evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0216, OPVK)

Úvod do logiky (VL): 4. Zjištění průběhu pravdivostních hodnot formule tabulkovou metodou

doc. PhDr. Jiří Raclavský, Ph.D.

(raclavsky@phil.muni.cz)

4. Zjištění průběhu pravdivostních hodnot formule tabulkovou metodou

Nyní se naučíme zjišťovat, které pravdivostní hodnoty daná formule nabývá při kterých pravdivostních ohodnoceních výrokových proměnných, budeme tedy zjišťovat *průběh pravdivostních hodnot* dané formule. Užijeme k tomu *tabulkovou metodu*. Postup bude takový, že v přehledné tabulce jednotlivým výrokovým proměnným přiřadíme všechna možná pravdivostní ohodnocení a při tom vyhodnotíme vztahy mezi (pod)formulemi podle tabulek příslušných výrokových funkcí (při tomto tedy realizujeme rekurzivní algoritmus).

Abychom vystihli všechny možné valuace, a následně pak všechny možné hodnoty, které může celá formule při těchto valuacích nabývat, musíme vypsat všechny možné kombinace rozložení pravdivostních hodnot. Nejprve proto spočítáme všechny výrokové spojky, které jsou ve formuli užity, jejich počet je n. Poté připravíme 2^n řádků. Pod první výrokovou proměnnou, což je řekněme p, vypíšeme do sloupce 2^{n-1} jedniček, pod ně pak nuly; tento sloupec jedniček a nul přepíšeme pod všechny další výskyty proměnné p. Pod druhou proměnnou, q, vypíšeme do sloupce polovinu jedniček, než kolik jsme jich udělili proměnné p, tedy $2^{n-1}/2$, poté vypíšeme právě tolik nul a takovouto sekvenci jedniček a nul opakujeme až do posledního řádku; tento sloupec jedniček a nul přepíšeme pod všechny další výskyty proměnné q. Pokračujeme stejným způsobem pro všechny proměnné, přičemž ve sloupci pod poslední proměnnou se budou střídavě opakovat jedničky a nuly.

Nyní podle definic pravdivostních funkcí a v souladu s Principem kompozicionality vyhodnotíme všechny (pod)formule, jejichž vlastními podformulemi jsou atomické formule – vyhodnotíme tedy formule tvaru $\neg A$ a $A*B$, kde „*“ je některá námi používaná binární výroková spojka; jedničky a nuly píšeme zásadně pod symbol výrokové proměnné. Poté vyhodnocujeme všechny další podformule, jak jsou vyznačeny závorkami. Poslední zjištěný sloupec hodnot ukazuje hodnoty, které formule nabývá při jednotlivých pravdivostních ohodnoceních proměnných.

Ukážeme si dva užívané postupy pro vyhodnocení formule $(p \vee q) \rightarrow \neg q$. Pro snadnou rekonstrukci postupu vyhodnocování budeme v příkladech ve spodním řádku vyznačovat pořadí kroků (na pořadí kroků značených *n*.a, *n*.b atd., kde *n* je nějaké číslo, nezáleží; krok 1.*i*, kde *i* je nějaké písmeno, je ohodnocením výrokových proměnných). Výsledný sloupec vyznačujeme kurzívou, pochopitelně lze použít i jiné vyznačení.

(p	$\vee$	q)	$\rightarrow$	$\neg$	q
1	1	1	*0*	0	1
1	1	0	*1*	1	0
0	1	1	*0*	0	1
0	0	0	*1*	1	0
1.a)	3.)	1.b)	4.)	2.)	1.c)

Po určení možných pravdivostních hodnot v 1.*i* jsme sice provedli krok 2.), ale to jen proto, že byl o málo jednodušší než 3.); na pořadí kroků 2. a 3. zde totiž příliš nezáleží.

(Ještě poznámka: nenechme se splést tím, že pod antecedentem, jmenovitě pod znakem implikace, jsou jiné hodnoty, než jak je tomu v tabulce definující implikaci; z této definiční tabulky vybíráme ty řádky, které se nám hodí, např. druhý řádek, kdy na argumentu $\langle 1,0 \rangle$ dává implikace hodnotu 0, zužitkujeme v případě vyhodnocování naší formule v prvním a třetím řádku.)

Pro zvýšení rychlosti vpisování hodnot a pro lepší orientaci se v praxi někdy užívá postup, kdy vyhledáme nejdříve to ohodnocení dílčí podformule, které je pro danou výrokovou spojku výjimečné, načež do zbylých řádků pak vepíšeme hodnoty opačné. Například disjunkce je nepravdivá jen, je-li argumentem dvojice $\langle 0,0 \rangle$, do toho řádku tedy vepíšeme jako hodnotu 0 a do ostatních řádku mechanicky vepíšeme hodnotu 1. Někdy je také užitečné nevypisovat pod sebe například tři jedničky, ale místo nich napsat jednu velkou jedničku přes tři řádky.

Druhou podobou tabulkové metody je následující postup, v němž je ohodnocení výrokových proměnných uvedeno zcela nalevo, od něj napravo jsou pak po řadě vyhodnoceny v samostatných sloupcích dílčí podformule a poslední krok vyhodnocování je tedy zcela napravo – poslední krok vyhodnocuje vztah mezi předposledními kroky (všimněme si, že v záhlaví tabulky je posloupnost vytvářející danou formuli):

$p\ q$	$(p \vee q)$	$\neg q$	$(p \vee q) \rightarrow \neg q$
1 1	1	0	*0*
1 0	1	1	*1*
0 1	1	0	*0*
0 0	0	1	*1*
1.)	2.a)	2.b)	3.)

Tabulkovou metodou lze kromě splnitelnosti ověřit i to, zda daná formule je tautologie: pokud výsledný sloupec hodnot obsahuje samé jedničky, čili daná formule je pravdivá při všech ohodnoceních jejích proměnných, formule je tautologií.

Doplňme si informaci o tabulkové metodě ještě i tím, že formule lze vyhodnocovat i pomocí *sémantických stromů*. Sémantický strom je (matematický) strom, jehož kořenem je daná formule a návěští (tj. místa větvení) obsahují částečně vyhodnocenou formuli. Toto vyhodnocení některé její proměnné odpovídá tomu, zda proměnná v dané větvi je nebo není negována (čemuž odpovídají hodnoty 1 nebo 0, jež bývají někdy reprezentovány jako $\top$ a $\bot$). Větvení může vycházet z té či oné proměnné vyskytující se ve formuli, listy obsahují hodnoty, jichž formule nabývá při ohodnocení proměnných v dané větvi. Zde je ilustrativní příklad:

$$(p\rightarrow\neg q)\rightarrow\neg p$$

$$p\ /\quad \backslash\ \neg p$$

$$(1\rightarrow\neg q)\rightarrow\neg 1\qquad (0\rightarrow\neg q)\rightarrow\neg 0$$

$$q\ /\quad \backslash\ \neg q\qquad\qquad q\ /\quad \backslash\ \neg q$$

$$(1\rightarrow\neg 1)\rightarrow\neg 1\quad (1\rightarrow\neg 0)\rightarrow\neg 1\quad (0\rightarrow\neg 1)\rightarrow\neg 0\quad (0\rightarrow\neg 0)\rightarrow\neg 0$$

$$1\qquad\qquad 0\qquad\qquad 1\qquad\qquad 1$$

Jinou metodou nalezení modelu formule je příbuzná metoda sémantických tabel, jež je vysvětlena v kapitole 14. o důkazových systémech.

4.1 Příklady – zjištění průběhu pravdivostních hodnot formule

Pomocí tabulkové metody zjistěte průběh pravdivostních hodnot u následujících formulí:

1)

p	$\rightarrow$	p
1	*1*	1
0	*1*	0
1.a)	2.)	1.b)

Formule $p\rightarrow p$ nabývá při pravdivostním ohodnocení výrokové proměnné p hodnotou 1 pravdivostní hodnotu 1, při pravdivostním ohodnocení výrokové proměnné p hodnotou 0 také pravdivostní hodnotu 1 (jde tedy o tautologii).

2)

$(p$	$\rightarrow$	$q)$	$\rightarrow$	p
1	1	1	*1*	1
1	0	0	*1*	1
0	1	1	*0*	0
0	1	0	*0*	0
1.a)	2.)	1.c)	3.)	1.b)

Formule $(p\rightarrow q)\rightarrow p$ nabývá na argumentech $\langle 1,1\rangle$ a $\langle 1,0\rangle$, což jsou dvě možná ohodnocení proměnných p a q, pravdivostní hodnotu 1, na zbylých dvou ostatních dvojicích hodnotu 0. Mimochodem si povšimněme, že daná formule dává stejný průběh hodnot jako atomická formule p, je s ní tedy ekvivalentní.

3)

p	$\rightarrow$	$(q$	$\rightarrow$	$p)$
1	*1*	1	1	1
1	*1*	0	1	1
0	*1*	1	0	0
0	*1*	0	1	0
1.a)	3.)	1.c)	2.)	1.b)

Formule $p\rightarrow(q\rightarrow p)$ nabývá při pravdivostním ohodnocení výrokových proměnných p a q dvojicí $\langle 1,1\rangle$, kdy první člen dvojice je hodnotou pro p a druhý hodnotou pro q, pravdivostní hodnotu 1. Pro ostatní dvojice také, i v tomto případě jde tedy o tautologii; tato formule je tedy ekvivalentní formuli z příkladu 1).

4)

$\neg$	$(q$	$\rightarrow$	$(q$	$\wedge$	$\neg$	$p))$
1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	0
0	0	1	0	0	1	0
5.)	1.b)	4.)	1.c)	3.)	2.)	1.a)

Formule $\neg(q\rightarrow(q\wedge\neg p))$ nabývá na argumentu $\langle 1,1\rangle$, který je ohodnocením proměnných p a q, pravdivostní hodnotu 1, na všech ostatních 0. Tato formule je tedy ekvivalentní formuli $p\wedge q$.

5)

$\neg$	$(p$	$\rightarrow$	$(p$	$\vee$	$q))$	$\leftrightarrow$	$\neg$	q
0	1	1	1	1	1	*1*	0	1
0	1	1	1	1	0	*0*	1	0
0	0	1	0	1	1	*1*	0	1
0	0	1	0	0	0	*0*	1	0
5.)	1.a)	4.)	1.b)	3.)	1.c)	6.)	2.)	1.d)

Daná formule nabývá na těch argumentech (které jsou ohodnocením proměnných p a q), jejichž druhým členem je pravdivostní hodnota 1, pravdivostní hodnotu 1, na všech ostatních 0.

6)

p	$\rightarrow$	$(\neg$	q	$\wedge$	$r))$
1	*0*	0	1	0	1
1	*0*	0	1	0	0
1	*1*	1	0	1	1
1	*0*	1	0	0	0
0	*1*	0	1	0	1
0	*1*	0	1	0	0

0	*1*	1	0	1	1
0	*1*	1	0	0	0

Další příklad netautologické a nekontradiktorické formule. Formule je tedy splnitelná interpretacemi indikovanými ve 3. a 5.–8. řádku.

7)

(¬	*p*	∨	*q*)	→	((*p*	→	*q*)	∧	(*q*	∨	*r*))
0	1	1	1	*1*	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	*1*	1	1	1	1	1	1	0
0	1	0	0	*1*	1	0	0	0	0	1	1
0	1	0	0	*1*	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	*1*	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	*1*	0	1	1	1	1	1	0
1	0	1	0	*1*	0	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	*0*	0	1	0	0	0	0	0

Daná formule nabývá pravdivostní hodnotu 0 tehdy, když ohodnocením proměnných *p*, *q* a *r* je pravdivostní hodnota 0, při ostatních valuacích je pravdivá.

8)

(*p*	→	(*q*	→	*r*))	→	((*p*	→	*q*)	→	(*p*	→	*r*))
1	1	1	1	1	*1*	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	*1*	1	1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	*1*	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	*1*	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	*1*	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	*1*	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	*1*	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	*1*	0	1	0	1	0	1	0

Daná formule nabývá na všech argumentech, které jsou ohodnocením proměnných *p*, *q* a *r*, pravdivostní hodnotu 1 (jde tedy o tautologii).

9)

(((¬	*p*)	∧	*q*)	∨	*r*)	→	*s*
0	1	0	1	1	1	*1*	1
0	1	0	1	1	1	*0*	0
0	1	0	1	0	0	*1*	1
0	1	0	1	0	0	*1*	0
0	1	0	0	1	1	*1*	1
0	1	0	0	1	1	*0*	0
0	1	0	0	0	0	*1*	1

0	1	0	0	0	0	*1*	0
1	0	1	1	1	1	*1*	1
1	0	1	1	1	1	*0*	0
1	0	1	1	1	0	*1*	1
1	0	1	1	1	0	*0*	0
1	0	0	0	1	1	*1*	1
1	0	0	0	1	1	*0*	0
1	0	0	0	0	0	*1*	1
1	0	0	0	0	0	*1*	0

(Připomínáme, že v případě, že pro argument, totiž n-tici pravdivostních hodnot, slouží 4 proměnné, pro celou kombinatoriku možných rozložení pravdivostních hodnot potřebujeme 2^4, tj. 16 řádků.)

10)

((p	$\uparrow$	q)	$\uparrow$	q)	$\uparrow$	(p	$\uparrow$	q))
1	0	1	1	1	*1*	1	0	1
1	1	0	1	0	*0*	1	1	0
0	1	1	0	1	*1*	0	1	1
0	1	0	1	0	*0*	0	1	0

Daná formule nabývá na daných argumentech vždy téže hodnoty, jaká je valuací přiřazena proměnné q; daná formule je tedy ekvivalentní formuli q.

4.3 Příklady – ověřování, zda je daná formule tautologií tabulkovou metodou

Už výše jsme řekli, že tabulkovou metodu lze využít i pro ověření, zda je určitá formule tautologií. Zde je několik příkladů.

1)

(p	$\wedge$	$\neg$	p)
1	*0*	0	1
0	*0*	1	0

Daná formule není tautologií, nenabývá totiž pravdivostní hodnoty 1 při jakémkoli pravdivostním ohodnocení jejích výrokových proměnných.

2)

$(\neg$	q	$\rightarrow$	$\neg$	$p)$	$\rightarrow$	$(p$	$\rightarrow$	$q)$
0	1	1	0	1	*1*	1	1	1
1	0	0	0	1	*1*	1	0	0
0	1	1	1	0	*1*	0	1	1
1	0	1	1	0	*1*	0	1	0

Daná formule je tautologií, neboť nabývá pravdivostní hodnoty 1 při jakémkoli pravdivostním ohodnocení jejích výrokových proměnných, tj. při jakékoli valuaci.

3)

$(p$	$\downarrow$	$q)$	$\leftrightarrow$	$\neg$	$(p$	$\vee$	$q)$
1	0	1	*1*	0	1	1	1
1	0	0	*1*	0	1	1	0
0	0	1	*1*	0	0	1	1
0	1	0	*1*	1	0	0	0

Daná formule je tautologií.

4)

$(p$	$\uparrow$	$q)$	$\uparrow$	$((p$	$\uparrow$	$q)$	$\uparrow$	$(p$	$\uparrow$	$q))$
1	0	1	*1*	1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	*1*	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	*1*	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	*1*	0	1	0	0	0	1	0

Tato formule je také tautologií.