Logický důsledek

Petr Kuchyňka (*7765@mail.muni.cz*)

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0216, OPVK)

Úvod

Logický důsledek je hlavním předmětem zájmu logiky.

- Je to relace mezi premisami a závěry *logicky platných* úsudků: v *logicky platném* úsudku závěr *logicky vyplývá* z premis – je jejich *logickým důsledkem*.

- Logika explikuje pojem *logického důsledku* a dalších *logických pojmů* (významů univerzálních výrazů jako „a“, „nebo“ „jestliže ..., pak ---“, „některý“, „každý“, které se vyskytují ve formulacích úsudků ve všech oblastech poznání).

- Logika umožňuje klasifikovat úsudky na *správné* a *nesprávné* resp. (*logicky*) *platné* a *neplatné* (vzhledem k dané explikaci logických pojmů).

Obsah

I. Vlastnosti logického důsledku

I. Vlastnosti logického důsledku

- Logický důsledek je

  – *nutný*: jestliže závěr úsudku logicky vyplývá z premis, pak není logicky možné, aby premisy byly pravdivé a závěr byl nepravdivý (předpoklad pravdivosti premis a nepravdivosti závěru odporuje pravidlům pro užívání logických výrazů a brání tak racionální diskusi);

  – *apriorní*: poznání logické platnosti úsudku nevyžaduje zkušenost, stačí k němu podat důkaz;

  – *formální*: logická platnost úsudků závisí pouze *logických formách* jejich premis a závěrů, nikoli na jejich obsahu.

I. Vlastnosti logického důsledku – logické pojmy

- Formálnost logického důsledku přibližuje Tarského návrh chápat jako *logické 'pojmy'* (*notions*) ty množinové objekty, které jsou *invariantní* vzhledem k jedno-jednoznačným transformacím univerza diskurzu na sebe (Tarski (1986)).

  (Pravdivostní hodnoty T a F lze konstruovat jako univerzální a prázdnou množinu a pravdivostní funkce jako odpovídající množiny množin.)

- Podle Tarského kritéria žádné individuum není logickým 'pojmem'; z množin individuí jsou logickými 'pojmy' dvě množiny: univerzální a prázdná; z binárních relací jsou logickými pojmy čtyři relace: univerzální, prázdná, identita a různost; apod.

I. Vlastnosti logického důsledku – abstraktní pojem důsledku

- Abstraktně vzato je logický důsledek na množině Φ výroků nějaká relace Cn mezi podmnožinami Φ a prvky Φ, která splňuje následující tři podmínky:

  (1) Jestliže $\phi \in \Gamma$, pak $Cn(\Gamma, \phi)$.

  (2) Jestliže $Cn(\Gamma, \phi)$ a $\Gamma \subseteq \Delta$ pak $Cn(\Delta, \phi)$.

  (3) Jestliže $Cn(\Gamma, \phi)$ a pro každé $\psi \in \Gamma$, $Cn(\Delta, \psi)$, pak $Cn(\Delta, \phi)$.

- Tato relace je *finitární*, splňuje-li navíc podmínku

  (4) Jestliže $Cn(\Gamma, \phi)$, pak existuje konečná množina $\Delta \subseteq \Gamma$ taková, že $Cn(\Delta, \phi)$.

I. Vlastnosti logického důsledku – formální systémy

- Ve 20. století se pro specifikaci relace logického důsledku ujalo užití *formálních systémů*.

- *Formální systém* sestává z *formálního jazyka* a *deduktivního aparátu* pro tento jazyk:

– *formální jazyk* je tvořený souborem primitivních symbolů (abecedou) a formačními pravidly (gramatikou), která umožňují rozhodnout o každé posloupnosti primitivních symbolů, zda je správně utvořenou formulí (větou) jazyka;

– *deduktivní aparát* je soubor axiomů a odvozovacích pravidel, pomocí nichž lze v systému *odvozovat* formule z premis, případně *dokazovat* formule (je-li množina premis prázdná).

I. Vlastnosti logického důsledku – sémantická pravidla

- Žádný formální systém sám o sobě nic nereprezentuje – pouze ve spojení s nějakými *sémantickými pravidly*.

- *Sémantická pravidla* přiřazují výrazům příslušného formálního jazyka významy (určují, které správně utvořené formule tohoto jazyka jsou pravdivé).

- Máme-li formální systém s jazykem *J* můžeme specifikovat relaci logického důsledku dvěma způsoby:

  – pomocí deduktivního aparátu pro *J* (tj. pomocí pojmu *důkazu*),

  – pomocí sémantických pravidel pro *J* (tj. pomocí pojmu *modelu*).

II. Důkazy

II. Důkazy

- Z hlediska teorie důkazů je úsudek platný, jestliže ho lze *dokázat*, resp. lze *odvodit* jeho závěr z premis.

- *Důkazy* jsou řetězce na sebe jasně navazujících kroků odpovídajících základním odvozovacím principům *důkazového systému*.

II. Důkazy – odvoditelnost

- Výraz „$\Gamma \vdash \phi$“ vyjadřuje skutečnost, že v daném systému je formule ϕ *dokazatelná* či *odvoditelná z* množiny Γ formulí, resp. úsudek $\langle\Gamma, \phi\rangle$ je *odvoditelný*.

- Formule ϕ je *teorémem* daného systému, právě když je odvoditelná z prázdné množiny formulí (tj. $\varnothing \vdash \phi$).

- Množina formulí Γ je *konzistentní*, právě když z ní nejsou odvoditelné vzájemně si odporující formule (tj. pro žádnou formuli ϕ neplatí: $\Gamma \vdash \phi$ a $\Gamma \vdash \neg\phi$)

II. Důkazy – typy důkazových systémů

- Podle toho jaký deduktivní aparát užívají lze rozlišit dva základní typy důkazových systémů:

  – *axiomatické systémy* se složitými axiomy a několika jednoduchými odvozovacími pravidly,

  – *systémy přirozené dedukce* s mnoha odvozovacími pravidly a několika jednoduchými axiomy nebo bez axiomů.

- Podle toho jakou roli mohou hrát v důkazech hypotézy, lze uvažovat o *jedno-dimenzionálních* a *dvou-dimenzionálních* důkazových systémech (srov. Tichý (1988, 234-239)).

II. Důkazy – jedno-dimenzionální důkazové systémy

- V jedno-dimenzionálních důkazových systémech je důkaz řetězcem tvrzení, jejichž logická síla monotónně klesá a mezi nimiž mohou být i nepravdivé hypotézy.

II. Důkazy – dvou-dimenzionální důkazové systémy

- Ve dvou-dimenzionálních důkazových systémech neoperují odvozovací kroky na hypotézách jako takových, ale na úsudcích, jejichž premisami jsou hypotézy:
  - odvozovací kroky vedou od jednoho či více platných úsudků k platnému úsudku, takže každý krok důkazu má stejnou logickou sílu.
- Příkladem dvou-dimenzionálního důkazového systému je Aristotelova sylogistika (platnost sylogismu se dokazuje transformací jeho tvaru na nějaký přijímaný tvar platných sylogismů).
- Gentzenův sekventový kalkul lze pokládat za formalizaci dvou-dimenzionálního pojetí dedukce (ačkoli sám Gentzen ho interpretoval jedno-dimenzionálně).

III. Modely

III. Modely – protipříklad

- Z hlediska teorie modelů je úsudek platný, jestliže pro něj neexistuje protipříklad:

  (a) neexistuje úsudek stejné logické formy, jehož premisy jsou pravdivé a závěr je nepravdivý,

  (b) neexistují okolnosti, za nichž by premisy daného úsudku byly pravdivé a závěr by byl nepravdivý.

Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0216, OPVK)

III. Modely – pojem modelu

- Pojem protipříkladu může být explikován pomocí pojmu *modelu*.
- Interpretace daného jazyka (tj. přiřazení významů výrazům tohoto jazyka) je *modelem* nějaké množiny formulí, právě když všechny formule z této množiny jsou v této interpretaci pravdivé.
- Pro úsudek $\langle \Gamma, \phi \rangle$ neexistuje protipříklad, právě když množina formulí $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ nemá model.

III. Modely – platnost

- Řekneme, že úsudek $\langle \Gamma, \phi \rangle$ je (*sémanticky*) *platný* a zapíšeme to "$\Gamma \vDash \phi$", právě když pro každou interpretaci *I* daného jazyka a každé ohodnocení proměnných *v* platí: jestliže v interpretaci *I*, při ohodnocení proměnných *v* je každá formule z Γ pravdivá, pak je v ní pravdivá i formule ϕ.

- Jestliže $\Gamma \vDash \phi$, řekneme, že ϕ je *logickým* (nebo *sémantickým* či *modelově-teoretickým*) *důsledkem* Γ nebo že ϕ *vyplývá z* Γ.

- Platnost je modelově-teoretickým protějškem odvoditelnosti.

III. Modely – logická pravdivost

- Formule ϕ je *logicky pravdivá* či *platná*, právě když je pravdivá v každé interpretaci, při každém ohodnocení proměnných.

- Logická pravdivost je modelově-teoretickým protějškem vlastnosti být teorémem.

III. Modely – splnitelnost

- Formule ϕ je *splnitelná*, právě když existuje interpretace I a ohodnocení proměnných v takové, že ϕ je v interpretaci I, při ohodnocení proměnných v pravdivá.

- Množina formulí je *splnitelná*, právě když má model.

- Splnitelnost je modelově-teoretickým protějškem konzistence.

IV. Korektnost a úplnost

IV. Korektnost a úplnost

- Důkazový systém, který specifikuje relaci $\vdash$, je *korektní* (*sound*) pro sémantiku specifikující relaci $\vDash$, právě když relace $\vdash$ je obsažena v relaci $\vDash$ (tj. pro libovolné Γ, ϕ platí: jestliže $\Gamma \vdash \phi$, pak $\Gamma \vDash \phi$).

- Jestliže $\vDash$ je obsažena v $\vdash$, pak daný důkazový systém je *úplný* (*complete*) vzhledem k dané sémantice.

Vybraná literatura

BEALL, JC – RESTALL, G. (2013): Logical Consequence, In: Edward N. Zalta (ed.): *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. URL = <http://plato.stanford.edu/archives/win2013/entries/logical-consequence/>.

ETCHEMENDY, J. (1990): *The Concept of Logical Consequence*. Harvard University Press: Cambridge, MA.

HEIJENOORT, J. VAN (1967): *From Frege to Gödel: a sourcebook in mathematical logic 1879–1931*. Harvard University Press: Cambridge, MA

KNEALE, W. – KNEALE, M. (1962): *The Development of Logic*. Clarendon Press, Oxford.

TARSKI, A. (1956): *Logic, Semantics, Metamathematics*. Clarendon Press, Oxford.

TARSKI, A. (1986): What are Logical Notions. *History and Philosophy of Logic*, 7, 143-154.

TICHÝ, P. (1988): *The Foundations of Frege's Logic*. Walter de Gruyter, Berlin – New York.