



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0216, OPVK)

Úvod do logiky (VL): 1. Uvedení do logiky; dějiny logiky

doc. PhDr. Jiří Raclavský, Ph.D.

(raclavsky@phil.muni.cz)

1. Uvedení do logiky

1.1 Logika jako věda o vyplývání

Logika jako vědní disciplína se nezabývá například logikou dějin, ženskou či mužskou logikou, atd. Nezabývá se myšlením či jeho zákonitostmi, tím se přece zabývá psychologie. Rovněž nebudeme přijímat definici logiky jako vědy o správném usuzování, byť logika jistý prvek normativity zahrnuje. Předběžně řečeno, logika se zabývá platnými jazykově vyjádřenými úsudky. Při tomto svém zkoumání však logika abstrahuje: odhlíží od toho, jak myslí nebo usuzuje ten nebo jiný člověk; odhlíží od toho, jak lze úsudky chápat z hlediska třeba lingvistiky apod. Naším vymezením logiky bude:

Vymezení logiky

Logika je věda o vyplývání.

Namísto o vyplývání by v tomto vymezení mohlo být (je to ekvivalentní): o *logickém důsledku*, anebo také: o platných úsudcích.

Vyplývání je určitý výlučný vztah mezi větami a množinami vět, jež jsou organizovány v podobě *úsudků*. Větám z těchto množin se obvykle říká *premisy* (či *předpoklady*), a vyvozovaným větám *závěr* (či *konkluze*). V našem textu budeme premisy a závěr oddělovat čarou „-----“ nebo při lineárním zápisu znakem „∴“; v běžné mluvě se někdy setkáváme s oddělovacím obratem „tudíž“ nebo „tedy“.

Úsudek

premisa P_1

premisa P_2

...

premisa P_n

závěr Z

Než definujeme pojem vyplývání, zamysleme se nad úlohou úsudků obecněji. Budeme při tom naznačovat sounáležitost logiky s epistemologií. Úsudky používáme během poznávání k tomu, abychom z určitého pravdivého poznatku (je-li pravdivý) odvodili další pravdivý poznatek. Logické odvozování je tedy prostředkem *přenosu pravdivosti*: pokud jsou pravdivé věty P_1, P_2, \dots, P_n , bude pravdivá i věta Z . Z jiného úhlu pohledu, platné odvození je tím, co odůvodňuje daný závěr: Z je odůvodněno (je logickým důsledkem) P_1, P_2, \dots, P_n . V empirických vědách jako např. biologie či chemie odůvodňujeme poznatky zejména pomocí empirických experimentů; ale ve filosofii či matematice pravdivost nějaké věty nemůžeme

takto jednoduše verifikovat, pravdivost těchto vět je tedy spíš hypotetická či možná, proto na logickém odvozování záleží pravdivost mnohem více.

Uvedme si ilustrativní příklad. Uvažme tezi „Bůh existuje“ (naším příkladem by mohla být třeba Fermatova věta, o příklad tu vážně nejde). Tuto tezi někteří pokládají za pravdivou, jiní za nepravdivou. Není ovšem znám žádný její přesvědčivý empirický důkaz. Filosofické důkazy boží existence proto mají být tím, co demonstruje pravdivost té teze. Vzorovým je tzv. ontologický důkaz: „Bůh má všechny dokonalosti. Existence je dokonalost. Tudíž Bůh existuje“ („Bůh má existenci“). Logická forma tohoto úsudku se zdá bezchybná a vskutku o ní málokdo pochybuje. Přesto tento důkaz nemůže rozhodnout zcela vše: závěr je pravdivý, pokud jsou pravdivé premisy. Když tedy někdo zpochybňuje tento důkaz, záměrně zpochybňuje pravdivost premis, protože tím zpochybní i pravdivost závěru. Ani pravdivost premis, ani pravdivost závěru však logika bezprostředně garantovat nemůže – garantuje jen vyplývání závěru z premis.

Tento příklad nám měl ukázat motivaci pro následující dvě definice. Nejprve je tu definice *platnosti* úsudku:

Platnost úsudku

Úsudek U je *platný* právě tehdy, když jeho závěr Z vyplývá z jeho premis P_1, P_2, \dots, P_n .

Tato definice závisí na pojmu vyplývání. Abychom vztah vyplývání odlišili od jiných vztahů mezi větami a množinami vět (například od vztahu nevyplývání), musíme jej nějak vymežit, tedy uvést jeho definici:

Vyplývání

Věta Z *vyplývá* z vět P_1, P_2, \dots, P_n právě tehdy, když platí, že za všech okolností, kdy jsou pravdivé věty P_1, P_2, \dots, P_n , je pravdivá rovněž věta Z .

(Namísto „ Z “ a „ P_1, P_2, \dots, P_n “ by klidně mohlo být „ V “ a „ V_1, V_2, \dots, V_n “, apod.)

Všimněme si, že v definici vyplývání se hovoří nikoli o aktuální pravdivosti, ale o podmíněné pravdivosti: pokud nějaké věty jsou pravdivé, tak je nějaká věta pravdivá. Zamysleme se nad ilustrativním příkladem:

Jestliže prší, je mokro.

Prší.

Je mokro.

(Namísto „Prší“ by mohlo být úplnější „V Brně prší“, ale od toho odhlížejme.) Závěr tohoto platného úsudku vyplývá z premis bez ohledu na momentální pravdivost premis či závěru. Podobně jako platnost v matematice, ani logická platnost se nemůže měnit stavem počasí, zrovna tak jako se nemůže měnit vlivem momentálního smýšlení lidí. Dobře si tedy

uvědomme, že úsudek může být *platný* (angl. „valid“), a přesto pouze někdy může mít aktuálně pravdivý závěr. (Pochopitelně existují i neplatné úsudky, jež mají náhodou pravdivý závěr.) Platný úsudek s aktuálně pravdivým závěrem bývá v češtině někdy nazýván *dokonalý* (někdy v češtině: korektní) úsudek, angl. „sound“, což je tedy více než jen „valid“.

Druhý důležitý prvek této definice je modalita „za všech okolností“. Namísto právě tohoto obratu by mohlo být „vždy“ nebo „nutně“, avšak daná modalita by byla přítomna, i kdyby v definici chybělo její slovní vyjádření. To proto, že ve hře je podmíněnost pravdivosti a tu způsobuje vlastně stav světa; například stav světa takový, že prší, ovlivňuje pravdivost věty „Prší“. Nepanuje však obecná shoda o tom, co přesně tato modalita je, jak ji přesně vyložit. Výše uvedená definice tedy uvádí pojem vyplývání, který je jen intuitivní, netechnický. V zájmu přesnosti je ale žádoucí, aby v definici vyplývání byl tento ne zcela přesný pojem všech okolností nahrazen přesným, rigorózním pojmem. Jak uvidíme v této knize, výroková logika nahrazuje tento intuitivní pojem technickým pojmem valuace. Jiná logika, například predikátová logika, využívá určitý příbuzný, nicméně přece jen odlišný pojem.

Z toho plyne, že striktně vzato neexistuje jedna jediná, daná logika, ale že tu jsou různé logické systémy či logiky, které aspirují na to být věcně správnou *explikací* pojmu vyplývání. Mnozí logikové v této souvislosti mluví o tom, že úkolem logiků je navrhovat dílčí logiky, resp. dílčí logické formální jazyky, v nichž je zachycena ta nebo jiná relace logického důsledku (vyplývání). Logika tedy kromě toho, že je nástrojem například filosofů, je zároveň něčím, co samo potřebuje filosofii logiky.

Volba logiky (logického systému) souvisí s několika obecnými požadavky kladenými na jednotlivé logiky. Jsou to na jedné straně jednoduchost (nekomplexnost struktur), dále expresivnost (schopnost zachytit bohatství struktur zkoumané oblasti, jmenovitě jazyka) a adekvátnost (do níž expresivnost zčásti spadá). Klasická výroková logika je jednoduchým, nicméně málo expresivním a také nepřiliš adekvátním logickým systémem. Vlastně dokáže studovat jen některé vztahy mezi některými větami a logický důsledek na těchto vztazích založený. Snaha zbavit klasickou výrokovou logiku těchto nedostatků vedla jednak k rozvoji neklasických výrokových logik, tedy logik implementujících jiné než klasické logické zákony, jednak k jejímu nahrazování sofistikovanějšími logickými systémy.

Vraťme se k úsudkům. Úsudky jsou normálně formulovány v češtině nebo v jiných jazycích. My se však nebudeme věnovat určování platných nebo neplatných úsudků v takové podobě, v jaké jsou. Při studiu platnosti úsudků budeme v logice abstrahovat od toho, co se nám nejvíce podstatné pro jejich platnost. Tímto zde nastupuje abstrakce a idealizace, jež jsou v moderní vědě typické. Umožní nám to lépe studovat pouze a právě to, co nás na problému zajímá. Studium *logické formy* úsudku, kdy věty jsou nahrazeny jejich logickými formami, nám navíc umožní naráz postihnout spousty konkrétních jazykových variant toho úsudku. Například výroková logika studuje logickou formu, jež vypadá následovně:

$$\begin{array}{l}
 p \rightarrow q \\
 p \\
 \text{-----} \\
 q
 \end{array}$$

Tuto logickou formu sdílí mnoho jazykově formulovaných úsudků, například ten výše formulovaný úsudek o pršení a mokru.

Při ověřování platnosti jazykově formulovaného úsudku tedy jeho jednotlivé věty převádíme na logické formule, z nichž se skládá ona *úsudková forma* (ta je logickou formou nějakých úsudků). Tento proces se nazývá *formalizace*, někdy *logická analýza*. Je-li formalizace daného úsudku, tedy jeho úsudková forma, platná, pak za platný prohlásíme právě onen jazykový úsudek, jehož je ta úsudková forma formalizací. Různé logiky přitom nabízí různé odlišné formalizace, poněvadž některé logiky nedokáží rozpoznat některé jevy, jež se na vyplývání podílejí; je tu proto otázka rozumné volby mezi jednoduchostí aparátu a adekvátností výsledků.

Ještě dodejme, že úsudky jako ten výše ukazovaný jsou platné svou logickou formou, tedy díky své struktuře, jež je organizována pomocí ‚logického výraziva‘. Analogicky je tomu na úrovni izolovaných vět – některé věty jsou platné kvůli své logické formě, a tedy bez ohledu na empirický stav světa. Pro příklad je takovou třeba věta „Prší nebo neprší“, kde logickým výrazivem je „nebo“ a „ne-“. Od těchto vět odlišujeme věty (a přeneseně i úsudky), jež jsou pravdivé analyticky, tedy kvůli jazykovému významu klíčových výrazů; například věta „Starý mládenec je muž“ je pravdivá kvůli tomu, jaký význam má v češtině výraz „starý mládenec“ a „muž“.

Před chvílí jsme vlastně prodiskutovali důležitý rys moderní logiky, jímž je užití *symbolické notace*, formalismu. V logice vedl přechod na symbolickou notaci k podobnému zrychlení výzkumu jako v matematice. Symbolická notace umožňuje užít vlastnosti a vztahy mezi pojmy tak, jak to není při běžném, vlastně zdlouhavém a mnohdy nepřesném jazykovém vyjádření leckdy ani možné.

Narazili jsme tu i na otázku *normativity* logiky. Logika nemá jen jakýsi deskriptivní charakter, nevyhnutně má i charakter preskriptivní: do jisté míry normuje, co vyplývá a co ne. Implementace logiky v moderních infromatických prostředcích (od počítačů po internet) způsobila rozsáhlé ovlivnění i běžné populace; další druhy vlivu můžeme vidět třeba v některých filosofických diskurzech. Normativita skrytá v logice také vede k tomu, proč je vůbec vyučována. Logické myšlení má v zásadě každý. Logika se však vyučuje jednak proto, abychom naši schopnost logického myšlení prohloubili – abychom byli s to chápat logické vztahy i na úrovni, která by jinak byla pro nás nedosažitelná, jednak abychom své logické myšlení zpřesnili – tedy upravili vzhledem k určitému normativnímu standardu.

Tento velmi stručný úvod do logiky jako takové nyní ukončíme konstatováním, že logika je obor blízký matematice (matematikové ji leckdy považují za jednu z matematických disciplín), tradičně je pěstována na filosofii, ovšem mnoho výzkumu a užití je též v prostředí informatiky, někdy i teoretické lingvistiky a rovněž elektrotechniky. Soudobý status logiky lze nahlédnout i z následujícího telegrafického přehledu dějin logiky.

1.2 Stručné dějiny logiky

Logika jako věda vznikla až v období vrcholu řecké filosofie, přičemž důvody vzniku lze hledat v reakci na sofistické teorie argumentace. Čtyřmi významnými údobími dějin logiky jsou logika v antice, logika ve vrcholné a pozdní scholastice, logika v novověku a logika v dnešní a nedávné době. Mimoevropské příspěvky k logice (Indie, Čína) zde nezmiňujeme.

Aristotelés ze Stageiry (384–322 př. n. l.) je *zakladatelem logiky*; logika je nástroj (řec. „organon“); šest jeho spisů o logice (Kategorie, První analytiky, Druhé analytiky, Topiky, O vyjadřování, O sofistických důkazech) je vydáváno souborně jako *Organon*; Aristotelés zkoumal fragment nynější predikátové logiky, *sylogistiku*; kategorický sylogismus je úsudek jako např. „Všechny velryby jsou savci. Všichni savci jsou obratlovci. Tudíž všechny velryby jsou obratlovci.“

Stoikové, zejm. *Diodóros Kronos* (4. st. př. n. l.), *Filón z Megary* (3. st. př. n. l.), *Chrysippos ze Sol* (279–206 př. n. l.) pracovali na výrokové logice, zabývali se implikací aj.; v antice jsou dále studovány např. (logické) paradoxy (paradox lháře, paradox rohatého, atd.).

Boëthius (cca 480–525) zprostředkoval logické poznatky antiky do středověku.

Ve střední a vrcholné scholastice je aristotelská logika plně etablována; kromě sylogistiky jsou studovány jazykové obtíže ovlivňující logické úsudky (nauka o supozicích) či paradoxy (sofismata); k nejznámějším logikům patřili filosofové *Pierre Abélard* (1079–1142), *Albert Magnus* (1170–1250), *Jean Buridan* (cca 1300–1358), *William Ockham* (1287–1347).

Novověk se ohlašuje kritikou neplodnosti deduktivní aristotelské logiky (Francis Bacon, 1561–1626), na což bylo v polovině 20. st. navázáno v rámci tzv. induktivní logiky.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) je duchovním otcem moderní logiky; jeho známou ideou bylo, že např. filosofické spory by bylo možno řešit výpočtem („*Calculemus!*“), což předpokládá, že by náš svět byl popsán symbolickým jazykem, *lingua characteristica universalis* (tato idea byla inspirována několik století starými úvahami Raimunda Lulla), který by byl využit ve formálním kalkulu, v němž by se počítalo, *calculus ratorator* (jeho jednoduchou verzi skutečně navrhl); kromě těchto velmi vlivných idejí Leibniz například odlišoval neměnné pravdy analytické („pravdy rozumu“) a kontingentní pravdy empirické („pravdy faktů“).

Port-royalská škola (zejm. *Antoine Arnauld*, 1612–1694) sice rozvinula stávající logické poznatky (např. teorii o extenzi a intenzi pojmů), ale logice vtiskla psychologizující výklad jakožto *vědy o myšlení*; učebnice logiky pocházející z této názorové školy jsou děleny na teorii pojmu, soudu a úsudku a jako takové jsou psány ještě na začátku ve 20. století.

Bernard Bolzano (1781–1848) byl pražský (národností německý, občanstvím tedy rakouský) matematik (zvl. anticipátor teorie množin, kterou později rozpracoval a proslavil matematik Georg Cantor, 1845–1912), filosof, logik, teolog a sociální reformátor. Ve spise *Wissenschaftslehre* (Vědosloví, 1837), jež je vlastně metodologií vědy, uvedl i svou logiku. V analýze některých pojmů, zejm. pojmu *vyplývání*, předběhl své vrstevníky o mnoho dekad. Bolzanovo dílo ve své době zcela zapadlo.

Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770–1831) vyvinul *dialektickou logiku*, což není logika, ale řečneme abstraktní metafyzika.

Kodifikaci *tradiční logiky*, tedy zejména aristotelské logiky a logiky port-royalské školy, nalezneme v po mnoho dekad přetiskované učebnici *Johna Stuarta Milla* (1806–1871).

Od poloviny 19. století se několik matematiků snaží o zásadní reformu stávající logiky, je navrhována symbolická notace, jsou zaváděny relace apod. K nejznámějším patří matematikové *George Boole* (1815–1864), *Augustus De Morgan* (1806–1871), *William Stanley Jevons* (1835–1882), *Charles Sanders Peirce* (1839–1914), *Ernst Schröder* (1841–1902), ale i třeba *John Venn* (1834–1923) nebo *Charles Lutwidge Dodgson* (1832–1898; pod pseudonymem *Lewis Carroll* sepsal zejm. Alenku v říši divů a za zrcadlem; znám je též jako autor mnoha logických hádanek). Na rozvoj moderní logiky měl specifický vliv i třeba matematik *Giuseppe Peano* (1858–1932). Samotná moderní logika má více zakladatelů.

Gottlob Frege (1848–1925), matematik a logik, který proslul i jako základní postava analytické filosofie, je nejvíce chápán jako hlavní *zakladatel moderní logiky*. Význam má jeho *Begriffsschrift* (Pojmové písmo, 1879), v němž zavedl a obhájl symbolickou notaci (byť konkrétně ta jeho se neujala), včetně například nyní klasických kvantifikátorů. Mnohonásobně zvětšil poznatky predikátové logiky, navrhl její axiomatizaci, apod. Byl obhájcem nepsychologického pojetí logiky, přispěl k teorii pojmu i definice, ve filosofii matematiky razil *logicismus*, podle kterého je matematika odvozena z logiky.

Logik, matematik a analytický filosof, ale i politický aktivista *Bertrand Russell* (1872–1970) brzy po seznámení s Fregeho spisy v nich objevil moderní logický paradox, *Russellův paradox*. Ve snaze jej řešit navrhl *teorii typů*, která byla později modifikována a zdomácněna v informatice. Připojil se k logicismu a spolu s matematikem a filosofem *Alfredem North Whiteheadem* (1861–1947) sepsali monumentální spis *Principia Mathematica* (tři rozsáhlé díly, 1910–1913), v němž podali základy matematiky vyvozené z logiky (mezi matematiky se nevžilo, dnes se však vyskytují snahy o neologicismus).

Ve snaze odlišit tuto *moderní logiku* od staré *tradiční logiky* byly voleny i názvy *formální logika*, *symbolická logika*, logistika (právě tento termín dnes označuje nauku o skladnictví), v současnosti se často za tímtéž účelem někdy používá termín „matematická logika“.

Moderní logika Fregeho, Russella a dalších (na popularizaci měl velkou zásluhu i *Rudolf Carnap*, 1891–1970), rychle získává zájem i matematické komunity, která se snaží logiku rozvíjet jako svého druhu matematickou disciplínu. Následně se hovoří o rozštěpení vlastní, tzv. *filosofické logiky* (v současnosti se ale jedná především o určité neklasické logiky) a *matematické logiky*.

Za části matematické logiky se dnes mají: teorie modelů, teorie důkazů, teorie množin, teorie rekurze (zvl. první dvě se zužitkovávají i v rámci současné filosofické logiky). V první polovině 20. století mezi nejvýznamnější matematické logiky patří *Leopold Löwenheim* (1878–1953), *Thoralf Skolem* (1887–1963), *Emil Leon Post* (1897–1954), *Haskell Brooks Curry* (1900–1982), *Alonzo Church* (1903–1995), *Stephen Cole Kleene* (1909–1994), *Alan Turing* (1912–1954), a Kurt Gödel (k němu hned níže); jsou dosahovány první čistě (meta)logické poznatky mající dosah na většinu logik.

Za nejvýznamnějšího logika 20. století je někdy považován *Kurt Gödel* (1906–1978; narozen v Brně v německé-rakouské rodině, po určitou dobu měl československé občanství); dokázal překvapivé a významné výsledky, zejm. tzv. *věty o neúplnosti*, jež ovlivnily ideovou

důvěru ve *formalismus* matematika *David Hilberta* (1862–1943), který se snažil partie matematiky axiomatizovat a tedy problém pravdivosti přenášet na dokazatelnost.

Již od počátku 20. století je v logice bohatý myšlenkový kvas, jsou navrhovány i alternativy klasické logiky. Například *Jan Łukasiewicz* (1878–1956) navrhuje *trojhodnotovou logiku* (tím opouští v klasické logice zakotvený Princip dvouhodnotovosti), *Clarence Irving Lewis* (1883–1964) postupně dospívá k základům *modální logiky*, matematik *Luitzen Egbertus Jan Brouwer* (1881–1961) a logik *Arend Heyting* (1898–1980) zakládají intuicionismus ve filosofii matematiky a *intuicionistickou logiku*.

Alfred Tarski (1918–1923) je považován za jednoho z vlivných logiků 20. století; kromě základů *teorie modelů* je znám především pro definici sémantického pojmu *pravdivosti* a definici pojmu *vyplývání*.

Po II. světové válce výzkum v logice opanovalo studium a aplikace teorie modelů (zejm. *Abraham Robinson*, 1918–1974), po určitou dobu i teorie algoritmů. Kromě klasických výsledků, z nichž některé velmi známé uvedl filosof a logik *Willard Van Orman Quine* (1908–2000), přichází od 80. let na scénu neklasické logiky: modální logika (rozvíjená zejm. *Saulem A. Kripkem*, 1940–), intuicionistická logika, ale i *epistémická logika* (*Jaakko Hintikka*, 1929–), *deontická logika* (*Georg Henrik von Wright*, 1916–2003), kromě různých *vícemohodnotových logik* i nekonečněhodnotová *fuzzy logika* (matematik *Lofti A. Zadeh*, 1921–, náš *Petr Hájek*, 1940–), *intenzionální logika* (*Richard Montague*, 1930–1971, i náš *Pavel Tichý*, 1936–1994), *parakonzistentní logika* (*Graham Priest*, 1948–), ad. Viz též poslední kapitolu této knihy.