INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0216, OPVK)

Úvod do logiky (VL): 6. Vybrané tautologie

doc. PhDr. Jiří Raclavský, Ph.D.

(raclavsky@phil.muni.cz)

6. Vybrané tautologie

Tautologie jsou alternativně zvány *logické pravdy* či *logicky platné formule*. O některých výlučných z nich, např. zákonu sporu, se hovoří též jako o *logických zákonech*. Logické pravdy jsou to proto, že se liší od obyčejných, faktuálních (empirických) pravd. Logicky platné proto, že platí nikoli kvůli momentálnímu stavu světa, ale takříkajíc kvůli logice. Logické zákony proto, že to jsou prostě ‚zákony myšlení'. Jak si totiž povšimneme i níže, tyto logické zákony lze převést na odvozovací pravidla, což ukazuje význam tautologií. Tautologie tvaru ekvivalence odpovídají obousměrným odvozením (tj. vyplýváním) jedné formule z druhé; tautologie tvaru implikace zas odpovídají odvozením jedné formule z druhé ve směru šipky. Tautologie jsou tedy jakýmisi úsudky s prázdným počtem předpokladů – jsou to tvrzení, která platí nepodmíněně, neodvisle od podpůrných předpokladů.

Tautologie tvaru ekvivalence mají tu vlastnost, že formule po stranách $\leftrightarrow$ mají shodný průběh pravdivostních podmínek. Dobře je to vidět například na $p \leftrightarrow \neg\neg p$. Tautologie tvaru implikace mají specifickou obdobu této vlastnosti: formule napravo od $\rightarrow$, tedy konsekvent, má hodnotu 1 při všech těch ohodnoceních (valuacích) výrokových proměnných, při nichž má hodnotu 1 formule nalevo od $\rightarrow$, tedy antecedent; v případě hodnoty 1 u konsekventu nezáleží, zda antecedent má při tomtéž ohodnocení hodnotu 1 nebo 0. Srov. např. $(p \wedge q) \rightarrow p$.

Následující seznam vybraných tautologií ukazuje konkrétní formule s proměnnými p a q (atd.), ač by namísto nich mohly být užity jiné proměnné. Nejen to, namísto p a q by mohly být uplatněny libovolné formule, schematicky tedy A, B atd. Takovéto zobecnění formulí z níže uvedeného seznamu však ponecháváme na čtenáři.

Tautologií je nekonečně mnoho, což plyne například z právě uvedené úvahy o nahrazování proměnných jinými proměnnými. Námi uváděný seznam je tedy výběrem a to výběrem jen těch nejčastěji diskutovaných tautologií.

Náš seznam vybraných tautologií je pro lepší chápání organizován do několika skupin. Ve skupině A) jsou některé velmi známé tautologie jako zákon sporu – „není pravda, že je pravdivé p i negace p" (kdyby platilo „p a zároveň negace p", byl by to spor; negací sporu je tautologie), zákon vyloučeného třetího – „buďto p anebo negace p" (ale už takříkajíc nic třetího; lat. tertium non datur), či zákon dvojí negace – „p je totéž jako negace negace p". Adepti logiky si zákon sporu a zákon vyloučeného třetího často pletou, někdy i s jinými zákony, čehož je třeba se vyvarovat.

Ve skupině B) jsou vlastně transformační tautologie, ukazují totiž některé vzájemné převody výrokových spojek. Nejznámější je De Morganův zákon, k němuž byla vytvořena populární říkanka „negovaná disjunkce je konjunkcí negací" a v obdobě pak „negovaná konjunkce je disjunkcí negací". Zajímavé je, že jde o jakési dvě obdoby téhož. Nechť si čtenář dobře všimne, že celá formule (tj. De Morganův zákon) obsahuje tři negace na třech různých místech, přičemž ty negace mohou být přesunuty na druhou stranu ‚rovnice', srov. např. $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ a $(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$ (vnější negace přesunuta zleva napravo od $\leftrightarrow$; přesouvání negace na druhou stranu $\leftrightarrow$ funguje i u jiných zákonů).

Skupina zákonů C) shrnuje některé algebraické vlastnosti výrokových spojek.

Ve skupině D) jsou další v klasické logice známé tautologie. Některé z nich (zákon Dunse Scota – „ze sporu plyne cokoliv“, zákon redukce ad absurdum) mají svou pregnantní obdobu v odvozovacích pravidlech.

Skupina E) ukazuje zajímavá spojení tautologické nebo kontradiktorické formule s běžnou formulí. Například spojíme-li p s nějakou tautologií pomoci konjunkce, výsledná formule má týž průběh pravdivostních hodnot jako tato formule; spojíme-li však p s nějakou tautologií disjunkcí, výsledná formule má tytéž pravdivostní hodnoty jako tautologie. Přidány jsou někdy uváděné ‚definice‘ logických konstant $\top$ a $\bot$ pomocí zákona vyloučeného třetího a sporu (nikoli zákona sporu), což ale může být činěno pomocí libovolné tautologie a kontradikce.

Ve skupině F) jsou některé odvozovací zákony, které jsou uvedeny i v kalkulech přirozené dedukce (srov. kap. 14.); některé z nich jsou coby jeden směr implikace obsaženy v již uvedených tautologiích tvaru ekvivalence.

Desítka vůbec nejdůležitějších tautologií je indikována pomocí *.

A)

$p \leftrightarrow \neg\neg p$	*zákon dvojité negace*	*
$\neg(p \wedge \neg p)$	*zákon sporu*	*
$p \vee \neg p$	*zákon vyloučeného třetího*	*
$p \rightarrow p$	*zákon totožnosti*	
$p \leftrightarrow (p \wedge p)$	*zákon idempotence konjunkce*	
$p \leftrightarrow (p \vee p)$	*zákon idempotence disjunkce*	

B)

$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$	*De Morganův zákon* (DM) „negovaná konjunkce je disjunkcí negací“	*
$(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$		
$(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$		
$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$	*De Morganův zákon* (DM) „negovaná disjunkce je konjunkcí negací“	*
$(p \vee q) \leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$		
$(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \rightarrow q)$		
$\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$	*převod implikace na konjunkci* „negovaná implikace je konjunkce s negací“	*
$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$	*převod implikace na disjunkci*	*
$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$	*transpozice* (konverze) *implikace*	*
$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$	*rozklad ekvivalence na implikace* „ekvivalence je obousměrná implikace“	*

	$(p\leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p\rightarrow q)\wedge(\neg p\rightarrow\neg q))$		
	$(p\leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q))$		
	$(p\leftrightarrow q) \leftrightarrow ((\neg p\vee q)\wedge(p\vee\neg q))$		
C)			
	$(p\wedge q) \leftrightarrow (q\wedge p)$	*komutativita*	
	$(p\vee q) \leftrightarrow (q\vee p)$		
	$(p\leftrightarrow q) \leftrightarrow (q\leftrightarrow p)$		
	$(p\wedge(q\wedge r)) \leftrightarrow ((p\wedge q)\wedge r)$	*asociativita*	
	$(p\vee(q\vee r)) \leftrightarrow ((p\vee q)\vee r)$		
	$(p\leftrightarrow(q\leftrightarrow r)) \leftrightarrow((p\leftrightarrow q)\leftrightarrow r)$		
	$(p\wedge(q\vee r)) \leftrightarrow ((p\wedge q)\vee(p\wedge r))$	*distributivita*	
	$(p\vee(q\wedge r)) \leftrightarrow ((p\vee q)\wedge(p\vee r))$		
	$(p\rightarrow q) \rightarrow ((q\rightarrow r)\rightarrow(p\rightarrow r))$	*tranzitivita*	
D)			
	$p\rightarrow(q\rightarrow p)$	*zákon simplifikace*	*
	$(p\wedge\neg p)\rightarrow q$	*zákon Dunse Scota („ex falso quodlibet“)*	*
	$((p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow\neg q)) \rightarrow \neg p$	*zákon redukce ad absurdum*	
	$(p\rightarrow q) \rightarrow ((q\rightarrow r)\rightarrow(p\rightarrow r))$	*hypotetický sylogismus*	
	$(p\rightarrow(q\rightarrow r)) \leftrightarrow ((p\wedge q)\rightarrow r)$	*zákon slučování premis*	
	$(p\rightarrow(q\rightarrow r)) \rightarrow (q\rightarrow(p\rightarrow r))$	*zákon záměny premis*	
E) (kde T je nějaká tautologie a K je nějaká kontradikce)			
	$(p\wedge \mathrm{T}) \leftrightarrow p$	*neutrálnost tautologie ke konjunkci*	
	$(p\wedge \mathrm{K}) \leftrightarrow \mathrm{K}$	*agresivnost kontradikce ke konjunkci*	
	$(p\vee \mathrm{T}) \leftrightarrow \mathrm{T}$	*agresivnost tautologie k disjunkci*	
	$(p\vee \mathrm{K}) \leftrightarrow p$	*neutrálnost kontradikce k disjunkci*	
	$(p\wedge(p\vee q)) \leftrightarrow p$	*zákon absorpce*	
	$(p\vee(p\wedge q)) \leftrightarrow p$	*zákon absorpce*	
	$\top \leftrightarrow (p\vee\neg p)$		
	$\bot \leftrightarrow (p\wedge\neg p)$		
F)			
	$p \rightarrow \neg\neg p$	*zavedení dvojité negace*	
	$\neg\neg p \rightarrow p$	*eliminace dvojité negace*	
	$(p\wedge q) \rightarrow p$	*eliminace konjunkce*	
	$(p\wedge q) \rightarrow q$	*eliminace konjunkce*	
	$p \rightarrow (p\vee q)$	*zavedení disjunkce*	
	$q \rightarrow (p\vee q)$	*zavedení disjunkce*	
	$(p\wedge(p\vee q)) \leftrightarrow p$	*zákon absorpce*	
	$(p\vee(p\wedge q)) \leftrightarrow p$	*zákon absorpce*	