



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0216, OPVK)

Úvod do logiky (VL): 7. Ekvivalentní transformace

doc. PhDr. Jiří Raclavský, Ph.D.

(raclavsky@phil.muni.cz)

7. Ekvivalentní transformace

Tautologie tvaru ekvivalence nám ukazují dvojice formulí, které jsou ekvivalentní. Například netautologická a nekondiktická formule $\neg(p \wedge q)$ je, jak ukazuje De Morganův zákon, ekvivalentní netautologické a nekondiktické formuli $(\neg p \vee \neg q)$. De Morganův zákon tak můžeme použít k transformaci, 'přepisu' jedné formule na druhou. Podobně u jiných případů. Řetězec transformací můžeme pokládat za důkaz koncové formule z kterékoli z předcházejících formulí. Z jiného úhlu pohledu: ekvivalence ukazují vyplývání oběma směry.

Nyní si podrobně okomentujeme jeden vzorový příklad procvičující ekvivalentní transformace, přičemž zadání úkolu zní třeba následovně: Transformujte formuli $\neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg r \wedge s))$ tak, aby se negátory (tj. znaky negace) vyskytovaly nanejvýše před atomickými formulami (tj. výrokovými proměnnými). Při řešení budeme soustavně uplatňovat De Morganovy zákony a zákon dvojí negace.

Naši formuli je tedy:

$$\neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg r \wedge s))$$

V prvním kroku se zbavíme vnějšího negátoru tím, že uplatníme De Morganův zákon pro převod konjunkce na disjunkci $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$, přičemž za podformuli A budeme považovat podformuli $(\neg p \vee q)$ a za podformuli B budeme považovat podformuli $(\neg r \wedge s)$. Pro orientaci je dobré si tyto podformule $(\neg p \vee q)$ a $(\neg r \wedge s)$ například podtrhnout. Správným výsledkem aplikace tohoto postupu je:

$$\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg r \wedge s)$$

Právě zde adepti logiky velmi často chybují. Typickou chybou je, že si neohlídají, že ve výsledné formuli má být např. formule A , tj. $(\neg p \vee q)$, negována; také zapomínají zaměnit operátor $\vee$ za $\wedge$. Abychom takovýmto chybám předcházeli, pomůže si nejprve vyznačit matici výsledné formule, totiž $\neg \dots \vee \neg \dots$, a teprve pak opisovat formule A a B . Další typická chyba je produktem netrpělivosti: adept logiky se totiž pokouší formuli A (či B) nejen opsat z formule vstupní, ale zároveň provést její další úpravu; takže zatímco správným výsledkem by mělo být např. $(p \wedge \neg q) \vee \neg(\neg r \wedge s)$, kvůli chybě je to např. $(\neg p \vee \neg q) \vee \neg(\neg r \wedge s)$. Takovéto chyby lze předcházet pečlivostí a snahou o postupné zvládání úkolů, kdy máme jejich řešení zcela pod vědomou kontrolou. Postupné rozepisování kroků má navíc tu výhodu, že v něm lze snáze provést kontrolu případných chyb.

Naším druhým krokem bude, že se zbavíme negace před závorkou třeba v pravé části formule. Opět uplatníme De Morganův zákon (v téže variantě), přičemž nyní za podformuli A budeme považovat podformuli $\neg r$ a za podformuli B budeme považovat podformuli s :

$$\neg(\neg p \vee q) \vee (\neg \neg r \vee \neg s)$$

V pravé části formule uplatníme zákon dvojité negace, tj. $\neg\neg A \leftrightarrow A$, přičemž za A uvažujeme podformuli r :

$$\neg(\neg p \vee q) \vee (r \vee \neg s)$$

Nášim dalším krokem – ten však mohl předcházet krok předchozí – bude, že se zbavíme negace před závorkou nalevo a to tak, že uplatníme De Morganův zákon pro převod disjunkce na konjunkci $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$, přičemž za podformuli A budeme teď považovat podformuli $\neg p$ a za podformuli B budeme považovat podformuli q :

$$(\neg\neg p \wedge \neg q) \vee (r \vee \neg s)$$

V levé části formule uplatníme zákon dvojité negace:

$$(p \wedge \neg q) \vee (r \vee \neg s)$$

Nyní jsme dosáhli cíle, neboť tato formule je nejen ekvivalentní formuli vstupní, ale neobsahuje negátor na jiném místě než před atomickou formulí.

Ekvivalentní transformace využíváme rovněž při řešení úloh dotazujících se na ekvivalent daného výroku. Například máme formulovat co nejjednodušší výrok, jenž je ekvivalentní výroku:

Jestliže mám dalekohled, pozoruji ptactvo.

Tomuto výroku je sice ekvivalentní mnoho výroků, nicméně za nejjednodušší ekvivalent budeme mít „Nemám dalekohled nebo pozoruji ptactvo“. To je patrné z toho, že formuli $p \rightarrow q$, jež je formalizací daného výroku, je ekvivalentní $\neg p \vee q$. Slovním korelátem formule $\neg p \vee q$ je „Nemám dalekohled nebo pozoruji ptactvo“.

Jiným cvičením na ekvivalentní výroky je výběr z možností, kdy právě jeden z nabízených výroků je ekvivalentní danému výroku:

Na výlet pojedeme vlakem nebo pojedeme autobusem.

- i) Jestliže na výlet pojedeme autobusem, nepojedeme vlakem.
- ii) Na výlet nepojedeme vlakem nebo pojedeme autobusem.
- iii) Na výlet pojedeme vlakem a pojedeme autobusem.
- iv) Jestliže na výlet nepojedeme vlakem, pojedeme autobusem.
- v) Na výlet pojedeme vlakem a nepojedeme autobusem.

Při řešení využíváme VL tak, že nejprve formalizujeme daný výrok: $p \vee q$. Poté provedeme ekvivalentní transformaci (transformace) této formule na nějakou jednoduchou ekvivalentní formuli, např. $\neg p \rightarrow q$ či $q \vee p$ nebo $\neg q \rightarrow p$; tuto formuli (formule) vyjádříme slovně: „Jestliže na

výlet nepojedeme vlakem, tak pojedeme autobusem“, atd. Tuto slovní podobu pak hledáme mezi nabízenými možnostmi; v našem případě je správnou odpovědí iv).

7.1 Příklady – ekvivalentní transformace formulí

1)

Převeďte formuli $\neg((\neg p \vee q) \vee (q \wedge (r \vee \neg p)))$ tak, aby se znaky negace, negátory vyskytovaly nanejvýše před výrokovými proměnnými. Opakovaně budeme uplatňovat De Morganovy zákony (DM) a zákon dvojité negace (z. $\neg\neg$):

$$\begin{aligned}
 & \neg((\neg p \vee q) \vee (q \wedge (r \vee \neg p))) \\
 \Leftrightarrow & [\neg(\neg p \vee q) \wedge \neg(q \wedge (r \vee \neg p))] && \text{DM na celou formuli} \\
 \Leftrightarrow & [(\neg\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg(q \wedge (r \vee \neg p))] && \text{DM nalevo} \\
 \Leftrightarrow & [(p \wedge \neg q) \wedge \neg(q \wedge (r \vee \neg p))] && \text{z. } \neg\neg \text{ nalevo} \\
 \Leftrightarrow & [(p \wedge \neg q) \wedge (\neg q \vee \neg(r \vee \neg p))] && \text{DM napravo} \\
 \Leftrightarrow & [(p \wedge \neg q) \wedge (\neg q \vee (\neg r \wedge \neg\neg p))] && \text{DM napravo} \\
 \Leftrightarrow & [(p \wedge \neg q) \wedge (\neg q \vee (\neg r \wedge p))] && \text{z. } \neg\neg \text{ napravo}
 \end{aligned}$$

2)

Převeďte formuli $\neg((p \wedge \neg q) \wedge (\neg q \vee (\neg r \wedge p)))$ tak, aby se negátory vyskytovaly nanejvýše před výrokovými proměnnými:

$$\begin{aligned}
 & \neg((p \wedge \neg q) \wedge (\neg q \vee (\neg r \wedge p))) \\
 \Leftrightarrow & [\neg(p \wedge \neg q) \vee \neg(\neg q \vee (\neg r \wedge p))] && \text{DM na celou formuli} \\
 \Leftrightarrow & [(\neg p \vee \neg\neg q) \vee \neg(\neg q \vee (\neg r \wedge p))] && \text{DM nalevo} \\
 \Leftrightarrow & [(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee (\neg r \wedge p))] && \text{z. } \neg\neg \text{ nalevo} \\
 \Leftrightarrow & [(\neg p \vee q) \vee (\neg\neg q \wedge \neg(\neg r \wedge p))] && \text{DM napravo} \\
 \Leftrightarrow & [(\neg p \vee q) \vee (q \wedge \neg(\neg r \wedge p))] && \text{z. } \neg\neg \text{ napravo} \\
 \Leftrightarrow & [(\neg p \vee q) \vee (q \wedge (\neg\neg r \vee \neg p))] && \text{DM napravo} \\
 \Leftrightarrow & [(\neg p \vee q) \vee (q \wedge (r \vee \neg p))] && \text{z. } \neg\neg \text{ napravo}
 \end{aligned}$$

3)

Převeďte formuli $\neg((p \wedge (\neg q \vee r)) \wedge (\neg q \vee r))$ tak, aby se negátory vyskytovaly nanejvýše před výrokovými proměnnými:

$$\begin{aligned}
 & \neg((p \wedge (\neg q \vee r)) \wedge (\neg q \vee r)) \\
 \Leftrightarrow & [\neg(p \wedge (\neg q \vee r)) \vee \neg(\neg q \vee r)] && \text{DM na celou formuli} \\
 \Leftrightarrow & [(\neg p \vee \neg(\neg q \vee r)) \vee \neg(\neg q \vee r)] && \text{DM nalevo} \\
 \Leftrightarrow & [(\neg p \vee (\neg\neg q \wedge \neg r)) \vee \neg(\neg q \vee r)] && \text{DM nalevo} \\
 \Leftrightarrow & [(\neg p \vee (q \wedge \neg r)) \vee \neg(\neg q \vee r)] && \text{z. } \neg\neg \text{ nalevo} \\
 \Leftrightarrow & [(\neg p \vee (q \wedge \neg r)) \vee (\neg\neg q \wedge \neg r)] && \text{DM napravo}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leftrightarrow [(\neg p \vee (q \wedge \neg r)) \vee (q \wedge \neg r)] \\ &\leftrightarrow [\neg p \vee (q \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r)] \\ &\leftrightarrow [\neg p \vee (q \wedge \neg r)] \end{aligned}$$

z. $\neg\neg$ napravo
eliminace nadbytečných závorek
zákon idempotence $\vee$

4)

Převeďte formuli $\neg\neg(p \wedge \neg q) \vee \neg(\neg p \wedge q)$ tak, aby se v ní vyskytovaly jen znaky implikace. Jeden z možných postupů:

$$\begin{aligned} &\neg\neg(p \wedge \neg q) \vee \neg(\neg p \wedge q) \\ &\leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \vee \neg(\neg p \wedge q)] \\ &\leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \vee (\neg\neg p \vee \neg q)] \\ &\leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \vee (p \vee \neg q)] \\ &\leftrightarrow [\neg(p \rightarrow \neg\neg q) \vee (p \vee \neg q)] \\ &\leftrightarrow [\neg(p \rightarrow q) \vee (p \vee \neg q)] \\ &\leftrightarrow [\neg(p \rightarrow q) \vee (\neg p \rightarrow \neg q)] \\ &\leftrightarrow [\neg\neg(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)] \\ &\leftrightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)] \\ &\leftrightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)] \end{aligned}$$

z. $\neg\neg$ nalevo
DM napravo
z. $\neg\neg$ napravo
převod $\wedge$ na $\rightarrow$ nalevo
z. $\neg\neg$ nalevo
převod $\vee$ na $\rightarrow$ napravo
převod $\vee$ na $\wedge$ na celou formuli
z. $\neg\neg$ nalevo
transpozice $\rightarrow$ napravo