



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0216, OPVK)

Úvod do logiky (VL): 2. Uvedení do výrokové logiky

doc. PhDr. Jiří Raclavský, Ph.D.

(raclavsky@phil.muni.cz)

2. Uvedení do výrokové logiky

2.1 Základní pojmy výrokové logiky

Výroková logika, dále obvykle jen VL, je často charakterizována jako logika zkoumající logické vztahy mezi výroky.

Jako *výrok* je obecně chápána věta (vzácně: sémantický obsah věty), která je pravdivá, nebo nepravdivá. Jako výroky jsou tedy v logice uvažovány určité oznamovací věty přirozeného jazyka, totiž věty, u nichž má smysl se ptát, zda je uvažovaná věta pravdivá, či nepravdivá, tedy lze položit otázku „Je pravda, že ...?“, kde „...“ obsazuje daná věta. Takže výroky jsou věty, avšak ne všechny věty jsou výroky. Z daného vymezení je zřejmé, že například věty rozkazovací („Dones to!“), přací („Kéž by už byla noc!“) či tázací („Kolik je hodin?“), ovšem i některé oznamovací věty („Ahoj.“), nejsou v rámci klasické VL pojednávány, neboť nejsou chápány jako nositelé pravdivosti, či nepravdivosti.

Namísto „ p “, kde p je nějaký výrok, můžeme v důsledku toho, že je to výrok, říkat „Je pravda, že p “ či „Platí p “, příp. „Tvrdím p “. (Analogicky v případě negovaného výroku: „Není pravda, že p “ či „Neplatí p “, popř. „Netvrdím p “.)

Výroky dělíme na *jednoduché*, jinak řečeno *atomické*, ev. *elementární*. Z jednoduchých výroků mohou být určitým způsobem tvořeny *molekulární* výroky, tedy výroky *složené* (gramaticky řečeno: souvětí).

Jednoduché výroky budou reprezentovány *výrokovými proměnnými* (zvanými někdy *výrokové symboly*) jako například „ p “. Prostředkem pro složení jednoduchých výroků do složeného výroku jsou *výrokové spojky*, například „ \vee “, jimž v přirozeném jazyce odpovídají (některé) *gramatické spojky*, například „nebo“. (Výrokové spojky se spolu např. se znaky sčítání či dělení řadí mezi operátory.) Výrokové spojky jsou chápány jako vyjádření pravdivostních (výrokových) funkcí. Takže jednoduché výroky jsou nositelé pravdivostních hodnot a pravdivostní funkce jsou vyjádřeny výrokovými spojkami.

Tím, že klasická VL je dvouhodnotová, pracuje se dvěma pravdivostními hodnotami, jmenovitě pravda a nepravda, uplatňuje tedy klasický *Princip dvouhodnotovosti* (či *Princip bivalence*):

Princip dvouhodnotovosti

Každý výrok je pravdivý, nebo nepravdivý.

Pravdivostní hodnota složených výroků je závislá na pravdivostních hodnotách jednotlivých výroků a výrokových spojkách jednoduché výroky spojujících. VL tedy uplatňuje *Princip kompozicionality*, jenž může být pro VL formulován takto:

Princip kompozicionality

Pravdivostní hodnota výroku je jednoznačně určena pravdivostními hodnotami jeho složek, tj. pravdivostními hodnotami dílčích výroků a sémantikou spojek, jež tyto dílčí výroky spojují.

Jakožto nástroj logické analýzy přirozeného jazyka je VL nástrojem omezeným. Především se VL nijak nezajímá o strukturu jednoduchého výroku; ten je chápán pouze jako něco, co je pravdivé či nepravdivé. To vede k omezenosti aplikability VL, neboť není s to určit podíl částí atomického výroku na vyplývání. Dále: zkoumanými výroky jsou výlučně určité oznamovací věty. Další skupinu nevýhod tvoří určité odlišnosti pravdivostních funkcí od významů gramatických spojek. Závažným nedostatkem je to, že se VL nezabývá pečlivě sémantickým obsahem, významem výroků; sémantika VL je totiž *extenzionalistická*, za význam výroku má extenzi, jíž je pravdivostní hodnota, což znamená, že všechny výroky mající tutéž hodnotu mají též význam, navzdory jejich intuitivně rozdílným smyslům.

Ještě je třeba zmínit, že VL je v moderní civilizaci díky elektrotechnice všude kolem nás, neboť je implementována v *logických obvodech*, úžeji *logických hradlech*. Logické hradlo je konkrétní (elektronickou) realizací logické spojky jako např. disjunkce a propouští elektrický proud v souladu s funkční tabulkou disjunkce. Další aplikací VL, jež je součástí našeho běžného života, je vyhledávání např. přes vyhledávací políčko webového prohlížeče, kdy logické spojky jako třeba spojka disjunkce umožňují blíže specifikovat dotaz.

2.2 Pravdivostní funkce

Než přejdeme k přehledům jednotlivých pravdivostních funkcí, připomeňme si pár základních faktů o extenzionálním, jmenovitě množinovém, chápání funkcí. (K tomuto našemu výkladu se čtenář může popřípadě vrátit později.) Každá *funkce* může být v principu zadána asociací prvků *oboru argumentů* té funkce, tedy *domény*, a prvků *oboru funkčních hodnot*, tedy *kodomény*. Příkladem funkce je třeba funkce, jejíž *tabulkové vyjádření* je (levý a pravý sloupec ukazují popořadě doménu a kodoménu):

argumenty	hodnoty
1	s
2	l
3	o
4	v
5	o
atd.	atd.

(Mimoходом, náš příklad je ukázkou tzv. posloupnosti – posloupnost je funkce z přirozených čísel do nějakých prvků.) Asociaci argumentů s hodnotami se říká *funkční zobrazení*, někdy prostě jen funkce.

Funkce mohou být zadány buď soupisem všech uspořádaných dvojic ⟨argument, hodnota⟩ (jež jsou vyobrazovány třeba v tabulce) nebo funkčním *předpisem*, tedy způsobem výpočtu funkčních hodnot pro dané argumenty.

Totální funkce zobrazují všechny argumenty na nějakou hodnotu, kdežto *parciální funkce* jsou pro některé argumenty svého oboru nedefinované; klasická logika s parciálními funkcemi nepracuje.

Pravdivostní funkce (či *výrokové funkce*) jsou ty funkce, jejichž oborem argumentů i oborem hodnot jsou tzv. *pravdivostní hodnoty*. Pravdivostními hodnotami jsou *Pravda* a *Nepravda* (angl. True and False), stručněji P a N (angl. T a F), ač je zvykem používat pro ně numerická označení 1 a 0 (v tomto pořadí). Pravdivostní hodnoty reprezentují to, že daný výrok je pravdivý, resp. nepravdivý.

Podle počtu členů v argumentu, jímž je obecně nějaká n -tice, rozlišujeme *aritu* (árnost, četnost) funkce: jsou tu například funkce unární ($n=1$), binární ($n=2$, tj. argumenty jsou nějaké dvojice ⟨X,Y⟩), ternární, atd. Aritu vyznačujeme číslicí v horním indexu, tedy např. f^2 . Pravdivostní funkce jsou tedy funkcemi z n -árního kartézského součinu $\{1,0\}^n$ do množiny $\{1,0\}$. Protože počet uspořádaných n -tic pro dvouprvkovou množinu pravdivostních hodnot je 2^n , počet příslušných n -árních pravdivostních funkcí je 2 na 2^n . Přirozený jazyk svými vyjádřeními ovšem uchopuje jen malou část z tohoto množství.

Nyní si uvedeme kompletní přehledy nulárních, unárních a binárních pravdivostních funkcí. V poznámkách pod příslušnými pravdivostními tabulkami uvádíme stručné poznámky k funkcím označeným též speciálním symbolem, k těm hlavním z nich se vrátíme v textu níže. Uvádíme rovněž alternativní symboly výrokových spojek, s nimiž je možné se v literatuře setkat.

Odlišujeme *konjunktorku*, tedy *symbol pro výrokovou spojku*, od pravdivostní funkce konjunkce. (Symboly „ \wedge “ a „ $\&$ “ jsou symboly téže spojky zvané konjunkce.) Odlišujeme také konjunktci, tedy pravdivostní funkci, od *věty tvaru konjunkce*, ač ta bývá někdy označována přímo jako konjunkce. Analogicky pro ostatní symboly spojek a pravdivostní funkce. Členům konjunkce se říká *konjunktivy*, členům disjunkce *disjunktivy*.

Nulární pravdivostní funkce

f^0_1	f^0_2
1	0

V logických textech příležitostně zmiňované nulární funkce jsou funkcemi jen pomyslně, v matematické abstrakci. Můžeme je vidět jako základní kameny nekonečné hierarchie funkcí vyšší arity. Funkce f^0_1 bývá někdy značena „ \top “, f^0_2 zas „ \perp “ a mluví se o nich někdy jako o *logických konstantách*.

Unární pravdivostní funkce

argument	f_1	f_2	f_3 \neg	f_4
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

Funkce f_1 je *unární verum* (či „true“).

Funkce f_2 , někdy nazývaná „asercce“, bývá značena též „Id“, načež je nazývána „identita“ („identická funkce“). Srov. definici identity v predikátové logice.

Funkce f_3 , značená pomocí „ \neg “ (negátoru), se nazývá negace. Negace bývá alternativně často značena pomocí „ \sim “, či pomocí pruhu-čáry nad znakem (částí formule či celou formulí). Blíže k této unární pravdivostní funkci níže.

Funkce f_4 je *unární falsum* (či „false“).

Binární pravdivostní funkce

argument	f_1 T	f_2 \vee	f_3 \leftarrow	f_4	f_5 \rightarrow	f_6	f_7 \leftrightarrow	f_8 \wedge	f_9 \uparrow	f_{10} $\vee\vee$	f_{11}	f_{12} \neq	f_{13}	f_{14}	f_{15} \downarrow	f_{16} K
$\langle 1, 1 \rangle$	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$\langle 1, 0 \rangle$	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
$\langle 0, 1 \rangle$	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
$\langle 0, 0 \rangle$	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Binární pravdivostní funkce mají dvoučlenný argument. Kombinatoricky vzato existuje přesně 16 takových (totálních) pravdivostních funkcí. Ty známější bývají označovány symboly, které uvádíme jednak v tabulce, jednak níže.

Funkce f_1 je *binární verum*, někdy též nazývaná „tautologie“ (značena „T“ i „ \top “ jako výše); srov. však níže definici tautologie.

Funkce f_2 , značená pomocí „ \vee “, případně pomocí „ \vee “ (z latinského „vel“), se nazývá *disjunkce*. Disjunkce se chová jako přičtení (připočteme-li pomocí disjunkce k nějakému výroku pravdivý výrok, výsledek bude pravdivý), odtud název *logický součet*. Blíže k této pravdivostní funkci níže.

Funkce f_3 , značená někdy znakem „ \leftarrow “, se nazývá *obrácená implikace* (event. *konverzní implikace*, *zpětná implikace*) a funguje obdobným způsobem jako implikace, ovšem s obráceným pořadím výrokových proměnných, tedy jako $q \rightarrow p$.

Funkce f_5 , značená pomocí „ \rightarrow “, se nazývá *implikace*. Místo znaku „ \rightarrow “ se používá i „ \supset “, či „ \Rightarrow “. (Pozor: když někteří autoři používají zaráz \supset a \rightarrow , či navíc dokonce \Rightarrow , pouze jedna ze šipek označuje klasickou funkci implikace, nejpravděpodobněji je to \supset .) Blíže k této pravdivostní funkci níže.

Funkce f_7 , značená pomocí „ \leftrightarrow “, se nazývá *ekvivalence* (vzácněji *rovnosměrnost*). Místo „ \leftrightarrow “ se používá i „ \equiv “, či „ \Leftrightarrow “. Blíže k této pravdivostní funkci níže.

Funkce f^2_8 , značená pomocí „ \wedge “, se nazývá *konjunkce*. Místo znaku „ \wedge “ se zejména v anglosaském prostředí používá „ $\&$ “. V mnoha, zvláště v informatických textech se leckdy používá tečka („ \cdot “ či „ \bullet “), eventuálně malá tečka mající tvar čtverečku, což naznačuje, že konjunkce se jakožto booleovská operace chová jako násobení; odtud název *logický součin* (srov. že například platí, že $(1 \cdot x) = x$, kde 1 reprezentuje pravdivý výrok a x hodnotu nějakého výroku). Blíže k této pravdivostní funkci níže.

Funkce f^2_9 , značená ve starší literatuře zpravidla znakem „ $/$ “, avšak i „ $|$ “, nověji „ \uparrow “, event. „NAND“ z anglického „not and“, se nazývá *Shefferova funkce*. Blíže k této pravdivostní funkci níže.

Funkce f^2_{10} , značená pomocí „ \vee “, či „ \neq “ nebo „ $\underline{\vee}$ “, ba i „ \oplus “, se nazývá *vylučovací disjunkce* (v latině vyjadřována pomocí „aut ..., aut ...“), anebo „nonekvivalence“, „kontravalence“ či „alternace“; je značena též „ $\Leftarrow \Rightarrow$ “, v prostředí informatiky bývá značena „XOR“ z anglického „exclusive or“. Blíže k této pravdivostní funkci níže.

Funkce f^2_{15} , značená ve starší literatuře zpravidla znakem „ $|$ “ (ale i pomocí „ \cdot “), nověji „ \downarrow “, v informatice „NOR“ z anglického „not or“, se nazývá *Nicod-Peirceova funkce*, někdy dokonce *Schröderův operátor*.

Funkce f^2_{16} se nazývá *binární falsum*, někdy též nazývaná „kontradikce“ (značena „K“ nebo „ \perp “ jako výše); srov. však níže definici kontradikce.

Zbývající binární funkce z této tabulky mají také jméno a označení symbolem, ale setkat se s nimi lze vzácně.

Různí autoři používají různé sady symbolů. Zde jsou dvě nejčastěji používané pětice vzájemně si odpovídajících symbolů; prvou z nich budeme používat v této knize, s druhou se setkáme u mnoha anglicky píšících autorů:

\neg	\wedge	\vee	\rightarrow	\leftrightarrow
\sim	$\&$	\vee	\supset	\equiv

***n*-ární pravdivostní funkce**

Samozřejmě existují také pravdivostní funkce vyšší arity, jež jsou vždy početnější druhem – trojmístných je 2 na 2^3 , tj. 256, čtyřmístných je 2 na 2^4 , tj. 65536, atd.). Těmito funkcemi se zde zabývat nebudeme už proto, že je lze definovat pomocí námi již uvedených funkcí nižší arity (srov. způsoby takového definování v kapitole o odvozování výrokových spojek).

Pro ilustraci si zde uvedeme jen příležitostně zmiňovanou ternární pravdivostní funkci *if-then-else* („jestliže ..., tak ..., jinak ...“). Ta je definovatelná např. pomocí $((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow r))$:

p	q	r	if p than q else r
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

2.3 Neznámější pravdivostní funkce

Nyní si blíže všimneme nejvíce diskutovaných pravdivostních funkcí. K jejich definování využijeme mírně zjednodušené *pravdivostní tabulky*, v nichž funkční hodnotu píšeme – zde pro názornost tučným řezem – pod operátor, tj. symbol výrokové spojky, a členy argumentů pod výrokové proměnné. (Pravdivostní tabulky výrokových spojek objevilo na přelomu 19. a 20. století více autorů, zmiňováni bývají E. Schröder, Ch. S. Peirce, B. Russell, L. Wittgenstein, E. Post, přičemž dva naposledy zmiňovaní jsou považováni za objevitele tabulkové metody zjišťování průběhu pravdivostních hodnot.)

Negace (\neg , „ne“)

$\neg p$
0 1
1 0

Pravdivostní funkce negace je v přirozených jazycích vyjadřována pomocí „ne“, jež slouží k negování (popírání) celého výroku. Často jde o předponu „ne-“ spjatou už se slovesem, v jiných případech se jedná o obraty „Není pravda, že ...“, či „Neplatí, že ...“, kde tři tečky zastupují libovolný výrok. Jistou zvláštností češtiny je občasné vyjadřování negace gramatickým dvojím záporem, na což musíme být v analýzách opatrní. Všimněme si, že formálně funguje negace tak, že obrací pravdivostní hodnotu výroku, na nějž je aplikována.

Příklady vět: „Neprší“, „Není pravda, že Adam má auto“, „Neplatí, že spojením dvou kapek vznikají dvě kapky“, apod.

Konjunkce (\wedge , „a“)

$p \wedge q$
1 1 1
1 0 0
0 0 1
0 0 0

Vzhledem k jejím vlastnostem lze pravdivostní funkci konjunkce vhodně využít k explikování významu gramatické spojky „... a ...“ mezi výroky, resp. jejich přímých stylistických ekvivalentů „... a současně ...“ či „... a zároveň ...“, nebo „... i ...“, „... a také ...“, „... , zatímco ...“, „... , přitom ...“, „... , přičemž ...“, „... , kdežto ...“. Méně přímými stylistickými variantami pro vyjádření konjunktivního spojení jsou gramatické spojky „... , ale ...“, „... , avšak ...“, v některých případech i „... , ovšem ...“, „... , leč ...“, „... , nicméně ...“, „... , jenže ...“, „... , takový, že ...“, „... , nýbrž ...“), někdy je to jen čárka („... , ...“).

Příklady vět: „Prší a je mlha“, „Pavel běží, zatímco Kvido stojí“, „Petr i Pavel mají auto“, což je zkrácená podoba věty „Petr má auto a Pavel má auto“.

Výrok složený pomocí konjunkce je pravdivý jen tehdy, když jsou oba dílčí výroky pravdivé. U souvětí spojených např. pomocí „ale“ se nám však zdá, že věta uvozená spojkou „ale“ nějak ruší či „neguje“ informaci podanou hlavní větou, srov. např. „Petr má auto, ale Pavel taky“. Z hlediska pravdivosti celého souvětí je však tato skutečnost až doplňující, můžeme ji pominout, poněvadž pravdivostní podmínky daného souvětí jsou shodné s těmi, které má stylisticky ekvivalentní souvětí „Petr má auto a Pavel má auto“.

Konjunkce má vlastnost zvanou komutativita, takže členy, na něž se aplikuje, lze libovolně prohodit. U většiny konjunktivně složených výroků opravdu nezáleží na pořadí členů, tedy dílčích výroků. Výjimkou jsou až výroky jako „Adam se vyboural a opil se“, kdy záměna dílčích výroků na „Adam se opil a vyboural se“ vede ke změně podávané sémantické informace. Tento sémantický rozdíl náš model gramatické spojky „a“ ignoruje, abstrahuje od něj, poněvadž se zaměřuje jen na pravdivost a její odvislost od pravdivosti složek. (Daný problém je řešen jednak v rámci pragmatiky, jednak v rámci neklasické logiky, např. v dynamické logice.)

Disjunkce (\vee , „nebo“)

$p \vee q$
1 1 1
1 1 0
0 1 1
0 0 0

Pravdivostní spojka disjunkce je v přirozených jazycích nejlépe zachycena pomocí výrazu „... nebo ...“, případně „... či ...“. Nutno ovšem podotknout, že mnohdy není jasné, zda je vyjadřována tato *nevylučovací disjunkce*, nebo *vylučovací disjunkce*. Výrok spojující dílčí

výroky spojkou disjunkce je totiž pravdivý i tehdy, když jsou oba výroky pravdivé, nejen jeden z nich. Někdy se proto k „... *nebo* ...“ dodává dovětek „*anebo obojí*“, říkává se i „buď platí *p* nebo *q* nebo obojí“; někdy se vylučovací disjunkce indikuje tím, že je užita čárka před „nebo“). Proto se o disjunkci hovoří v případě jejího použití v prostředí přirozeného jazyka jako o *nevylučovacím nebo*.

Příklady vět: „Prší nebo je mlha“, „Auto má Petr nebo Pavel“.

Implikace (\rightarrow , „jestliže, pak“)

$p \rightarrow q$
1 1 1
1 0 0
0 1 1
0 1 0

Implikaci v přirozených jazycích vyjadřujeme spojenými jako „*jestliže ... , pak ...*“, přičemž „*jestliže*“ může být vyjádřeno pomocí přípony „*-li*“ u slovesa. Dalšími příklady jsou „*když ... , tak ...*“ nebo „*pokud ... , tak ...*“.

Příklady vět: „Pokud mám dobrou náladu, jdu na procházku“, „Je-li číslo dělitelné čtyřmi, pak je sudé“.

Tento druh implikace, který se v klasické logice používá, se z určitých historických důvodů nazývá *materiální implikace*, případně *filónská implikace* (podle Filóna z Megary, který ji jako první definoval takto). První člen implikace se nazývá *antecedent*, druhý *konsekvent*. Antecedentu se říká *dostatečná podmínka* a konsekventu *nutná podmínka*, čímž je reflektováno to, že souvětí tvaru implikace může být pravdivé, ačkoli není naplněna podmínka z antecedentu. Je třeba si dobře uvědomit a mít na paměti, že implikace je pravdivá, pokud je její konsekvent pravdivý; dále: implikace je pravdivá, pokud je její antecedent nepravdivý.

Jak vidíme, pravdivostní funkce materiální implikace funguje tak, že složený výrok nabývá hodnoty pravda i tehdy, je-li první výrok nepravdivý a druhý pravdivý, srov. třetí řádek, tj. řádek, v němž je argumentu $\langle 0,1 \rangle$ přiřazena hodnota 1. Klasická logika totiž v případě implikace nebere zřetel na kauzální podmíněnost, ba ani jinou souvislost jevů, o nichž se v dílčích výrocích hovoří. Ač ve větě „Jestliže prší, je mokro“ cítíme přímou závislost mokra na pršení, logika jakoby říká, že může být mokro, přestože neprší – uvažme, že projel kropicí vůz. Klasická logika se vskutku nezabývá žádnou kauzální, resp. fyzikální souvislostí jevů a tak věta „Je-li Praha větší než Brno, pak v Ostravě prší“ nabývá z logického hlediska stejného průběhu pravdivostních hodnot jako věta tvaru implikace, která nějakou souvislost vyjadřuje. Ještě jednou: reprezentovat materiální implikací každé implikativní jazykové spojení je chybou – jako důležitý příklad uvažme dále třeba tzv. subjunktivní kondicionály „Pokud hodíme papír do ohně, shoří“, u nichž záhy přijdeme na rozpor mezi intuitivními pravdivostními podmínkami a definicí materiální implikace (problém subjunktivních kondicionálů je zkoumán v neklasické, resp. filosofické logice).

Z pedagogických důvodů je možno chování implikace ve třetím řádku objasnit na příkladu slibu otce synovi „Jestliže budeš mít na vysvědčení vyznamenání, dostaneš kolo“.

Pokud syn splní daný předpoklad a otec splní slib, tak implikace je splněna, tedy 1. V případě špatného vysvědčení a nesplnění slibu je implikace rovněž splněna, tedy 1. Implikace je ovšem nesplněna, 0, pokud syn dostane vysvědčení s vyznamenáním, ale otec nedodrží slib, nedá mu kolo. Implikace je nicméně splněna i tehdy, když syn nemá vysvědčení s vyznamenáním, avšak otec mu dá kolo a to například proto, že zachránil topící se spolužačku.

Ekvivalence (\leftrightarrow , „právě tehdy, když“)

$p \leftrightarrow q$
1 1 1
1 0 0
0 0 1
0 1 0

Fungování ekvivalence, stejně jako i její vyjádření pomocí obrátů „... právě tehdy, když ...“ nebo „... tehdy a jen tehdy ...“ (či „... je totéž jako ...“, eventuálně i „... , pokud ...“, anebo i „... , neboli ...“, „... , čili ...“), je jistě známo. Věta tvaru ekvivalence je pravdivá tehdy, když jsou oba jednoduché výroky buď pravdivé, anebo nepravdivé. Někdy bývá ekvivalence nazývána *obousměrná implikace*, a to proto, že formule $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ je ekvivalentní s formulí $p \leftrightarrow q$. (V anglicky psaných logických textech se vyjádření ekvivalence „if and only if“ zkracuje na „iff“; český ekvivalent není zaveden.)

Příklady vět: „Přirozené číslo je prvočíslem tehdy, když má právě dva dělitele“, „Duha vzniká právě tehdy, když za deště svítí slunce“.

Porovnání tabulek nejznámějších výrokových spojek

negace („ne“)	konjunkce („a“)	disjunkce („nebo“)	implikace („jestliže, pak“)	ekvivalence („právě tehdy, když“)
$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1
1 0	1 0 0	1 1 0	1 0 0	1 0 0
	0 0 1	0 1 1	0 1 1	0 0 1
	0 0 0	0 0 0	0 1 0	0 1 0

Pro zapamatování tabulek jednotlivých pravdivostních funkcí je důležité si uvědomit, v kterém řádku, tedy pro jaký argument, se daná funkce odlišuje ve výsledné hodnotě od hodnot v ostatních řádcích:

- konjunkce je pravdivá jen tehdy, když jsou oba dílčí výroky pravdivé; jinak je nepravdivá;
- disjunkce je nepravdivá jen tehdy, když jsou oba dílčí výroky nepravdivé; jinak je pravdivá;

- implikace je nepravdivá jen tehdy, když první výrok je pravdivý a druhý nepravdivý; jinak je pravdivá;
- ekvivalence je pravdivá jen tehdy, když jsou oba dílčí výroky buď pravdivé, anebo nepravdivé.

Nádavkem přidejme alternativní tabulkové vyjádření čtyř nejznámějších pravdivostních funkcí, jež se stalo populární v nedávné době. (Pokud jsou v takovýchto tabulkách vypuštěny indikace p a q , hodnoty p jsou vypsány ve zcela levém sloupci, kdežto hodnoty q v horním řádku.)

		q	
		1	0
p	1	1	0
	0	0	0

		q	
		1	0
p	1	1	1
	0	1	0

		q	
		1	0
p	1	1	0
	0	1	1

		q	
		1	0
p	1	1	0
	0	0	1

2.4 Další zajímavé pravdivostní funkce

Vylučovací disjunkce ($\vee\vee$, „buďto, anebo“)

$p \vee\vee q$
1 0 1
1 1 0
0 1 1
0 0 0

Vylučovací disjunkce, vyjádřitelná v češtině obraty jako „*buď* ...“, „*nebo* ...“, či „*buď* ... *anebo jen* ...“, se liší od disjunkce nevylučovací, v prostředí informatiky bývá nazývána „XOR“ z anglického „exclusive or“. Argumentům přiřazuje stejné hodnoty jako negace formule tvaru ekvivalence, proto bývá také nazývána *nonekvivalence*. Jiným názvem je *kontravalence*, neboť přináší pravdivostní hodnotu pravda tehdy, když mají p a q opačné pravdivostní hodnoty. Upozorňujeme, že obecně se v klasické logice uplatňuje nevylučovací disjunkce \vee .

Příklady vět: „Buďto si koupil auto Karel, anebo si koupil auto Pavel“, „Buďto zkoušku udělám, nebo mi ukončí studium“.

Shefferova funkce (\uparrow , „je neslučitelné“)

$p \uparrow q$
1 0 1
1 1 0
0 1 1
0 1 0

Shefferovu funkci, nezřídka značenou symbolem „/“ (ale i „|“), či nověji „ \uparrow “, v informatice „NAND“ (zkratka za angl. „negated and“), můžeme v češtině odhalit za obratem „... je neslučitelné s ...“. Funguje stejně jako negovaná formule tvaru konjunkce, tedy $\neg(p \wedge q)$; srov. novější značku i zkratku.

Příklad věty: „To, že vládnoucí strana zvýšila daně, je neslučitelné s tím, co má ve volebním programu“.

Nicod-Peirceova funkce (\downarrow , „ani, ani“)

$p \downarrow q$
1 0 1
1 0 0
0 0 1
0 1 0

Českým vyjádřením snad nejvíce odpovídajícím Nicod-Peirceově funkci, značené symbolem „|“, či nověji „ \downarrow “, „NOR“ (zkratka za angl. „negated or“), je obrat „ani..., ani ...“. Funguje stejně jako negovaná formule tvaru disjunkce, tedy $\neg(p \vee q)$; srov. novější značku i zkratku.

Příklady vět: „V závodu ne zvítězil ani Alan, ani Boris“, „Nejsem žádný stařec, žádný věřící“ (L. Janáček).

Obrácená implikace (\leftarrow , „pakliže“)

$p \leftarrow q$
1 1 1
1 1 0
0 0 1
0 1 0

Funkce f_3 , značená znakem „ \leftarrow “, se nazývá *obrácená implikace*, event. *konverzní implikace*. Funguje obdobným způsobem jako implikace, ovšem s obráceným pořadím členů (tedy pokud druhá část věty implikuje první část). Typicky je v češtině vyjadřována obraty jako „..., pakliže ...“, „..., jestliže ...“ či „..., pokud ...“.

Příklady vět: „Bude propuštěn, pakliže je nevinný“, „Budu se na tebe zlobit, pokud mi nevrátíš mou knihu“.

Negovaná implikace (\neq), „a nikoli“)

$p \neq q$
1 0 1
1 1 0
0 0 1
0 0 0

Funkci f_{12} , kterou můžeme nazývat negovaná implikace (značeno přeškrtnutým znakem implikace) můžeme nalézt za obraty jako „..., a nikoli ...“, „... a ne ...“ či „..., ale ne ...“.

Příklady vět: „Diamanty ukradl Adam, nikoli Bedřich“, „Zákusek dostanu já, ale ty ne.“

2.5 Analýza výroků přirozeného jazyka výrokovou logikou

Výše jsme si řekli, že pro ověření platnosti úsudků formulovaných v přirozeném jazyce je potřeba tento úsudek dát do vztahu s formálním úsudkem, jenž může být chápán jako příslušná *logická forma úsudku*. V našem případě bude tato forma souborem formulí VL, přičemž úsudek formulovaný v přirozeném jazyce prohlásíme za platný, pokud je platný jemu korespondující formální úsudek.

Potíž tkívá v povaze této korespondence, neboť se nejedná o stoprocentní korespondenci: některé logické formule daného formálního úsudku neodpovídají zcela jednoznačně větám přirozeného jazyka. V této souvislosti se někdy říká, že věty přirozeného jazyka skrývají svou logickou formu (jíž je ona formule). Jinými slovy, analýza výroků přirozeného jazyka sice v jádru spočívá v mechanickém převodu výroků přirozeného jazyka do formálního jazyka VL, avšak leckdy při tom narazíme na úskalí a nutnost idealizovat situaci.

Příkladem *logických analýz* výroků přirozeného jazyka jsou vlastně už příklady výroků tvaru konjunkce, disjunkce atd., které jsme uváděli výše. Při *formalizaci*, tj. vlastně logické analýze, těchto výroků postupujeme obecně tak, že každému jednoduchému výroku přiřadíme jednu z výrokových proměnných, které máme k dispozici. V každém řešeném analytickém případě užíváme různé výrokové proměnné pro každý svébytný jednoduchý výrok. Liší-li se dva výroky byť jen jediným slovem, a nejedná se přitom jen o nějakou stylistickou obdobu, jsou pro nás odlišné, reprezentujeme je tedy odlišnými výrokovými proměnnými. Zcela jednoduchý příklad pro ilustraci: ve výroku „Bedřich má auto, Alík je pes, ovšem Micka není kuň“ identifikujeme tři rozdílné jednoduché výroky, totiž „Bedřich má auto“, „Alík je pes“, „Micka /není/ kuň“, které reprezentujeme po řadě p , q , r . Výrok „Micka není kuň“ je ovšem už výrok složený, obsahuje negaci, takže tomuto výroku odpovídá formule $\neg r$.

Jak vidíme, u složených výroků je důležité pečlivě odlišit jednotlivé jednoduché výroky, z nichž je onen složený výrok složen. Poté hledáme pravdivostní funkci, která nejlépe odpovídá spojení jednotlivých výroků ve složeném výroku. Důležité je, že vhodná výroková spojka reprezentuje tytéž pravdivostní podmínky, jako má námi analyzovaný výrok (resp. jeho část). Pro ilustrativní příklad, výrok „Bedřich má auto a Alík je pes“ je pravdivý pouze v jediném případě, totiž pokud má Bedřich auto a Alík je pes; v ostatních případech je nepravdivý. Zcela tytéž pravdivostní podmínky reprezentuje pravdivostní funkce konjunkce, proto je věcně adekvátní analyzovat větu „Bedřich má auto a Alík je pes“ pomocí formule $(p \wedge q)$ – tato formule totiž vhodně koresponduje s danou větou.

Pro vyznačení struktury celého výroku, toho, jaké podformule určitá výroková spojka spojuje, nám pomáhají kulaté závorky. Těch musí být vždy sudý počet, poněvadž počet levostranných a pravostranných závorek musí být stejný. Například „Jestliže Bedřich má auto a Alík je pes, tak Micka není kočka“ analyzujeme formulí $((p \wedge q) \rightarrow \neg r)$; \rightarrow se tedy aplikuje na pravdivostní hodnotu formule $(p \wedge q)$ a pravdivostní hodnotu formule $\neg r$; p a q zde patří k sobě, jak je indikováno dvojicemi závorek (formule $(p \wedge (q \rightarrow \neg r))$ strukturou koresponduje jiné větě, totiž „Bedřich má auto a jestliže Alík je pes, tak Micka není kočka“); $\neg r$ je v zápisu jednoznačná formule, proto nezávorkujeme ani jako $(\neg r)$, ani jako $\neg(r)$.

Připomeňme si, že VL je s to analyzovat jen (některé) věty oznamovací, nikoli věty rozkazovací, tázací apod. To proto, že formule VL, čítajíc v to výrokové proměnné, mají sémantickou hodnotu pravda nebo nepravda, což rozkazovací, tázací apod. věty nemají. Níže uvidíme, že u některých složených oznamovacích vět nelze určit, která pravdivostní funkce by měla odpovídat dané gramatické spojce. Příklady takových výroků jsou „Na Měsíci jsou krátery, protože Měsíc nemá atmosféru“ nebo „Adam si myslí (domnívá, věří, ví), že ...“, ad.

2.5 Příklady – analýza výroků přirozeného jazyka pomocí

VL

1)

Analyzujeme pro příklad výrok „Je-li motor zadřený, auto není pojízdné“. Jistě rozeznáme, že jde o implikativní souvětí. Antecedentem je zde „motor je zadřený“, tedy p , konsekventem je „auto není pojízdné“, tedy $\neg q$. Celá formule je proto $(p \rightarrow \neg q)$.

2)

Výrok „Pavel má auto, zatímco Kvido nikoli“ analyzujeme jako větu o dvou výrocích, druhý z výroků je negován. Výroková spojka reprezentující pravdivostní podmínky vyjádřené danou větou je konjunkce. Správnou formulí je tedy $(p \wedge \neg q)$. Všimněme si, že „převyprávění této formule zpět do češtiny „Pavel má auto a Kvido nemá auto“ je co do pravdivostních podmínek shodné s původní větou.

3)

Mějme větu „Není pravda, že jestliže prší a svítí slunce, vzniká duha“. Elementární výroky tu jsou tři: „prší“ (čemuž odpovídá p), „svítí slunce“ (tedy q), „vzniká duha“ (tedy r).

Gramatickými spojkami jsou „není pravda“ (čemuž odpovídá \neg), „a“ (\wedge), „jestliže, pak“ (\rightarrow). Konjunkce spojuje „prší“ a „svítí slunce“, což je antecedent implikace, jejímž konsekventem je „vzniká duha“; „není pravda“ vyjadřuje negaci celé věty. Dohromady tedy $\neg((p \wedge q) \rightarrow r)$.

4)

Analyzujeme výrok „Prší nebo neprší“. Někdo by mohl uvažovat, že zmiňované dva stavy počasí se zcela vylučují, a proto lze výrok analyzovat pomocí formule $(p \vee \neg p)$. Přesto je v logice zvykem zde nepoužívat vylučovací disjunkci, neboť jde o slovní vyjádření slavného logického zákona o vyloučeném třetím, totiž $(p \vee \neg p)$. Všimněme si ještě, že je chybné analyzovat tuto větu třeba jako $(p \vee q)$; výrok „neprší“ obsahuje výrok „prší“ jako svou součást, což je vystiženo při formalizaci $\neg p$; při formalizaci q vlastně chybně naznačujeme, že „neprší“ je výrok nezávislý na výroku „prší“, což by neblahým způsobem zkreslovalo pravdivostní podmínky.

5)

Analyzujeme schématickou větu „Jestliže A nebo B, pak nikoli C nebo D, pokud neplatí E a F“. Lehce identifikujeme dvojice výroků spojených disjunkcí, totiž $(a \vee b)$, $(c \vee d)$, $(e \wedge f)$. Dále můžeme zjistit, že první z těchto dvojic slouží jako antecedent implikace, tj. $((a \vee b) \rightarrow \dots)$. Konsekvent je sestaven tak, že $\neg(c \vee d)$ je implikativně podmíněn pomocí $\neg(e \wedge f)$ ve smyslu obrácené implikace. Výsledkem analýzy je formule $((a \vee b) \rightarrow (\neg(c \vee d) \leftarrow \neg(e \wedge f)))$, což lze upravit na $((a \vee b) \rightarrow (\neg(e \wedge f) \rightarrow \neg(c \vee d)))$.

6)

Analyzujeme větu „Není-li Adam v Praze, tak je den pracovního volna nebo státní svátek, a Adam je tedy u rodičů nebo u přátel“. Lze si uvědomit, že vše je podmíněno tím, že Adam není v Praze, $\neg p$, což je tedy antecedent implikace, která leží ve schématu této věty. Konsekvent pak mluví o nějakém ze dvou druhů pracovního klidu, tj. $(q \vee r)$, přičemž za těchto okolností je Adam u rodičů či u přátel, tj. $(s \vee t)$. Celá formule je tedy $(\neg p \rightarrow ((q \vee r) \wedge (s \vee t)))$.

7)

V případě „Sněží a je mlha nebo mrzne“ snadno identifikujeme konjunkci mezi p a q a disjunkci mezi q a r . Z hlediska logiky však není rozhodnutelné, jakým způsobem mají závorky vyznačit strukturu formule, tedy zda je logickou strukturou této věty $(p \wedge (q \vee r))$ anebo $((p \wedge q) \vee r)$, gramatika nám nijak nenaznačuje, kde by závorky měly být. (Jak si lze ověřit, tyto různé formule mají při valuacích výrokových proměnných odlišné hodnoty.) Z hlediska logiky není průkazné, že jev mlžení se zpravidla vyskytuje současně s jevem pršení – lze si představit, že za jiných atmosférických podmínek je tomu jinak, naši opakovanou empirickou zkušenost, že první dva jevy spolu souvisí, nesmíme při logické analýze uplatnit.

8)

Výrok „Je mokro, protože pršelo“ není ve VL analyzovatelný jinak, než jako jednoduchý výrok, tedy p . Nikoli jako $(q \rightarrow p)$ či snad $(p \rightarrow q)$. Klasická logika nijak nereflektuje momentálně platné kauzální spojení mezi těmito dvěma jevy. Snaha najít mezi pravdivostními funkcemi tu, jež odpovídá gramatické spojce „protože“, sice zprvu naráží na úspěch, neboť víme, že nepravdivost jednoho z dílčích výroků způsobuje nepravdivost celku (to mimochodem vylučuje \rightarrow). Nicméně se nám nechce uznat, že daný výrok je pouhým konjunktivním složením, tj. „Je mokro a pršelo“, kdy je celý výrok pravdivý, pokud jsou oba dílčí výroky pravdivé. (Možnost, že by byl celý výrok nepravdivý, pokud jsou oba výroky

pravdivé, odpadá, protože by šlo o výrok nepravdivý logicky – což odporuje naší intuici o kontingentní pravdivosti daného výroku.)

9)

Zamysleme se nad větou „Adam se domnívá, že na Marsu je život“. Jistě ji můžeme chápat jako svého druhu souvětí složené ze dvou vět, totiž „Adam se domnívá“ a „Na Marsu je život“. Jenže pravdivost nebo nepravdivost druhé věty je irelevantní pro pravdivost celku. Celý výrok je pravdivý, či nepravdivý odvisle od toho, zda Adam má vztah k obsahu druhé věty. Sémantickým obsahem druhé věty není sama pravdivostní hodnota, ale to, čemu se nejen v logice říká propozice, tedy sémantický obsah věty; i proto je chybné modelovat gramatickou spojku „že“ jakožto operující na pravdivostních hodnotách.

2.6 Příklady – přenos pravdivosti

To, co již víme o pravdivostních funkcích, můžeme využít ve cvičebních příkladech, které spočívají v určení pravdivostní hodnoty výroku na základě pravdivosti určitých jiných výroků. Převod těchto výroků do jazyka VL obvykle používáme jen v méně přehledných případech, běžně stačí vepisovat determinované pravdivostní hodnoty rovnou do slovního zadání.

Pro ilustraci vyřešíme následující jednoduchý příklad. Slovní zadání: Předpokládejme, že dva dané výroky jsou oba pravdivé. Z výroků v nabídce možností určete ten jediný, který je pak rovněž pravdivý.

Neumím německy.

Umím anglicky.

- i) Neumím anglicky nebo umím německy.
- ii) Neumím anglicky nebo neumím francouzsky.
- iii) Umím francouzsky nebo umím anglicky.
- iv) Jestliže umím francouzsky, tak umím německy.
- v) Jestliže neumím německy, tak umím francouzsky.

Popis řešení. Protože $\neg n$ („Neumím německy“) je rovno 1, tak $n=0$ (\neg obrací pravdivostní hodnotu); $a=1$ („Umím anglicky“). Možnost i) proto odpadá, neboť $(0 \vee 0)$ je rovno 0. Možnost ii) také odpadá, neboť pravdivost $(0 \vee f)$ závisí na neznámé hodnotě výroku f („Umím francouzsky“); podobně odpadají rovněž možnosti iv) a v). Zbývá možnost iii), u níž máme $(f \vee 1)$, což je díky vlastnostem disjunkce rovno 1.

Podobně řešíme i komplikovanější podoby takovýchto příkladů. Existuje třeba varianta, kdy dva dané výroky jsou předpokládány jako pravdivé:

Mám kámen a nemám nůžky.

Mám papír nebo mám nůžky.

ale z nabízených výroků máme určit ten jediný výrok, který za daného předpokladu pravdivý není:

- i) Jestliže nemám papír, tak mám kámen.
- ii) Jestliže mám papír, tak nemám kámen.
- iii) Nemám papír nebo nemám nůžky.
- iv) Jestliže mám papír, tak mám kámen.
- v) Mám papír nebo nemám nůžky.

Protože $(k \wedge \neg n)$ (tj. symbolický přepis první premisy) je rovno 1, tak díky definici konjunkce platí, že $k=1$ a $n=0$ (neboť $\neg n=1$); z toho plyne, že $\neg k=0$. Protože $(p \vee n)$ je rovno 1, tak musí být $p=1$. Možnost ii) je $(p \rightarrow \neg k)$, čili $(1 \rightarrow 0)$, což je dle definice implikace rovno 0. Správnou odpovědí je tedy ii).