Matematická logika

Aristotelova logika (přednáška 6,7)

Marie Duží
marie.duzi@vsb.cz

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Platón, Aristoteles (vpravo)

384 – 322

Mine is the first step and therefore a small one, though worked out with much thought and hard labour. You, my readers or hearers of my lectures, if you think I have done as much as can fairly be expected of an initial start. . . will acknowledge what I have achieved and will pardon what I have left for others to accomplish.

Aristotelova logika

- Řecký filosof a zakladatel logiky Aristoteles zkoumal před více než 2000 lety tzv. ***Subjekt – Predikátové výroky*** *a* ***úsudky z nich vytvořené***:

- Všechna S jsou P SaP ***a***_ffirmo_
- Žádné S není P SeP _n_***e***_go_
- Některá S jsou P SiP _aff_***i***_rmo_
- Některá S nejsou P SoP _neg_***o***

Všechny pojmy S, P jsou zde vždy **neprázdné.**

Z dnešního pohledu jde o fragment predikátové logiky

Výrokovou logiku zkoumali v té době stoici (v opozici Aristotelovi), kteří rovněž postihli základy predikátové logiky. (*Viz František Gahér:* Stoická sémantika a logika).

Aristotelova logika: log. čtverec

	kladné	záporné
obecné	***SaP***	***SeP***
částečné	***SiP***	***SoP***

$SaP \equiv \neg SoP$,	$SeP \equiv \neg SiP$	kontradiktorické
$SaP \models \neg SeP$,	$SeP \models \neg SaP$	kontrární
$\neg SiP \models SoP$,	$\neg SoP \models SiP$	subkontrární
$SaP \models SiP$,	$SeP \models Sop$,	subalterní:
$\neg SiP \models \neg SaP$,	$\neg SoP \models \neg SeP$	neboli podřízené

Logický čtverec - obraty

SiP ⇔ PiS

Někteří studenti jsou ženatí ⇔ Někteří ženatí jsou studenti.

SeP ⇔ PeS

Žádný člověk není strom ⇔ Žádný strom není člověk.

SaP ⊨ PiS

Všichni učitelé jsou státní zaměstnanci ⊨ Někteří státní zaměstnanci jsou učitelé.

SeP ⊨ PoS

Žádné jedovaté houby nejsou jedlé ⊨ Některé jedlé houby nejsou jedovaté.

Logický čtverec (důkazy vztahu)

	kladné	záporné
obecné	***SaP***	***SeP***
částečné	***SiP***	***SoP***

SaP ⇔ ¬SoP, SeP ⇔ ¬SiP ***kontradiktorické*** (po diagonále)***.***

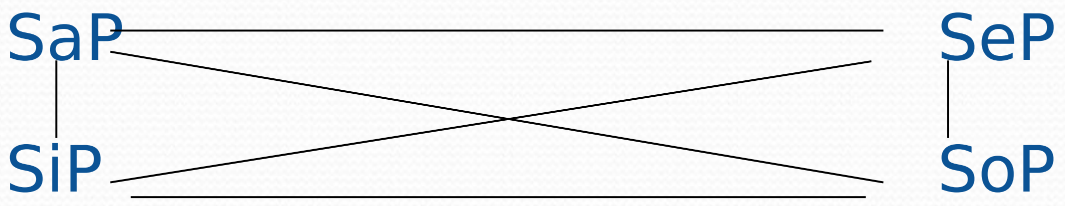
Všechna S jsou P ⇔ Není pravda, že některá S nejsou P

Důkaz (de Morgan): $\forall x\,[S(x) \supset P(x)] \Leftrightarrow \neg\exists x\,[S(x) \wedge \neg P(x)]$

Žádné S není P ⇔ Není pravda, že některá S jsou P

Důkaz (de Morgan): $\forall x\,[S(x) \supset \neg P(x)] \Leftrightarrow \neg\exists x\,[S(x) \wedge P(x)]$

Logický čtverec (pokračování)



SaP $\models \neg$SeP, SeP $\models \neg$SaP ***kontrární***

Všechna S jsou P $\models$ Není pravda, že žádné S není P

$$\forall x\,[S(x) \supset P(x)] \models \neg \forall x\,[S(x) \supset \neg P(x)]$$

Důkaz (sémanticky): *Je-li* $S^U \subseteq P^U$, pak nemůže být S^U podmnožinou komplementu P^U, tedy *není* $S^U \subseteq \neg P^U$.

Žádné S není P $\models$ Není pravda, že všechna S jsou P

$$\forall x\,[S(x) \supset \neg P(x)] \models \neg \forall x\,[S(x) \supset P(x)]$$

Důkaz (sémanticky): *Je-li* $S^U \subseteq \neg P^U$ (komplementu), pak nemůže být S^U podmnožinou P^U, tedy *není* $S^U \subseteq P^U$.

Logický čtverec (pokračování)

$\neg$SiP $\models$ SoP, $\neg$SoP $\models$ SiP subkontrární

Není pravda, že některá S jsou P $\models$ Některá S nejsou P

$$\neg\exists x\,[S(x) \wedge P(x)] \Leftrightarrow \forall x\,[S(x) \supset \neg P(x)]$$

Je-li $S^U \subseteq \neg P^U$ (podmnožinou komplementu) a $S^U \neq \Phi$ (je ***neprázdné***), pak je neprázdný také průnik S^U a komplementu P^U: $(S^U \cap \neg P^U) \neq \Phi$, tj. $\exists x\,[S(x) \wedge \neg P(x)]$

Analogicky: Není pravda, že některá S nejsou P $\models$ Některá S jsou P (za předpokladu neprázdnosti).

SaP $\models$ SiP, SeP $\models$ Sop, subalterní:

$\neg$SiP $\models$ $\neg$SaP, $\neg$SoP $\models$ $\neg$SeP neboli podřízené

Analogicky důkaz pro zbylé vztahy: Všechna S jsou P, tedy některá S jsou P, atd.

Vše za ***předpokladu neprázdnosti***

Logický čtverec - obraty

SiP ⇔ PiS   SeP ⇔ PeS

Některá S jsou P ⇔ Některá P jsou S

Žádné S není P ⇔ Žádné P není S

$$\exists x\,[S(x) \wedge P(x)] \Leftrightarrow \exists x\,[P(x) \wedge S(x)]$$

$$\forall x\,[S(x) \supset \neg P(x)] \Leftrightarrow \forall x\,[P(x) \supset \neg S(x)]$$

SaP ⊨ PiS   SeP ⊨ PoS

Všechna S jsou P ⊨ Některá P jsou S

Žádné S není P ⊨ Některá P nejsou S

$$\forall x\,[S(x) \supset P(x)] \wedge \exists x\, S(x) \models \exists x\,[P(x) \wedge S(x)]$$

$$\forall x\,[S(x) \supset \neg P(x)] \wedge \exists x\, P(x) \models \exists x\,[P(x) \wedge \neg S(x)]$$

Aristotelovy sylogismy

- Jednoduché úsudky tvořené kombinacemi tří predikátů S, P, M, kde M je zprostředkující predikát, který se v závěru neopakuje, závěr je vždy tvaru S-P.

I. M-P II. P-M III. M-P IV. P-M

S-M S-M M-S M-S

- Správné módy jsou:

I. aaa, eae, aii, eio (barbara, celarent, darii, ferio).

II. aoo, aee, eae, eio (baroco, camestres, cesare, festino).

III. oao, aai, aii, iai, eao ,eio (bocardo, darapti, datisi, disamis, felapton, ferison).

IV. aai, aee, iai, eao, eio (bamalip, calemes, dimatis, fesapo, fresison).

- *Neučíme se pochopitelně nazpaměť správné módy, ale odvodíme si platnost úsudku metodou Vennových diagramů.*

Aristotelova logika: sylogismy

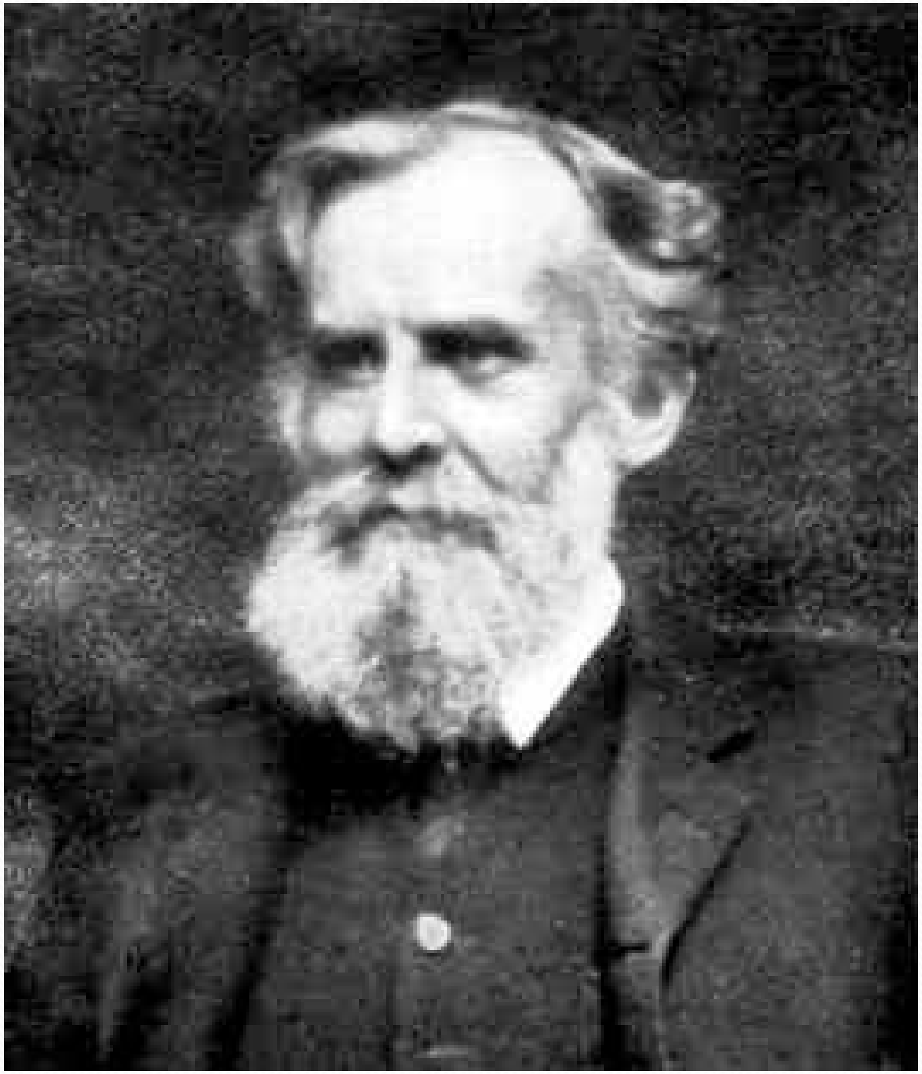
Ověříme na základě množinových úvah pomocí **Vennových diagramů**:

- Obory pravdivosti predikátů S, P, M zakreslíme jako (vzájemně se protínající) kroužky. Poté znázorníme situaci, kdy jsou premisy pravdivé, tj.
  - Vyšrafujeme plochy, které odpovídají prázdným třídám objektů (všeobecné předpoklady)
  - Označíme křížkem plochy, které jsou jistě neprázdné (existenční předpoklady); křížek přitom klademe jen tehdy, když neexistuje jiná plocha, "kam by mohl přijít"
- Nakonec ověříme, zda vzniklá situace znázorňuje pravdivost závěru.

John Venn

1834 - 1923

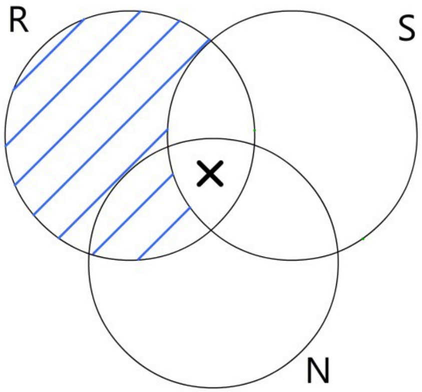
Cambridge



Sylogismy a Vennovy diagramy

- Všechny rodinné domy jsou soukromým vlastnictvím $\forall x\,[R(x) \supset S(x)]$
- Některé nemovitosti jsou rodinné domy $\exists x\,[N(x) \wedge R(x)]$

- Některé nemovitosti jsou soukromým vlastnictvím $\exists x\,[N(x) \wedge S(x)]$



Dle 1. premisy je prázdná množina R / S

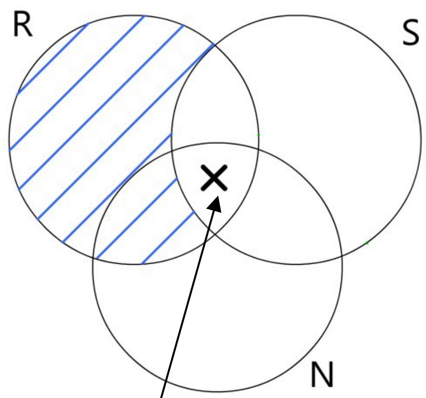
Dle druhé premisy je neprázdný průnik R a N – uděláme křížek.

Důležité je **pořadí**: **nejdřív vyškrtáme** *prázdné plochy,* **pak klademe křížek.**

Sylogismy a Vennovy diagramy

- Všechny rodinné domy jsou soukromým vlastnictvím $\forall x\,[R(x) \supset S(x)]$
- Některé nemovitosti jsou rodinné domy $\exists x\,[N(x) \wedge R(x)]$

- Některé nemovitosti jsou soukromým vlastnictvím $\exists x\,[N(x) \wedge S(x)]$



Dle 1. premisy je prázdná množina R / S

Dle druhé premisy je neprázdný průnik R a N – uděláme křížek.

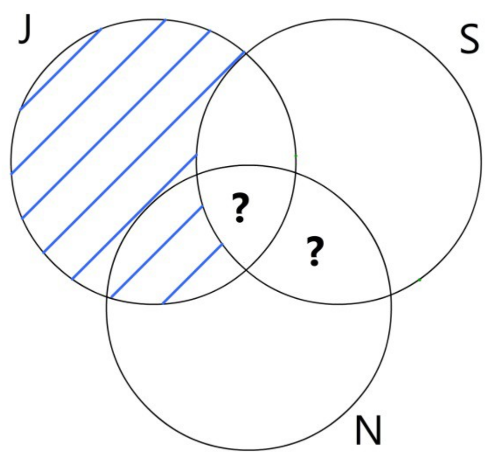
Ověříme pravdivost závěru: průnik ploch N a S musí být neprázdný.

Úsudek je platný.

Sylogismy a Vennovy diagramy

- Všichni jezevci jsou sběratelé umění $\forall x\ [J(x) \supset S(x)]$
- Někteří sběratelé umění žijí v norách $\exists x\ [S(x) \wedge N(x)]$

- Někteří jezevci žijí v norách $\exists x\ [J(x) \wedge N(x)]$



Dle 1. premisy neexistuje jezevec, který není sběratel – šrafujeme.

Jak však znázorníme pravdivost 2. premisy? Průnik S a N je neprázdný, ale nevíme, kam dát křížek!

Úsudek je neplatný.

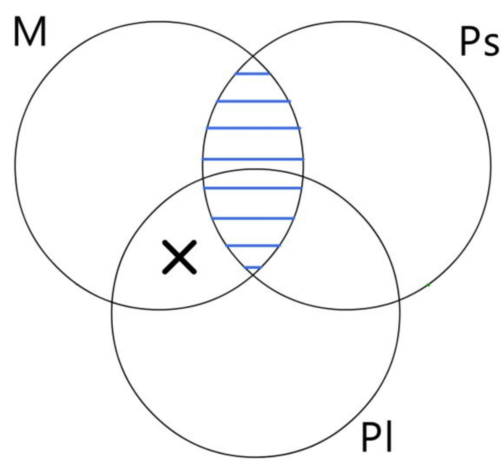
Sylogismy – ověření platnosti

- Někteří politici jsou moudří lidé $\exists x\, [Pl(x) \wedge M(x)]$
- Nikdo, kdo je moudrý, není pyšný $\forall x\, [M(x) \supset \neg Ps(x)]$

- Někteří politici nejsou pyšní $\exists x\, [Pl(x) \wedge \neg Ps(x)]$

Nejdříve vyhodnotíme všeobecnou premisu 2 !

Neexistuje žádné M, které by bylo Ps: škrtáme průnik M a Ps



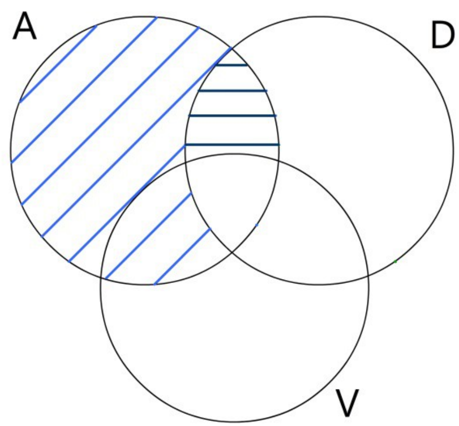
Dle 1. premisy je neprázdný průnik M a Pl: uděláme křížek

Vyhodnotíme závěr: průnik Pl a komplementu Ps musí být neprázdný: pravdivost zaručena, ***úsudek je platný.***

Sylogismy – ověření platnosti

- Všechna auta jsou dopravní prostředky $\forall x\,[A(x) \supset D(x)]$
- Všechna auta mají volant $\forall x\,[A(x) \supset V(x)]$

- Některé dopravní prostředky mají volant $\exists x\,[D(x) \wedge V(x)]$



1. Premisa - Plocha A musí být podmnožinou plochy D: šrafujeme.

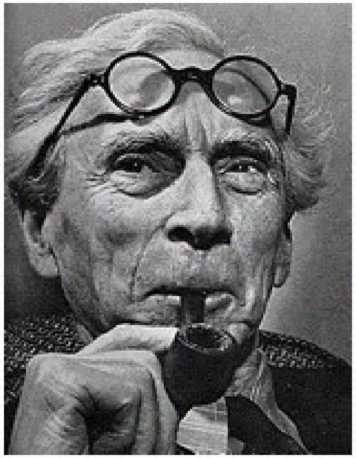
Dle 2. premisy je plocha A podmnožinou plochy V: šrafujeme.

Vyhodnotíme závěr: pravdivost není zaručena, křížek v průniku D a V není! ***Úsudek je neplatný.***

Všeobecné premisy **ne**╞ existence

- Všechny skleněné hory jsou skleněné
- Všechny skleněné hory jsou hory

- |≠ Některé hory jsou skleněné



Příklad Bertranda Russella (1872-1970)

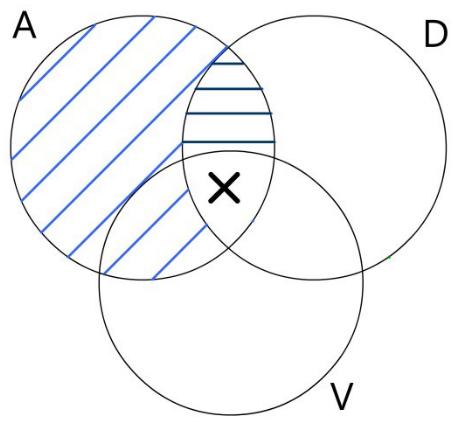
Úsudek je neplatný.

Sylogismy – ověření platnosti

- Všechna auta jsou dopravní prostředky $\forall x\,[A(x) \supset D(x)]$
- Všechna auta mají volant $\forall x\,[A(x) \supset V(x)]$
- Existují auta (implicitní předpoklad) $\exists x\, A(x)$

- Některé dopravní prostředky mají volant $\exists x\,[D(x) \wedge V(x)]$

1. Premisa - Plocha A musí být podmnožinou plochy D: šrafujeme.



Dle 2. premisy je plocha A podmnožinou plochy V: šrafujeme.

Dle 3. premisy uděláme křížek na plochu A.

Vyhodnotíme závěr: pravdivost je zaručena, křížek v průniku D a V je, ***úsudek je platný***

Širší použití, nejen na sylogismy

P_1: Všichni státníci jsou politici $\forall x\,[S(x) \supset P(x)]$

P_2: Někteří státníci jsou inteligentní $\exists x\,[S(x) \wedge I(x)]$

P_3: Někteří politici nejsou státníci $\exists x\,[P(x) \wedge \neg S(x)]$

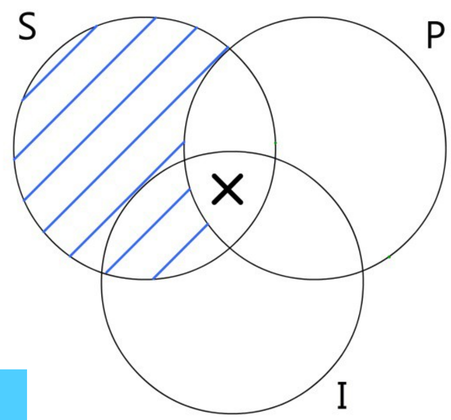
Z_1: $\Rightarrow$? Někteří politici nejsou inteligentní $\exists x\,[P(x) \wedge \neg I(x)]$?

Z_2: $\Rightarrow$? Někteří politici jsou inteligentní $\exists x\,[P(x) \wedge I(x)]$?

P_1: šrafujeme S / P.

P_2: klademe křížek na průnik ploch S a I.

P_3: nemůžeme udělat křížek, nevíme na kterou plochu.



Z_1: nevyplývá, křížek není.

Z_2: vyplývá, křížek je.

Vennovy diagramy

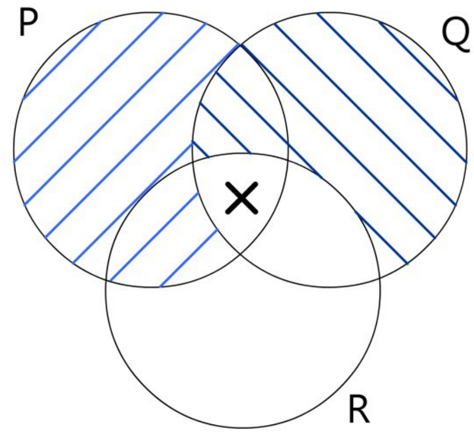
P_1: Všichni zahradníci jsou zruční. $\forall x\ [P(x) \supset Q(x)]$

P_2: Každý, kdo je zručný, je inteligentní. $\forall x\ [Q(x) \supset R(x)]$

~~(P_3: Existuje aspoň jeden zahradník.) $\exists x\ P(x)$)~~

Z: Některí zahradníci jsou inteligentní. $\exists x\ [P(x) \wedge R(x)]$

1. premisa říká, že neexistuje prvek, který by byl v množině P a nebyl v množině Q (De Morgan) – tedy šrafujeme.



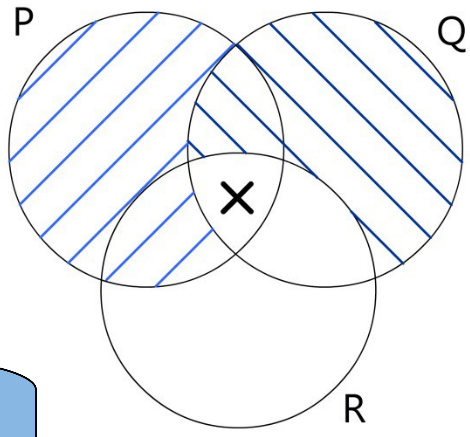
2. premisa říká, že neexistuje prvek, který by byl v množině Q a nebyl v množině R (De Morgan) – tedy šrafujeme.

3. premisa zaručuje neprázdnost množiny P, tedy (děláme křížek).

Vennovy diagramy

P_1:	Všichni zahradníci jsou zruční.	$\forall x\ [P(x) \supset Q(x)]$
P_2:	Každý, kdo je zručný, je inteligentní.	$\forall x\ [Q(x) \supset R(x)]$
(P_3:	Existuje aspoň jeden zahradník.	$\exists x\ P(x)$)

Z: Někteří zahradníci jsou inteligentní. $\exists x\ [P(x) \wedge R(x)]$



Nyní otestujeme, zda křížek v diagramu odpovídá našemu závěru.

Křížek v diagramu, opravdu náleží průniku množin P a R, tedy odpovídá našemu závěru, proto je úsudek **PLATNÝ.**

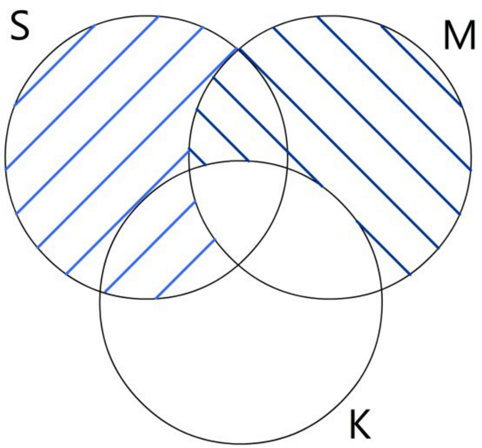
Vennovy diagramy

P_1: Všichni studenti umějí logicky myslet. $\forall x\,[S(x) \supset M(x)]$

P_2: Pouze koumáci umějí logicky myslet. $\forall x\,[M(x) \supset K(x)]$

Z: Všichni studenti jsou koumáci. $\forall x\,[S(x) \supset K(x)]$

1. premisa říká, že neexistuje prvek, který by byl v množině S a nebyl v množině M (De morgan) – tedy šrafujeme.



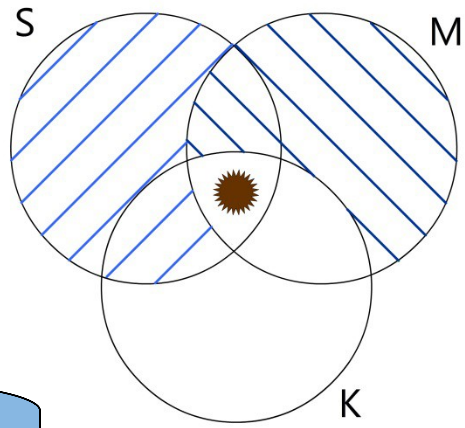
2. premisa říká, že neexistuje prvek, který by byl v množině M a nebyl v množině K (M je podmnožinou K) – tedy šrafujeme.

Vennovy diagramy

P_1: Všichni studenti umějí logicky myslet. $\forall x\, [S(x) \supset M(x)]$

P_2: Pouze koumáci umějí logicky myslet. $\forall x\, [M(x) \supset K(x)]$

Z: Všichni studenti jsou koumáci. $\forall x\, [S(x) \supset K(x)]$



Závěr říká, že všechny prvky ležící v množině S leží taktéž v množině K. To opravdu podle diagramu platí, tedy úsudek je **PLATNÝ.**

Nyní otestujeme, zda nevyšrafované oblasti vystihují náš závěr.

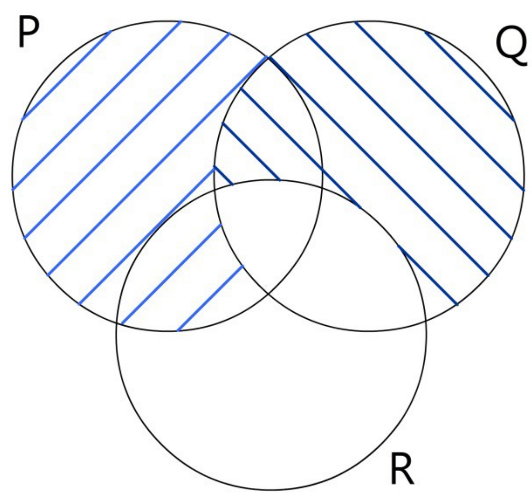
Vennovy diagramy

P_1: Všichni studenti logiky se učí logicky myslet. $\forall x\,[P(x) \supset Q(x)]$

~~P_2: Kdo se učí logicky myslet, ten se neztratí.~~ $\forall x\,[Q(x) \supset R(x)]$

Z: Někteří studenti logiky se neztratí. $\exists x\,[P(x) \wedge R(x)]$

1. premisa říká, že neexistuje prvek, který by byl v množině P a nebyl v množině Q (De Morgan) – tedy šrafujeme



2. premisa říká, že neexistuje prvek, který by byl v množině Q a nebyl v množině R (De morgan) – tedy šrafujeme

Vennovy diagramy

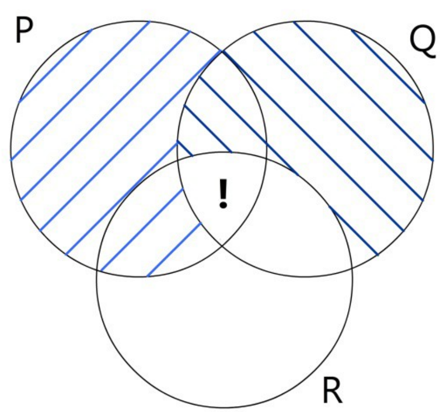
P_1: Všichni studenti logiky se učí logicky myslet. $\forall x\,[P(x) \supset Q(x)]$

P_2: Kdo se učí logicky myslet, ten se neztratí. $\forall x\,[Q(x) \supset R(x)]$

Z: Někteří studenti logiky se neztratí. $\exists x\,[P(x) \wedge R(x)]$

Poznámka:

V tradiční Aristotelově logice je tento úsudek považován za platný. Avšak, ze všeobecných premis nemůžeme usuzovat na existenci! Nezapomeňte však, že dle



Nyní otestujeme, zda je opravdu úsudek platný či nikoliv.

Závěr říká, že existuje prvek v průniku množin P a R. Diagram ale toto nepotvrzuje (není křížek), proto úsudek je **NEPLATNÝ.**

Vennovy diagramy

P_1: Všichni studenti logiky se učí logicky myslet. $\forall x\ [P(x) \supset Q(x)]$

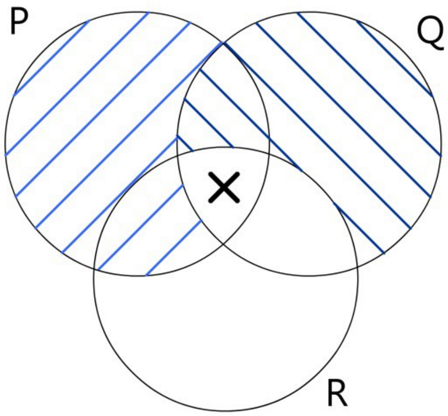
P_2: Kdo se učí logicky myslet, ten se neztratí. $\forall x\ [Q(x) \supset R(x)]$

Existují studenti logiky (implicitní předpoklad) $\exists x\ P(x)$

Z: Někteří studenti logiky se neztratí. $\exists x\ [P(x) \wedge R(x)]$

Poznámka:

dle Aristotela jsou zde všechny pojmy ***neprázdné.*** Přidáme-li implicitní předpoklad, že existují studenti logiky, je úsudek platný.



Nyní můžeme na plochu odpovídající průniku P a R dát křížek – je neprázdná.

Závěr říká, že existuje prvek v průniku množin P a R. Diagram toto nyní potvrzuje (je křížek), proto úsudek je **PLATNÝ.**

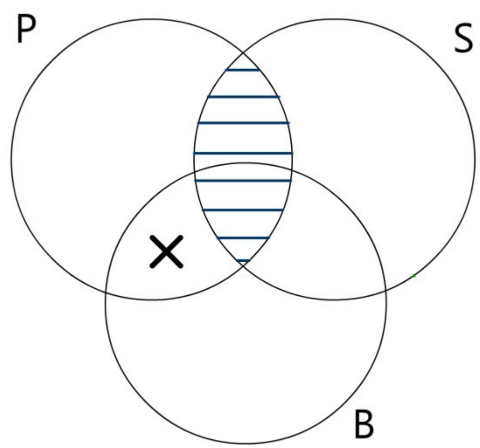
Vennovy diagramy a sylogismy

P_1: Žádný pták není savec $\forall x\,[P(x) \supset \neg S(x)]$

P_2: Někteří ptáci jsou běžci $\exists x\,[P(x) \wedge B(x)]$

Z: Někteří běžci nejsou savci $\exists x\,[B(x) \wedge \neg S(x)]$

1. premisa říká, že neexistuje prvek, který by byl v průniku množin P a S – tedy šrafujeme.



2. premisa říká, že průnik P a B je neprázdný – klademe křížek.

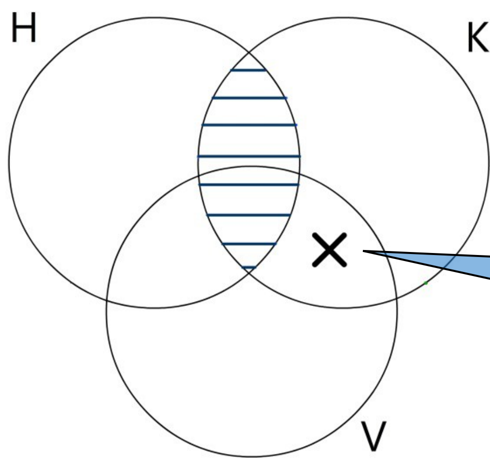
Ověříme závěr: průnik P a komplementu S je neprázdný, ***úsudek je platný.***

Vennovy diagramy

P_1: Někteří vládci jsou krutí. $\exists x\ [V(x) \wedge K(x)]$

P_2: Žádný dobrý hospodář není krutý. $\forall x\ [H(x) \supset \neg K(x)]$

Z: Některá vládci nejsou dobří hospodáři. $\exists x\ [V(x) \wedge \neg H(x)]$

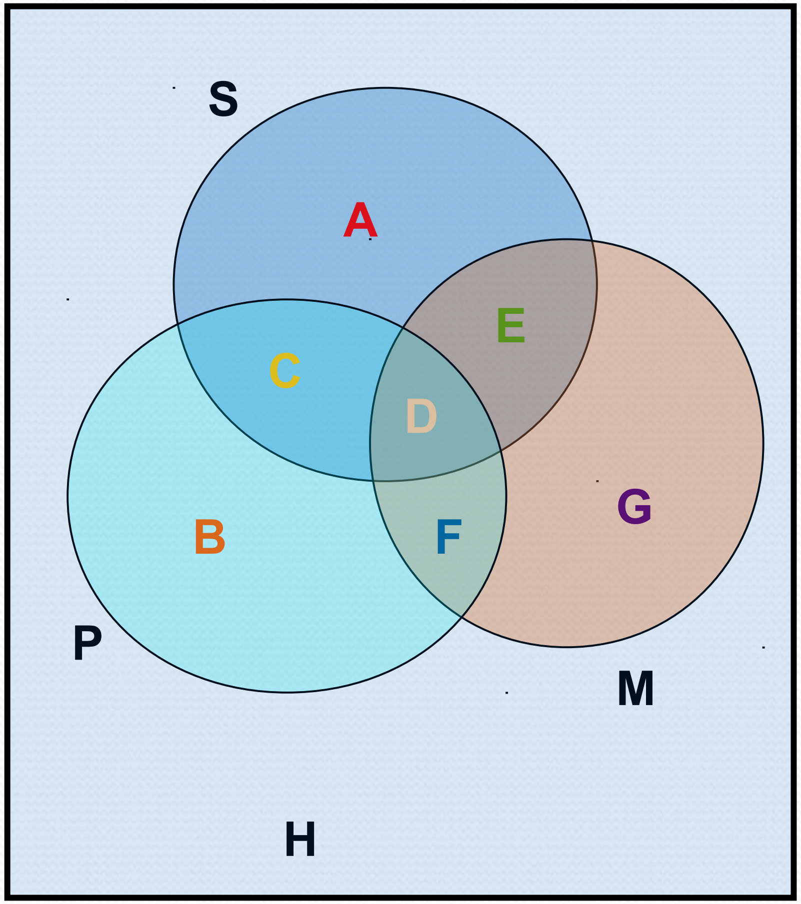


Nejprve 2. premisa: šrafujeme průnik H a K.

Pak dle 1. premisy klademe křížek na průnik V a K.

Nyní testujeme závěr: průnik V a komplementu H je neprázdný.
Úsudek je platný

Definice ploch



A : $S(x) \wedge \neg P(x) \wedge \neg M(x)$

B : $\neg S(x) \wedge P(x) \wedge \neg M(x)$

C : $S(x) \wedge P(x) \wedge \neg M(x)$

D : $S(x) \wedge P(x) \wedge M(x)$

E : $S(x) \wedge \neg P(x) \wedge M(x)$

F : $\neg S(x) \wedge P(x) \wedge M(x)$

G : $\neg S(x) \wedge \neg P(x) \wedge M(x)$

H: $\neg S(x) \wedge \neg P(x) \wedge \neg M(x)$