



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0216, OPVK)

Úvod do logiky (VL): 3. Jazyk VL

doc. PhDr. Jiří Raclavský, Ph.D.

(raclavsky@phil.muni.cz)

3. Jazyk VL

Jazyky odlišujeme *přirozené* (např. čeština) a *umělé* (např. esperanto), přičemž mezi umělé jazyky patří jazyky *formální*. Příkladem umělého formálního jazyka je jazyk VL; ten se záhy chystáme předložit. Jazyky můžeme zkoumat v celku, tedy tak, jak jsou jejich znaky užívány mluvčími k vyjádření jazykových významů. Tehdy jde o zkoumání náležící do *pragmatiky*, poněvadž jsou uvažovány činnosti uživatelů daného jazykového systému. Abstrahujeme-li od uživatelů a jejich jazykových aktů, zbydou nám (jazykové) znaky a jejich významy (denotáty, referenty), jejichž vztahy jsou předmětem *sémantiky*. Abstrahujeme-li dále od významů, apod., a zkoumáme jen znaky jako takové (jak se řetězí ve složitější znaky apod.), jsme v oblasti *syntaxe*. (Sémiotika jakožto věda o znacích a znakových soustavách má tři subdisciplíny: syntax, sémantiku a pragmatiku.)

Přirozené jazyky vznikly živelně a mnohé mají své uživatele, kteří jsou spolu s lingvisty nejvíce kompetentní k otázce jejich porozumění. V této pozici pochopitelně nejsme v případě umělých jazyků: ten, kdo nás s takovým jazykem seznamuje, je proto povinen ozřejmit jeho syntax a sémantiku. Syntax vlastně vymezuje, které znaky se počítají do onoho jazyka, zatímco sémantika vymezuje, jak těmto výrazům rozumět. Pro přesnost tedy dodáváme, že jazyk VL je dán svou syntaxí a sémantikou.

V případě formálních jazyků se ukázalo, že pro rozvoj například logiky je užitečné uvažovat druhově rozdílné sémantiky pro to, co bychom intuitivně chápali jako jazyk VL. Zde však budeme uvažovat pouze čistě klasickou sémantiku. Syntax jazyka VL může být striktně vzato zadána odlišně, čemuž vždy odpovídá příslušná sémantika, takže tu vznikají zcela konkrétní, odlišné jazyky VL. Ty všechny přitom mají společný předmět: pravdivostní funkce, vztahy mezi nimi, a jejich vyjádření těmi nebo jinými formulemi. (Opustíme-li rámec klasického chápání VL, můžeme se setkat například i s názory, že formule jazyka VL označují propozice.)

Jazyky obvykle chápeme nejenom jakožto kompozicionální (význam složeného výrazu je odvoditelný z významu složek), ale také jakožto umožňující generování nekonečně mnoha vět (formulí) daného jazyka, jež umožňují vyjádřit nekonečně mnoho významů („myšlenek“). Je nasnadě, že věty takového jazyka – ať už věty chápané jakožto čistě syntaktické, anebo zčásti sémantické entity – nelze zadat enumerativně. K jejich zadání proto slouží rekurzivní definice, jež nám umožňují o libovolném řetězci znaků rozhodnout, zda je, či není výrazem toho jazyka, a hlavně, co je jeho významem, je-li prvkem jazyka VL.

3.1 Syntax VL

Nyní uvedeme *syntax* našeho jazyka VL. V části zvané *abeceda* určujeme základní stavební jednotky tohoto znakového systému, v části zvané *gramatika* generujeme z abecedy slova nad abecedou, tj. znakové řetězce. V případě jazyka VL se významuplná slova nad abecedou nazývají *správně* (ev. *dobře*) *utvořené formule*, *s.u.f.* (*d.u.f.*; angl. „wff“).

Abeceda

- i. výrokové proměnné (jakožto symboly) $p, q, r, \dots p_1, q_1, r_1, \dots$
- ii. výrokové spojky (jakožto symboly) $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- iii. pomocné symboly $(,)$

Symbolů výrokových proměnných je uvažován nekonečný počet. Často bývají označovány též jako *výrokové symboly*. Výrokové spojky, často označované jako (*booleovské*) *funktory* anebo (*větné*) *operátory*, jsou konstantami, vždy totiž označují jen jednu určitou funkci. Pomocné symboly nechápeme jako nositele samostatného významu. Někdy se k oblým závorkám za účelem lepší čitelnosti přidávají i hranaté závorky a také mezery.

V zájmu rekurzivnosti naší následující definice užijeme symboly A a B , které jsou proměnnými zastupujícími jakékoli, tedy i libovolně složené formule jazyka VL. V textech, jež mají blízko k matematické logice, jsou často místo A a B používány znaky φ a ψ anebo α a β . Symboly A a B jsou výrazy metajazyka, což je jazyk, kterým hovoříme o jazyku VL.

Gramatika

- i. Výrokové proměnné ($p, q, r, \dots$) jsou *správně utvořenými formulemi* (*s.u.f.*).
- ii. Jestliže A a B jsou s.u.f., pak $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ jsou s.u.f.
- iii. Nic jiného není s.u.f.

Pod *formulemi* budeme níže rozumět právě *správně utvořené formule* daného jazyka VL. Je-li takovou formulí sama výroková proměnná, budeme ji nazývat *atomická formule* (jiní autoři říkají *atom* či *prvotní formule*) ostatní formule jsou zvány *molekulární* (či *složené*) *formule*.

Gramatika nám umožňuje rozhodnout, zda jsou q nebo $(p \rightarrow (q \wedge \neg r))$ *správně utvořenými formulemi* daného jazyka VL. Formule q je s.u.f. proto, že splňuje bod i. Formule $(p \rightarrow (q \wedge \neg r))$ je s.u.f. proto, že splňuje body ii. a i. – rekurzí zjistíme, že $(p \rightarrow (q \wedge \neg r))$ má tvar $(A \rightarrow B)$, že její podformule $(q \wedge \neg r)$ má tvar $(A \wedge B)$, že $\neg r$ má tvar $\neg A$, a že p, q i r , splňují bod i.

Bod gramatiky ii) se může v různých systémech VL lišit. Například tu jsou jazyky jen s $\neg$ a $\vee$, ba dokonce jen s $\uparrow$ (alternativně $\downarrow$). Ostatní výrokové spojky lze pak v daném systému odvodit. Dokonce i každá n -ární výroková spojka – pro $n > 2$ – se dá vyjádřit kombinací z binárních výrokových spojek. Srov. k tomu blíže kapitulu 5.

Níže budeme užívat *konvenci o vynechávání závorek* všude tam, kde to nebude na újmu jednoznačnosti zápisu dané formule. Zpravidla budeme vynechávat zejména vnější

závorky. Někdy bývá v logických textech za účelem eliminace závorek uplatňována konvence o prioritě operátorů: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, přičemž $\neg$ má nejmenší sílu, tj. pojí se jen s bezprostředně následující formulí. Formule $\neg p \wedge q \vee r \rightarrow s \leftrightarrow t$ pak zkracuje $(((((\neg p) \wedge q) \vee r) \rightarrow s) \leftrightarrow t)$; tuto konvenci zde ovšem uplatňovat nebudeme. Podobně nebudeme uplatňovat někdy užívanou konvenci, podle níž $\rightarrow$ má největší sílu, takže například $p \vee q \rightarrow \neg r \wedge s$ zkracuje naši formuli $(p \vee q) \rightarrow (\neg r \wedge s)$.

3.2 Některé další syntaktické pojmy VL

Formule se vyznačují syntaktickou skladebností, obsahují *podformule*.

Podformule

- i. Každá formule A je (tzv. nevlastní) *podformulí* A .
- ii. Je-li formule A tvaru $\neg B$, tak B je (tzv. vlastní) *podformulí* A .
- iii. Je-li formule A tvaru $(B \wedge C)$, nebo $(B \vee C)$, nebo $(B \rightarrow C)$, nebo $(B \leftrightarrow C)$, tak B a C jsou (tzv. vlastními) *podformulemi* A .
- iv. Nic jiného není *podformulí* formule A .

Podformulí například formule $p \rightarrow q$ jsou formule $p \rightarrow q$, p , q , nikoli však řetězce $\rightarrow$ nebo $p \rightarrow$. Mohli bychom dále definovat pojem *bezprostřední podformule*, ale intuitivně je jasné, že třeba $p \rightarrow q$ a $\neg r$, a nikoli p a q či r , jsou bezprostředními podformulemi $(p \rightarrow q) \rightarrow \neg r$.

V logice se někdy uplatňují úvahy opírající se o *složitost* (*komplexitu*) *formulí*. Zde jenom naznačíme, jak by se takový pojem definoval: i. výrokové proměnné mají složitost nula, ii. formule tvaru $\neg A$ mají složitost o jedna vyšší než A , iii. formule tvaru $A * B$ (kde $*$ je binární spojka) má komplexitu o jedna vyšší než nejvyšší složitost ze složitostí A a B . (Nepleťme si složitost s *délkou formule*, kdy například $(p \rightarrow q) \rightarrow \neg r$ má délku 6, protože má 3 spojky a 3 atomické formule.) O výstavbě formulí můžeme rovněž uvažovat v tom smyslu, že tu jsou tyto formule *vytvářející posloupnosti*. Například vytvářející posloupností formule $\neg((p \vee q) \rightarrow \neg r)$ je p , q , r , $\neg r$, $(p \vee q)$, $((p \vee q) \rightarrow \neg r)$, $\neg((p \vee q) \rightarrow \neg r)$. Prakticky totéž zachycují syntaktické *stromy* (*pod*)*formulí*, kdy v kořeni je sama formule, v uzlech větví jsou složené podformule a listy jsou tvořeny atomickými formullemi. Zde je ukázka, napravo v úspornější formě:



V souladu s výstavbou formulí podle gramatiky se hovoří o tom, že nějaká definice či důkaz jsou vystavěny v souladu s *indukcí podle složitosti formule*. Princip indukce podle složitosti formule tedy využívá skutečnosti, že uvažovanou vlastnost má každá formule, totiž i. libovolná proměnná, ii. má-li tuto vlastnost formule A , tak ji má i formule $\neg A$, iii. mají-li tuto vlastnost formule A a B , tak ji má i formule $A * B$.

3.3 Sémantika VL

Už jsme výše řekli, že úkolem sémantiky VL je přiřadit k (správně utvořeným) formulím jazyka VL významy. Těmito významy jsou jednoduše pravdivostní hodnoty 1 a 0. Naše sémantika má dvě části: nejprve vyhlásíme, že výrokové proměnné nabývají pravdivostních hodnot 1 či 0 odvisle od valuace (tj. pravdivostního ohodnocení). Každou valuaci si můžeme představit jako nekonečnou posloupnost jedniček a nul, kdy první člen této posloupnosti je přiřazen lexikograficky první proměnné, druhý člen druhé proměnné atd.; jiná valuace se od této liší alespoň v jednom jediném členu. Poté vyhlásíme, jak určit pravdivostní hodnotu u složených formulí. Učiníme tak pro nekonečně mnoho možných složených formulí, naše definice je rekursivní. Všimněme si, že v definici interpretace jsou pak vlastně implementovány definice pravdivostních funkcí – v definici například říkáme, že formule tvaru konjunkce je pravdivá pouze v jediném případě, totiž když jsou oba její členy pravdivé.

Nyní se podíváme na věc trochu zešíroka. Pomocí výroků se v češtině snažíme mluvit o tom, jaký je svět, v jakém je stavu. Výrok „Alík je pes“ je pravdivý, tj. nabývá pravdivostní hodnotu pravda, pokud stav světa je takový, že Alík je psem; analogicky pro „Kvido má auto“; dané dva výroky si označme po řadě p a q . Dohromady jsou tu čtyři stavy světa: Alík je pes, Kvido má auto; Alík je pes, Kvido nemá auto; Alík není pes, Kvido nemá auto; Alík není pes, Kvido má auto. Stavy světa si označme po řadě v_1, v_2, v_3, v_4 . Každý stav světa naše dva výroky ohodnocuje, činí je pravdivými nebo nepravdivými. Například v_2 činí výrok p pravdivým, kdežto q nepravdivým. Můžeme tedy říci, že pravdivost atomického výroku/formule je přímo určena *pravdivostním ohodnocením*, jímž je právě v . Pravdivostnímu ohodnocení budeme alternativně říkat *valuace* (značena v). V případě molekulárních výroků jako $p \wedge q$ je pochopitelně jejich pravdivost odvislá od významu, tj. pravdivosti, jejich složek. Výrok jako $p \wedge q$ je pravdivý právě tehdy, když jsou pravdivé jeho složky p a q , čili když valuace pro p a q je shodná, jmenovitě je to hodnota 1. Právě toto je implementováno v následující definici interpretace.

Technicky vzato můžeme každou valuaci v chápat jako nekonečnou posloupnost jedniček a nul, např. v_2 je posloupností 101111..., jejíž první člen je asociován s první proměnnou, druhý člen s druhou proměnnou, atd.

Valuace

Každá jednotlivá *valuace* v je funkce zobrazující všechny proměnné na pravdivostní hodnoty 1 a 0.

Protože každá valuace je funkce, $v(A)$ dává pravdivostní hodnotu pro formuli A (podmínka: A je atomická formule). Ještě poznámka: někdy v našich úvahách budeme pracovat s reprezentanty celých tříd valuací; například budeme uvažovat v , která dává pro p hodnotu 1 a pro q hodnotu 0, přičemž v je reprezentant všech rozmanitých valuací, jež ohodnocují porůznu taktéž r , s , atd., nicméně p a q ohodnocují stejně.

Intepretace $\mathfrak{I}(v, A)$, kde „ $\mathfrak{I}$ “ je písmeno „I“ psané kurentem, je binární funkce, která je parametrizována k valuacím a formulím. $\mathfrak{I}(v, A)$ dává pravdivostní hodnotu, která formuli A přísluší odvisle od valuace v . Je-li A proměnná, která dostává od v pravdivostní hodnotu 1, $\mathfrak{I}(v, A) = 1$; čili intepretace atomické formule A zcela splývá s valuací pro A , tj. $\mathfrak{I}(v, A) = v(A)$ (kde A je atomická formule). U molekulárních formulí je intepretace rovněž odvislá od valuace, ale už na ni není zcela redukovatelná. Zde je definice funkce intepretace:

Interpretace

Intepretace $\mathfrak{I}$ formule A na základě valuace v je 1, tj. $\mathfrak{I}(v, A) = 1$, právě tehdy, když platí, že:

1. A je výroková proměnná a $v(A) = 1$.
2. A je tvaru $\neg B$ a $\mathfrak{I}(v, B) = 0$.
3. A je tvaru $B \wedge C$ a $\mathfrak{I}(v, B) = \mathfrak{I}(v, C) = 1$.
4. A je tvaru $B \vee C$ a $\mathfrak{I}(v, B) = 1$ nebo $\mathfrak{I}(v, C) = 1$.
5. A je tvaru $B \rightarrow C$ a $\mathfrak{I}(v, B) = 0$ nebo $\mathfrak{I}(v, C) = 1$.
6. A je tvaru $B \leftrightarrow C$ a $\mathfrak{I}(v, B) = \mathfrak{I}(v, C)$.

Tím, že jsme vymezili, na kterých argumentech dává funkce $\mathfrak{I}$ hodnotu 1, jsme zároveň vymezili, na kterých argumentech dává $\mathfrak{I}$ hodnotu 0. Všimněme si dále, že podmínky 1.–6. vylučují, aby $\mathfrak{I}$ byla funkcí, jež činí například pravdivými formule A i $\neg A$, anebo formuli $A \wedge B$ pravdivou, ale A nepravdivou.

Někteří autoři v rámci VL valuaci a interpretaci neodlišují a jednoduše říkají, že formule A je pravdivá na základě valuace. Tato jejich valuace splňuje právě uvedené podmínky 1.–6., uvažují tedy naši interpretaci, nikoli naši valuaci. Naše valuace totiž složené formule nijak neohodnocuje, což znamená, že je parciální funkcí definovanou na množině formulí (nebo totální funkcí definovanou nikoli na množině formulí, ale jen na množině výrokových proměnných). Někteří autoři pak rozeznávají v v našem smyslu a w (či v s pruhem), kde w je rozšíření v v souladu s podmínkami 1.–6.; w je tak nerelační obdobou naší (relační, tj. binární) funkce $\mathfrak{I}$.

Tato definice intepretace $\mathfrak{I}$ je formulována v metajazyce, v němž zadáváme jazyk VL. (V tomto metajazyce používáme nejen A a B jako proměnné pro libovolné formule, ale také slova jako „nebo“ a „a“ s jejich obvyklým významem.) Definice je rekurzivní, protože nám pro libovolnou formuli daného jazyka umožňuje určit její sémantickou (rozuměj pravdivostní) hodnotu. Říká se proto, že funkce intepretace $\mathfrak{I}$ je definována indukcí podle složitosti formule A .

Nelze si nevšimnout, že body 2.–6. vycházejí z definic pravdivostních funkcí $\neg$, $\wedge$, atd., jež jsme si formou pravdivostních tabulek uvedli výše. Bod 2. říká, že $\mathfrak{I}(v, \neg B) = 1$ právě tehdy, když $\mathfrak{I}(v, B) = 0$, čímž je také dáno, že $\mathfrak{I}(v, \neg B) = 0$, když $\mathfrak{I}(v, B) = 1$; neboli je implementováno, že $\neg$ „otáčí“ dodanou pravdivostní hodnotu. Bod 2. říká, že formule tvaru konjunkce je pravdivá právě tehdy, když jsou oba její členy pravdivé. Atd.

Všimněme si ještě, že při numerickém označení pravdy a nepravdy pomocí čísel 1 a 0, platí tyto vzorce pro výpočet pravdivostních hodnot: $\mathfrak{I}(v, \neg A) = 1 - A$; $(A \wedge B) = \min(A, B)$; $\mathfrak{I}(v, (A \vee B)) = \max(A, B)$; $\mathfrak{I}(v, (A \rightarrow B)) = \max(1 - A, B)$, popř. $\mathfrak{I}(v, (A \rightarrow B)) = 1$, pokud $A \leq B$, jinak 0; $\mathfrak{I}(v, (A \leftrightarrow B)) = 1$, pokud $A = B$, jinak 0. Tyto vzorce se využívají při studiu zobecnění a nadstavbě klasické VL, např. ve fuzzy logice.

V současné logice se běžně setkáváme se sémantikou na základě *teorie modelů* (angl. „model-theoretical semantics“). Příslušná definice využívá pojmu *splnitelnosti* (angl. „satisfaction“), jež se opírá o pojem interpretace (interpretační funkce, ev. valuační); *model* je pak to, co splňuje formuli.

Splňování

Interpretace $\mathfrak{I}$ *splňuje* formuli A právě tehdy, když:

- 1) A je výroková proměnná a $\mathfrak{I}(v, A) = 1$.
- 2) A je tvaru $\neg B$ a $\mathfrak{I}$ nesplňuje B .
- 3) A je tvaru $B \wedge C$ a $\mathfrak{I}$ splňuje B i C .
- 4) A je tvaru $B \vee C$ a $\mathfrak{I}$ splňuje B nebo C .
- 5) A je tvaru $B \rightarrow C$ a $\mathfrak{I}$ nesplňuje B nebo splňuje C .
- 6) A je tvaru $B \leftrightarrow C$ a $\mathfrak{I}$ splňuje B i C nebo nesplňuje B i C .

Splnitelná formule

Formule A je *splnitelná* právě tehdy, když je splňována aspoň jednou interpretací.

Model formule

Každou valuační v , při níž je formule splňována, nazýváme *model formule* A .

Pro příklad, modely formule $p \leftrightarrow q$ jsou valuační přiřazující výrokovým proměnným p , q po řadě 1, 1 anebo valuační přiřazující 0, 0. To, že v je model A , se někdy zapisuje jako $v \models A$.

Definici splnitelnosti formule lze zobecnit i pro případ systémů formulí jako T (pod systémem rozumějme pro jednoduchost množinu formulí).

Splňování a splnitelnost systému formulí

Systém formulí T je *splněn* nějakou interpretací $\mathfrak{I}$ právě tehdy, když každá z formulí systému T je při této interpretaci $\mathfrak{I}$ pravdivá.

Systém formulí T je *splnitelný* právě tehdy, když existuje interpretace $\mathfrak{I}$ taková, že systém T je splněn tou interpretací $\mathfrak{I}$.

Někdy se pak říká, že systém formulí T je *logicky pravdivý* právě tehdy, když je splněn každou interpretací $\mathfrak{I}$. Jeden ze zajímavých výsledků zkoumání VL je *Věta o kompaktnosti*, která říká, že libovolný systém formulí T je splnitelný právě tehdy, když každá konečná část T je splnitelná.

Poznamenejme, že v souvislosti se splnitelností (úžeji: tautologičností) formulí bývá zmiňován *problém SAT* („satisfiability“), tedy otázka, zda pro danou formuli existuje ohodnocení jejích proměnných, při němž je pravdivá. (Jako SAT, či *Problém booleovské splnitelnosti*, se někdy označuje rodina souvisejících problémů.) Zatímco pro formule s několika proměnnými takovéto ohodnocení snadno nalezneme v krátkém čase, s vyšším počtem proměnných exponenciálně narůstá čas na vyřešení úkolu. V současnosti převažuje názor, že nelze najít algoritmus, který by problém SAT vyřešil obecně pro jakoukoli formuli. Tím se ovšem nemění nic na faktu, že každá formule VL je rozhodnutelná (byť neefektivně) z hlediska toho, zda je splnitelná.

Dodejme, že alternativní sémantika klasické, anebo i neklasické VL, studuje přiřazování sémantických hodnot formulím v rámci algebry, odtud název *algebraická sémantika*; v rámci tohoto výzkumu bylo dosaženo řady obecných výsledků.

3.4 Některé další sémantické pojmy VL

Nyní si uvedeme skupinu sémantických pojmů, které nepatří bezprostředně do definice sémantiky jazyka VL, ale mají s ní úzkou souvislost. Klíčovými logickými pojmy jsou pojmy tautologie a kontradikce. Obecnou definicí: tautologie je věta vždy pravdivá, kdežto kontradikce je věta vždy nepravdivá. Kontradikci získáme negací tautologie; a naopak: tautologii získáme negací kontradikce. Slůvko „vždy“ znamená za všech okolností, ve VL tedy při jakékoli valuaci. Výrokově-logické *tautologie* (či *kontradikce*) jsou tedy z definice jiné než tautologie definované zcela obecně. Níže v textu však budeme stručně mluvit jen o tautologiích (kontradikcích). Jiným názvem pro tautologie je *logicky platné formule*.

Tautologie VL

Výrokově-logickou tautologií je formule, která nabývá hodnoty 1 při každém ohodnocení výrokových proměnných, tj. při každé valuaci. Je to tedy formule, která je každou interpretací splňována.

Příklady tautologií jsou třeba $p \rightarrow p$ či $p \rightarrow (p \vee q)$, pro seznam významných tautologií viz níže kapitolu 5. Uvědomme si, že formule A je v klasické VL tautologií právě tehdy, když formule $\neg A$ je nesplnitelná.

Kontradikce VL

Výrokově-logickou kontradikcí je formule, která nabývá hodnoty 0 při každém ohodnocení výrokových proměnných, tj. při každé valuaci. Je to tedy formule, která není žádnou interpretací splňována.

Příklady kontradikcí jsou třeba $p \wedge \neg p$ či $\neg(p \rightarrow p)$. Kontradikce jsou nesplnitelné formule.

Z hlediska sémantiky jsou dvojice formulí vzhledem k sobě *ekvivalentní* nebo *neekvivalentní*.

Ekvivalence formulí VL

Formule A je *ekvivalentní* formuli B právě tehdy, když jsou obě splňovány pouze a právě týmiž interpretacemi, tj. $\mathfrak{I}(v, A) = \mathfrak{I}(v, B)$ při všech valuacích v .

Příklady ekvivalentních formulí jsou třeba dvojice $\neg(p \vee q)$ a $\neg p \wedge \neg q$, $p \rightarrow p$ a $p \rightarrow (p \vee q)$, $p \wedge \neg p$ a $\neg(p \rightarrow p)$.

Jak uvidíme i třeba z Principu ekvivalentního nahrazení, jenž umožňuje tautologii snadno přebudovávat na další tautologie, každá formule je ekvivalentní nekonečně mnoha formulím. To také obnáší, že každá tautologie je ekvivalentní nekonečně mnoha tautologiím. Analogicky totéž platí pro kontradikce. Dokonce je oblast všech formulí rozdělena na vzájemně disjunktní, tj. nepřekrývající se, nekonečné množiny formulí, přičemž v každé z množin jsou si všechny formule navzájem ekvivalentní.

Někdy bývá zmiňován pojem *duální formule*. Dvě formule A a B jsou k sobě *duální* (B je někdy značena A^δ) právě tehdy, když $\mathfrak{I}(v, B) = \neg \mathfrak{I}(v, A)$. To znamená, že A má hodnotu 1 právě tehdy, když B má hodnotu 0, a naopak; jejich průběhy pravdivostních hodnot jsou ‚zrcadlové‘. Příkladem jsou třeba p a $\neg p$ nebo $p \vee q$ a $\neg p \wedge \neg q$. Platí dokonce *Věta o dualitě*, podle níž je A ekvivalentní B , jež se od A liší záměnou *duálních spojek* $\vee$ a $\wedge$ a tím, že namísto atomických formulí (proměnných) obsahují jejich negace.

Nyní dáme do souvislosti systémy formulí a formule, jež jsou splněny vždy, pokud jsou splněny všechny věty z příslušného systému. Neznamená to nic jiného než to, že daná formule vyplývá z daného systému formulí, ale k tomu se vrátíme až níže v samostatné kapitole. Pro nás je nyní důležité vědět, že T je množina předpokladů (či podmínek) pro tvrzení A a že tautologie lze tvrdit bez předpokladů. Namísto *tautologický důsledek* se někdy říká prostě *logický důsledek* systému formulí.

Tautologický důsledek systému formulí T

Formule A je *tautologickým důsledkem* systému formulí T , psáno $T \models A$, právě tehdy, když $\mathcal{I}(v,A)=1$ při každé interpretaci, při níž $\mathcal{I}(v,B)=1$ pro každou formuli B , jež je prvkem T . V případě $T \models A$ pro prázdný soubor T píšeme krátce $\models A$.

Všimněme si, že pokud je množina T nesplnitelná, znamená to, že nemá žádný model, a tudíž je A splněna v každém modelu množiny T . (Ještě poznamenejme, že daný pojem lze rozšířit tak, aby za tautologický důsledek byl brán systém formulí S , takže bychom měli $T \models S$; $\models S$ je pak případ logicky pravdivého systému formulí. Množina tautologických důsledků množiny T se obvykle označuje $Cn(T)$, kde „Cn“ je zkratkou za „consequence“ (tj. důsledek) nebo se používá Cl , což zkracuje „closure“ (tj. uzávěr).

Konečně si uvedeme ještě dva pojmy. Oba se sice vážou k problematice odvozování (viz příslušná kapitola 14.), ale mají vysokou relevanci k problematice pravdivosti formulí. Příslušná dvě pravidla nás opravňují transformovat dané formule na jiné formule, přičemž bude zachována jejich pravdivostní hodnota, v případě Pravidla substituce dokonce tautologičnost (viz též kapitolu 13. o axiomatických systémech).

Pravidlo substituce ve VL

Nahradíme-li ve VL-tautologii každý výskyt určité proměnné určitou jednou a toutéž formulí, zůstane VL-tautologií.

Například do tautologie $p \rightarrow p$ můžeme substituovat (tj. dosadit) za p například q anebo třeba $q \vee r$, a výsledky těchto substitucí, totiž $q \rightarrow q$ i $(q \vee r) \rightarrow (q \vee r)$ jsou rovněž tautologie.

Pravidlo ekvivalentního nahrazení

Nechť A je formule, která obsahuje alespoň na jednom místě podformuli B . Jestliže platí, že B je ekvivalentní s C , a jestliže formule A' vznikne nahrazením libovolného počtu výskytů formule B formulí C ve formuli A , pak A' je ekvivalentní s A .

Například ve formuli $(p \vee q) \rightarrow p$ lze namísto prvního výskytu p dát formuli $p \wedge p$, ježto je ekvivalentní p ; výsledek nahrazení, $((p \wedge p) \vee q) \rightarrow p$, je ekvivalentní $(p \vee q) \rightarrow p$.

Všimněme si rozdílu mezi těmito pravidly. Při aplikaci Pravidla substituce nahrazujeme něčím proměnné, při aplikaci Pravidla ekvivalentního nahrazení nahrazujeme něčím podformule. Při aplikaci Pravidla substituce dosazujeme něco za každý výskyt, při aplikaci Pravidla ekvivalentního nahrazení dosazujeme za libovolný počet výskytů.