Matematická logika

Relace a algebry (13.přednáška)

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obsah

- Množiny (opakování)

- Relace a zobrazení (opakování)
  - Relace
  - Binární relace na množině
  - Zobrazení
  - Rozklady, ekvivalence
  - Uspořádání

- Algebry
  - Algebry s jednou operací
  - Algebry se dvěma operacemi
  - Svazy

Teorie množin

- **Jazyk**:
  - *Speciální symboly:*
    - *Binární predikáty*: $\in$ (je prvkem), $\subset$ (je vlastní podmnožinou), $\subseteq$ (je podmnožinou).
    - *Binární funkční symboly:* $\cap$ (průnik), $\cup$ (sjednocení).
- **Cantor** – naivní teorie (bez axiomatizace).
- Dnes – poměrně mnoho formálních axiomatizací – žádná z nich *není úplná.*
- *Příklady: von Neumann-Bernays-Gödel, Zermelo-Fränkel + axiom výběru.*

Zermelo-Fränkel set-theory

Axiom of extensionality: Two sets are the same if and only if they have the same elements.

Axiom of empty set: There is a set with no elements.

Axiom of pairing: If *x*, *y* are sets, then so is {*x*,*y*}, a set containing *x* and *y* as its only elements.

Axiom of union: Every set has a union. That is, for any set *x* there is a set *y* whose elements are precisely the elements of the elements of *x*.

Axiom of infinity: There exists a set *x* such that {} is in *x* and whenever *y* is in *x*, so is the union *y* U {*y*}.

Axiom of separation(or subset axiom): Given any set and any proposition P(*x*), there is a subset of the original set containing precisely those elements *x* for which P(*x*) holds.

Axiom of replacement: Given any set and any mapping, formally defined as a proposition P(*x*,*y*) where P(*x*,*y*) and P(*x*,*z*) implies *y* = *z*, there is a set containing precisely the images of the original set's elements.

Axiom of power set: Every set has a power set. That is, for any set *x* there exists a set *y*, such that the elements of *y* are precisely the subsets of *x*.

Axiom of regularity *(or axiom of foundation): Every non-empty set x contains some element y such that x and y are disjoint sets.*

Axiom of choice*: (Zermelo's version) Given a set x of mutually disjoint nonempty sets, there is a set y (a choice set for x) containing exactly one element from each member of x.*

Množiny

- Ø – prázdná množina
- Počet prvků množiny A: |A|

Vztahy mezi množinami *(axiomy)*:

- Rovnost

$$A = B \textit{ právě když } (\forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

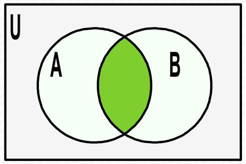
- Inkluze

$$A \subseteq B \textit{ právě když } (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Množiny – množinové operace

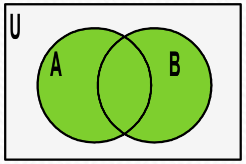
- Průnik

$$A \cap B = \{x; x \in A \text{ a } x \in B\}$$



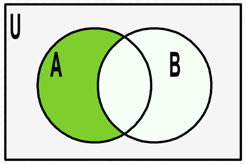
- Sjednocení

$$A \cup B = \{x; x \in A \text{ nebo } x \in B\}$$



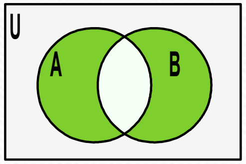
- Rozdíl

$$A - B = \{x; x \in A \text{ a } x \notin B\}$$



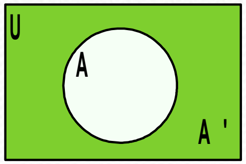
- Symetrický rozdíl

$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$$



- Doplněk vzhledem k univerzu U

$$A' = U - A$$



Množiny – množinové operace

- Potenční množina

$$2^A = \{X; X \subseteq A\}$$

- Kartézský součin

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$$

- Kartézská mocnina

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n}$$

$A^1 = A$, $A^0 = \{\emptyset\}$

Relace

- *n*-ární relace mezi množinami $A_1, A_2, \ldots, A_n$

$$r \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$$

- *Příklad:*
  - D = množina možných dnů
  - M = množina místností VŠB
  - Z = množina zaměstnanců VŠB

Ternární relace *schůze (kdy, kde, kdo):*

$$r \subseteq D \times M \times Z$$

Binární relace

$$r \subseteq A \times B$$

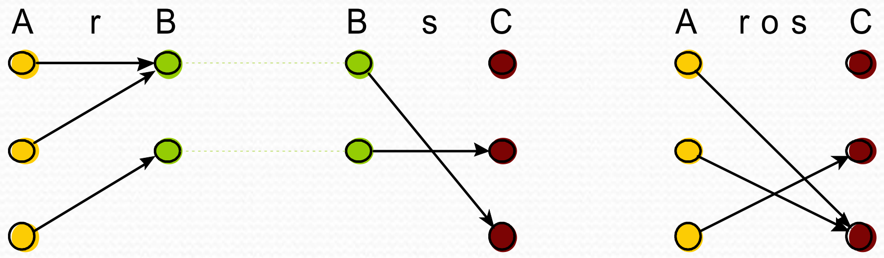
- Inverzí relace k *r*:

$$r^{-1} = \{(x, y) \in B \times A : \ (y, x) \in r\}$$

- Složení (kompozice) relací

$$r \subseteq A \times B, \ s \subseteq B \times C$$

$$r \circ s = \{(x, y) \in A \times C : (\exists z \in B)\big((x, z) \in r \text{ a } (z, y) \in s\big)\}$$



Binární relace

Binární relace r na množina A je:

- *Reflexivní*: $\forall x \in A$: $(x,x) \in r$
- *Ireflexivní*: $\forall x \in A$: $(x,x) \notin r$
- *Symetrická*: $\forall x,y \in A$: $(x,y) \in r \Rightarrow (y,x) \in r$
- *Antisymetrická*: $\forall x,y \in A$: $(x,y) \in r$ a $(y,x) \in r \Rightarrow x=y$
- *Asymetrická*: $\forall x,y \in A$: $(x,y) \in r \Rightarrow (y,x) \notin r$
- *Tranzitivní*: $\forall x,y,z \in A$: $(x,y) \in r$ a $(y,z) \in r \Rightarrow (x,z) \in r$
- *Cyklická*: $\forall x,y,z \in A$: $(x,y) \in r$ a $(y,z) \in r \Rightarrow (z,x) \in r$
- *Souvislá*: $\forall x,y \in A$: $x=y$ nebo $(x,y) \in r$ nebo $(y,x) \in r$

Binární relace

Důležité typy binárních relací:

- Tolerance – reflexivní, symetrická
- Kvaziuspořádání – reflexivní, tranzitivní
- Ekvivalence – reflexivní, symetrická, tranzitivní
- (částečné neostré) uspořádání – reflexivní, antisymetrická, tranzitivní

Binární relace

Příklady:

- Tolerance**:**
  - *„být podobný“ na množině lidí,*
  - *„mít odlišný věk nejvýše o jeden rok“ na množině lidí, ...*
- Kvaziuspořádání**:**
  - *„množiny X a Y jsou v relaci, pokud |X|≤|Y|“ na množině množin,*
  - *relace dělitelnosti na množině celých čísel,*
  - *„nebýt starší“ na množině lidí, ...*
- Ekvivalence***:***
  - *„být stejně starý“ na množině lidí,*
  - *rovnost na množině přirozených čísel, ...*
- Uspořádání***:***
  - *relace inkluze,*
  - *relace dělitelnosti na množině přirozených čísel, ...*

Zobrazení (funkce)

- $f \subseteq A \times B$ se nazývá ***zobrazení Z množiny A do množiny B*** (parciální zobrazení), jestliže platí:

  $(\forall x \in A,\ \forall y_1, y_2 \in B)\ (\ (x, y_1) \in f$ a $(x, y_2) \in f \ \Rightarrow\ y_1 = y_2\ )$

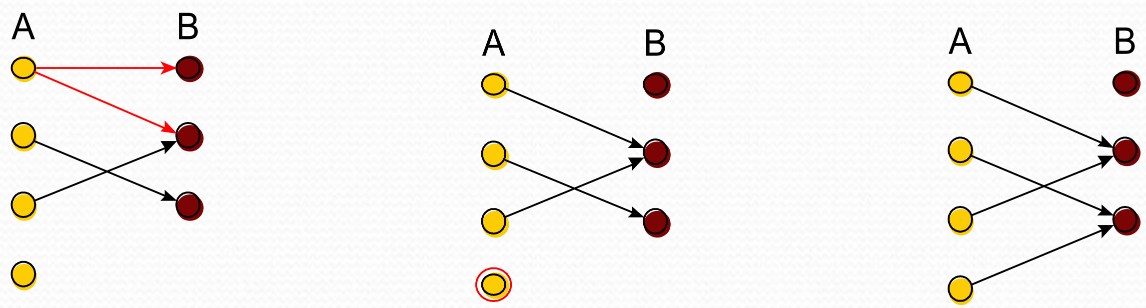
- f se nazývá ***zobrazení množiny A do množiny B*** (totální zobrazení, značíme ***f*: *A*→*B***), jestli platí:
  - f je *zobrazení z A do B*
  - $(\forall x \in A)(\exists y \in A)\ (\ (x, y) \in f)$

- Je-li f zobrazení, $(x, y) \in f$ píšeme jako ***f(x)=y***

Zobrazení (funkce)

- *Příklady*:

$r \subseteq A \times B$ $\quad$ $s \subseteq A \times B$ $\quad$ $t \subseteq A \times B$



$u = \{(x,y)\in Z\times Z;\ x=y^2\}$, $\quad$ $v = \{(x,y)\in N\times N;\ x=y^2\}$,

$w = \{(x,y)\in Z\times Z;\ y=x^2\}$

- *r, u* – nejsou zobrazení
- *s, v* – parciální zobrazení z A do B, není totální
- *t, w* – totální zobrazení

Zobrazení (funkce)

Zobrazení f: $A \rightarrow B$ se nazývá:

- ***Injektivní*** (*prosté*), platí-li:

$$\forall x_1, x_2 \in A,\ \forall y \in B: (x_1, y) \in f \text{ a } (x_2, y) \in f \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

- ***Surjektivní*** (*zobrazení na*), platí-li:

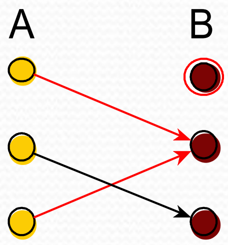
$$\forall y \in B\ \exists x \in A: (x, y) \in f$$

- **Bijektivní** (vzájemně jednoznačné), je-li současně *injektivní* i *surjektivní.*

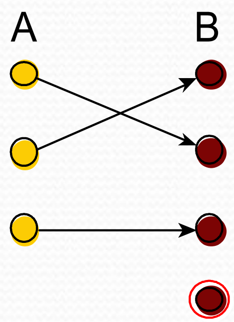
Zobrazení (funkce)

- *Příklady*

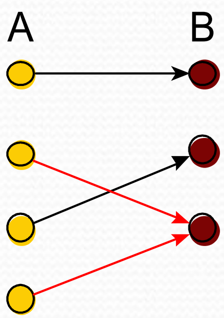
$f : A \rightarrow B$



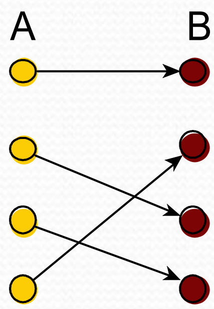
$g : A \rightarrow B$



$h : A \rightarrow B$



$i : A \rightarrow B$



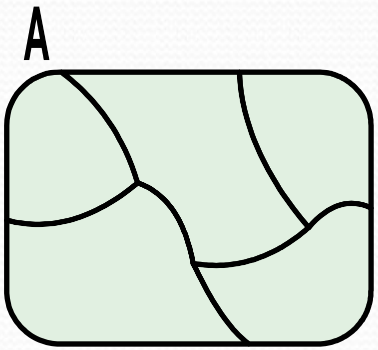
j: $Z \rightarrow Z$, $j(n)=n^2$, k: $Z \rightarrow N$, $k(n)=|n|$,
l: $N \rightarrow N$, $l(n)=n+1$, m: $R \rightarrow R$, $j(x)=x^3$

- *f, j* – nejsou *injektivní* ani *surjektivní*
- *h, k* – jsou *surjektivní*, nejsou *injektivní*
- *g, l* – jsou *injektivní*, nejsou *surjektivní*
- *l,m* – jsou *injektivní* i *surjektivní* ⇒ *bijekce*

Rozklady a ekvivalence

- Rozklad na množině A je systém:

  $X = \{ X_i;\ i \in I \}$ takový že:



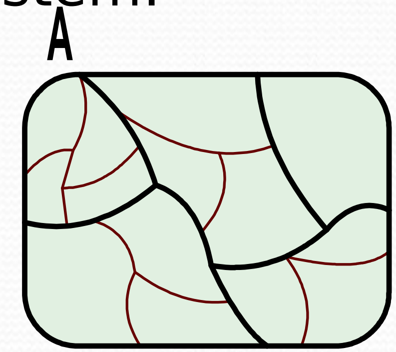
  - $X_i \subseteq A$ pro $\forall i \in I$
  - $X_i \cap X_j = \emptyset$ pro $\forall i,j \in I,\ i \neq j$
  - U X = A

  X_i – třídy rozkladu

- Zjemněním rozkladu $X = \{ X_i;\ i \in I \}$ je systém:

  $Y = \{ Y_j;\ j \in J \}$, jestliže:

  - $\forall j \in J,\ \exists i \in I$ *takové, že* $Y_j \subseteq X_i$



Rozklady a ekvivalence

- Nechť r je relace ekvivalence na množině A, X je rozklad na A, pak:
  - $X_r = \{[x]_r;\ x \in A\}$ – rozklad na A (*rozklad indukovaný ekvivalencí r, faktorová množina množiny A podle ekvivalence r*).
  - $r_X = \{(x,y);\ x$ a y patří do stejné třídy rozkladu $X\}$ – ekvivalence na A (*indukovaná rozkladem X*).

Příklad:

- $r \subseteq Z \times Z$; $r = \{(x,y);\ 3$ dělí $x\text{-}y\ \}$ $\Rightarrow$ $X=\{X_1, X_2, X_3\}$
- $X_1=\{\ldots -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$
- $X_2=\{\ldots -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$
- $X_3=\{\ldots -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}$

Uspořádání

- Je-li r relace uspořádání na A, pak se dvojice ***(A,r)*** nazývá ***uspořádaná množina*.**

- Značení $(A, \leq)$
  - *Příklady*: $(N, \leq)$, $(2^M, \subseteq)$

- Relace pokrytí

  Nechť $(A, \leq)$ uspořádaná množina, $(a,b)\in A$

  $a \prec b$ („b pokrývá a“) jestliže
  $a < b$ a $\neg\exists c \in A$: $a \leq c$ a $c \leq b$

  - *Příklad*: $(N, \leq)$, $\prec = \{(n,n+1);\ n \in N\}$

Uspořádání

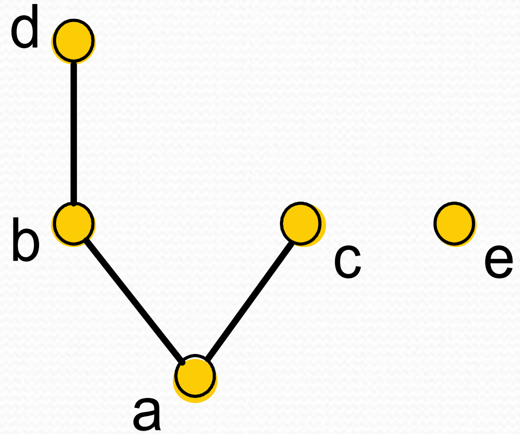
- Hasseovy diagramy – grafické znázornění

  - *Příklad*:

$(A, \leq)$, $A=\{a,b,c,d,e\}$

$r = \{(a,b), (a,c), (a,d), (b,d)\} \cup id_A$

$id_A=\{(a,a): a \in A\}$

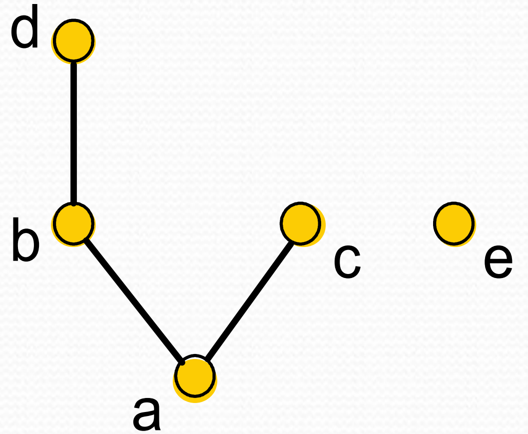


Uspořádání

Prvek *a* uspořádané množiny (A, $\leq$) se nazývá:

- Nejmenší: pro $\forall x \in A$: $a \leq x$
- Největší: pro $\forall x \in A$: $x \leq a$
- Minimální: pro $\forall x \in A$: $(x \leq a \Rightarrow x = a)$
- Maximální: pro $\forall x \in A$: $(a \leq x \Rightarrow x = a)$

- *Příklad*:
  - Nejmenší: *neexistuje*
  - Největší: *neexistuje*
  - Minimální: *a, e*
  - Maximální: *d, c, e*



Uspořádání

- Uspořádané množiny $(A, \leq)$, $(B, \leq)$ se nazývají ***izomorfní***, existuje-li bijekce $f\colon A \rightarrow B$ tak, že:

$$\forall x,y \in A\colon\ x \leq y \text{ právě když } f(x) \leq f(y)$$

- Jsou-li $(A, \leq)$, $(B, \leq)$ uspořádané množiny, nazývají se zobrazení $f\colon A \rightarrow B$ ***izotonní***, platí-li:

$$\forall x,y \in A\colon\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

- *Příklad*:
  - $f\colon N \rightarrow Z,\ f(x)=kx,\ k \in \mathrm{Z},\ \mathrm{k} \geq 0$ je izotonní
  - $g\colon N \rightarrow Z,\ g(x)=kx,\ k \in \mathrm{Z},\ \mathrm{k} \leq 0$ není izotonní

Uspořádání

- Nechť $(A, \leq)$ uspořádaná množina, $M \subseteq A$, *pak*
- $L_A(M)=\{x \in A;\ \forall m \in M:\ x \leq m\}$
  - Množina dolních závor (dolní kužel)
- $U_A(M)=\{x \in A;\ \forall m \in M:\ m \leq x\}$
  - Množina horních závor (horní kužel)
- $Inf_A(M)$ – největší prvek množiny $L_A(M)$
  - Infimum množiny M
- $Sup_A(M)$ – nejmenší prvek množiny $U_A(M)$
  - Supremum množiny M

Svaz - svazově uspořádaná množina

- Množina (A, $\leq$) se nazývá ***svaz*** (svazově uspořádaná množina), platí-li:

  $$\forall x,y \in A \;\; \exists s,i \in A : s = sup(\{x,y\}),\ i = inf(\{x,y\})$$

- Značení:
  - $x \vee y = sup(\{x,y\})$
  - $x \wedge y = inf(\{x,y\})$

- Existuje-li $sup(M)$ a $inf(M)$ pro ***každou*** $M \subseteq$ A, nazývá se (A, $\leq$) ***úplný svaz***.

Algebry

Algebra (*univerzální algebra*) je dvojice: **(A, F_A):**

- $A \neq \emptyset$ – nosič algebry
- $F_A = \{f_i: A^{p(f_i)} \rightarrow A;\ i \in I\}$ – množina operací na A
- *$p(f_i)$ – arita operace f_i*

- *Příklady:*

  - $(N, +^2, *^2)$
    množina přirozených čísel s operacemi sčítání a násobení
  - $(2^M, \cap, \cup)$
    množina všech podmnožin množiny M s operacemi průnik a sjednocení
  - $(F, \vee, \wedge)$
    množina *(F)* formulí výrokové logiky s operacemi konjunkce a disjunkce

Algebry s jednou binární operací

Grupoid **G**=(G,•)

- •: $G \times G \to G$
- Je-li množina G konečná, grupoid **G** se nazývá konečný.
- Řád grupoidu = $|G|$

Příklady grupodů:

- $G_1=(R,+)$, $G_2=(R,\cdot)$, $G_3=(N,+)$ ...

Algebry s jednou binární operací

- Konečný grupoid **G**=(*G*,•) lze popisovat pomocí *Cayleyovy tabulky*.

- *Příklad*: *G* = {a,b,c}

•	a	b	c
a	a	b	c
b	a	c	c
c	a	a	b

- Např.: a • b = b, b • a = a, c • c = b ...

Algebry s jednou binární operací

Nechť $\mathbf{G}=(G,\bullet)$ je grupoid $\mathbf{G}$ se nazývá:

- Komutativní, platí-li v **G**:
  - $(\forall a,b\in G)(a \bullet b = b \bullet a)$
- Asociativní, platí-li v **G**:
  - $(\forall a,b,c\in G)((a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c))$
- S jednotkovým (neutrálním) prvkem, platí-li v **G**:
  - $(\exists e \in G\ \forall a\in G)(a \bullet e = a = e \bullet a)$
- S nulovým (agresivním) prvkem, platí-li v **G**:
  - $(\exists o \in G\ \forall a\in G)(a \bullet o = o = o \bullet a)$
- S inverzními prvky, platí-li v **G**:
  - $(\forall a\in G\ \exists b \in G)(a \bullet b = e = b \bullet a)$

Algebry s jednou binární operací

Příklady:

- $(R, \cdot)$, $(N, +)$ – komutativní i asociativní.
- $(R, \bullet)$, $a \bullet b = (a+b) / 2$ – komutativní, není asociativní.
- $(R, \bullet)$, $a \bullet b = a^b$ – není komutativní ani asociativní.
- $(R, \cdot)$ – 1 = jednotkový prvek, 0 = nulový prvek.

Algebry s jednou binární operací

Nechť $\mathbf{G}=(G,\bullet_G)$ je grupoid. $H\subseteq G$ se nazývá **uzavřená** (vzhledem k operaci $\bullet_G$), platí-li:

- $(\forall a,b\in H)(a \bullet_G b \in H)$

Grupoid $\mathbf{H}=(H,\bullet_H)$ je **podgrupoidem** grupoidu $\mathbf{G}=(G,\bullet_G)$, platí-li:

- $\emptyset \neq H \subseteq G$ je uzavřená
- $\forall a,b\in H\colon a \bullet_H b = a \bullet_G b$

- *Příklady*:
  - $(N,+_N)$ je podgrupoidem $(Z,+_Z)$
  - $\{0,1,2\}$ není nosičem podgrupoidu $(Z,+_Z)$

Algebry s jednou binární operací

- Nechť $\mathbf{G_1}=(G_1, \bullet_1)$, $\mathbf{G_2}=(G_2, \bullet_2)$.

- $\mathbf{G_1} \times \mathbf{G_2} =(G_1 \times G_2, \bullet)$ – **direktní součin $\mathbf{G_1}$ a $\mathbf{G_2}$**, kde:
  - $(a_1, a_2) \bullet (b_1, b_2) = (a_1 \bullet_1 b_1, a_2 \bullet_2 b_2)$

Příklad:

- $\mathbf{G_1}=(Z,+)$, $\mathbf{G_2}=(Z,\cdot)$.
- $\mathbf{G_1} \times \mathbf{G_2} =(Z \times Z, \bullet)$,
- $(a_1, a_2) \bullet (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 \cdot b_2)$
- $(1,2)(3,4) = (1+3, 2 \cdot 4) = (4,8)$ atd.

Algebry s jednou binární operací

- Nechť **G** $=(G, \bullet_G)$, **H** $=(H, \bullet_H)$ jsou grupoidy a $h: G \to H$ zobrazení.
- *h* se nazývá **homomorfismus** grupoidu **G** do grupoidu **H**, platí-li:
- $\forall a,b \in G$: $h(a \bullet_G b) = h(a) \bullet_H h(b)$

Typy homomorfismů:

- Monomorfismus – *h* je injektivní
- Epimorfismus – *h* je surjektivní
- Izomorfismus – *h* je bijektivní
- Endomorfismus – **H**=**G**
- Automorfismus – bijektivní a **H**=**G**

Algebry s jednou binární operací

r je **kongruence** na grupoidu $\mathbf{G}=(G,\bullet^{\mathbf{G}})$, pokud:

- r je binární relace: $\theta \subseteq G\times G$
- r je ekvivalence
- $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in r \;\Rightarrow\; (a_1 \bullet^{\mathbf{G}} b_1, a_2 \bullet^{\mathbf{G}} b_2) \in r$

faktorový grupoid grupoidu **G** podle kongruence r:

$\mathbf{G}/r=(G/r,\bullet^{\mathbf{G}/r})$, $[a]_r \bullet^{\mathbf{G}/r} [b]_r = [a \bullet^{\mathbf{G}} b]_r$

Příklad:

- $r \subseteq Z\times Z$; $r = \{(x,y);\ 3 \text{ dělí } x\text{-}y\}$
- r je kongruence na (Z,+)

•	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[1]	[2]
[1]	[1]	[2]	[0]
[2]	[2]	[0]	[1]

Algebry s jednou binární operací

Typy grupoidů:

- Pologrupa – asociativní grupoid.
- Monoid – pologrupa s jednotkovým prvkem.
- **Grupa** – monoid s inverzními prvky.
- **Abelova grupa** – komutativní grupa.

Příklady:

- $(Z, -)$ – grupoid, není pologrupou
- $(N - \{0\}, +)$ – pologrupa, není monoidem.
- $(N, \cdot)$ – monoid, není grupou.
- $(Z, +)$ – Abelova grupa.

Algebry se dvěma binárními operacemi

Algebra **$(A,+,\cdot)$** se nazývá **Okruh**, platí-li:

- $(A,+)$ je komutativní grupa
- $(A,\cdot)$ je monoid
- pro $\forall a,b,c \in A$ platí: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$, $(b+c)\cdot a=b\cdot a + c\cdot a$

- Je-li $|A|>1$, nazývá se $(A,+,\cdot)$ **netriviální okruh**.

- Nechť $\mathbf{0} \in A$ je neutrální prvek grupy $(A,+)$. Pak $\mathbf{0}$ se nazývá **nulou okruhu** $(A,+,\cdot)$.

- Nechť $\mathbf{1} \in A$ je jednotkový prvek monoidu $(A,\cdot)$. Pak $\mathbf{1}$ se nazývá **jednotkou (jedničkou) okruhu** $(A,+,\cdot)$.

Algebry se dvěma binárními operacemi

Okruh $(A,+,\cdot)$ se nazývá **těleso**, platí-li:

- $(A - \{0\},\cdot)$ je komutativní grupa

Příklady:

- $(\mathbf{Z},+,\cdot)$ – okruh, není těleso
- $(\mathbf{R},+,\cdot)$, $(\mathbf{C},+,\cdot)$ – tělesa

Svaz – algebraická struktura

- **Svaz L = (L, $\vee$, $\wedge$)**
- $\vee : L \times L \rightarrow L$, $\wedge : L \times L \rightarrow L$
- $\forall x, y, z \in L$ platí:

$x \vee x = x$	$x \wedge x = x$	idempotence
$x \vee y = y \vee x$	$x \wedge y = y \wedge x$	komutativita
$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$	$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$	asociativita
$x \vee (x \wedge y) = x$	$x \wedge (x \vee y) = x$	absorpce

Svaz – algebraická struktura

Nechť $(A, \vee, \wedge)$ je svaz, $(B, \leq)$ je svazově uspořádaná množina:

- Definujme na A relaci $\leq_{\vee}$:

$$a \leq_{\vee} b \text{ právě když } a \vee b = b$$

- Definujme na B operace $\vee_{\leq}$ a $\wedge_{\leq}$

$$a \vee_{\leq} b = sup\{a,b\},\ a \wedge_{\leq} b = inf\{a,b\},$$

Pak platí:

- $(A, \leq)$ je svazově uspořádaná množina, kde:

$$sup\{a,b\} = a \vee b,\ inf\{a,b\} = a \wedge b$$

- $(B, \vee_{\leq}, \wedge_{\leq})$ je svaz
- $(A, \vee, \wedge) = (A, \vee_{\leq}, \wedge_{\leq})$

Svaz – algebraická struktura

Svaz $(L, \vee, \wedge)$ je

- Modulární, platí-li $\forall x, y, z \in L$:

$$x \leq z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$$

- Distributivní, platí-li $\forall x, y, z \in L$:

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$
$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

- Komplementární, platí-li:

Existuje nejmenší prvek $0 \in L$, největší prvek $1 \in L$

$$\forall x \in L\ \exists x' \in L : x \wedge x' = 0,\ x \vee x' = 1$$

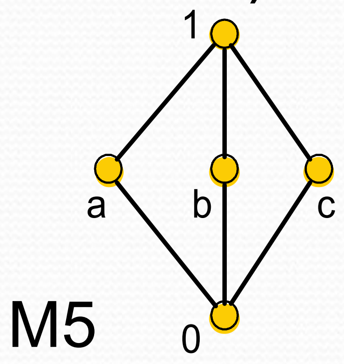
x' se nazývá doplňkem (komplementem) prvku x

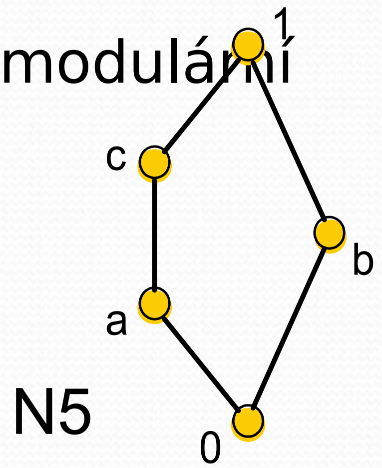
Svaz – algebraická struktura

- Každý distributivní svaz je modulární

Příklad:

- M5 (*diamant*) – modulární svaz, který není distributivní
- N5 (*pětiúhelník*) – není modulární





Svaz – algebraická struktura

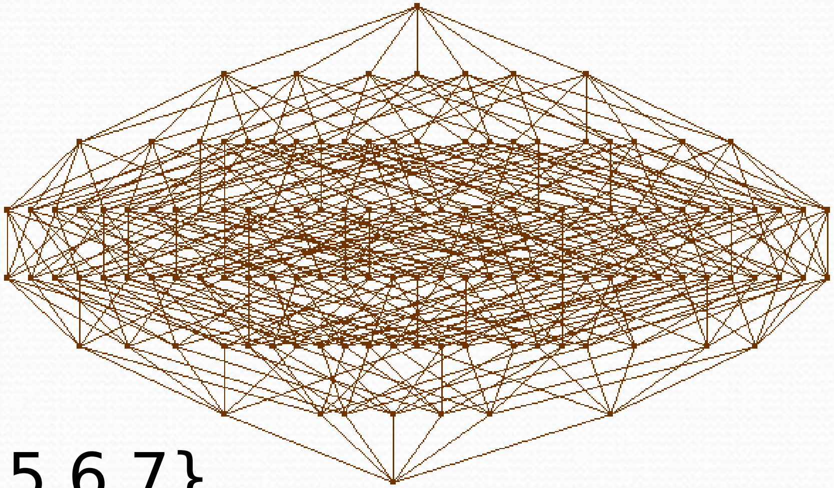
Svaz $(L, \vee, \wedge)$ se nazývá Booleův svaz, je-li:

- Komplementární, distributivní s nejmenším prvkem $0 \in L$ a největším prvkem $1 \in L$

Booleova algebra:

- $(L, \vee, \wedge, -, 0, 1)$, $- : L \to L$ je operace komplementu v L

Příklad:



- $(2^A, \cup, \cap)$, $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$