text{DM} \\ \leftrightarrow & [(\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee s)] && \text{z. } \neg \neg \end{aligned}$$

Tedy: „A nebyl druhý nebo B neztvítězil, a zároveň A neztvítězil nebo B dokončil závod“. Konjunkce je pravdivá tehdy, když jsou oba její členy pravdivé. Nyní je třeba zjistit, který

z členů disjunkcí je pravdivý; u první disjunkce předpokládejme, že je to levý člen. Tedy to, že A nebyl druhý je pravda (= A zvítězil); následně však nemůže být pravda, že nezvítězil (levý člen druhé disjunkce), takže musí být pravda (druhý člen druhé disjunkce), že B dokončil závod; to však není v rozporu s možnou pravdivostí druhého členu první disjunkce, totiž že B nezvítězil. Zvítězil tedy A.