Matematická logika

Predikátová logika 1.řádu (5.přednáška)

Marie Duží
marie.duzi@vsb.cz

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Jednoduché úsudky, kde VL nestačí

- Všechny opice mají rády banány
- Judy je opice
- ⇒ Judy má ráda banány

Z hlediska VL jsou to ***jednoduché výroky***

p, *q*, *r* a z *p*, *q* nevyplývá *r*

- Všichni studenti jsou chytří
- Karel není chytrý
- ⇒ Karel není student

Jaké je zde platné úsudkové schéma?

Úsudková schémata

Schéma připomíná platná schémata VL:

$p \supset q, p \models q$ či $p \supset q, \neg q \models \neg p$

Ale ve VL nemůžeme (roz)analyzovat tyto jednoduché výroky. Zkusme je přeformulovat:

- Každé individuum, je-li Opice, pak má rádo Banány
- Judy je individuum s vlastností být Opice
- ⇒ Judy je individuum s vlastností mít rádo Banány

$$\forall x\, [O(x) \supset B(x)], O(J) \models B(J),$$

kde x je individuová proměnná, O, B predikátové symboly, J (nulární) funkční symbol.

Úsudková schémata

- Jde opět o schéma: Za *O*, *B*, *J* můžeme dosadit jiné vlastnosti či jiné individuum, např. po řadě člověk, smrtelný, Karel. Dostaneme opět platný úsudek, neboť se jedná o platné schéma:

  - Všichni lidé jsou smrtelní.
  - Karel je člověk.

  ———————————

  - Karel je smrtelný.

- *O*, *B*, *J* jsou zde pouze **symboly** zastupující vlastnosti a individua

Formální jazyk PL1 - Abeceda

- Logické symboly
  - individuové proměnné: *x*, *y*, *z*, ...
  - Symboly pro spojky: ¬, ∧, ∨, ⊃, ≡
  - Symboly pro kvantifikátory: ∀, ∃
- Speciální symboly
  - Predikátové: P^n, Q^n, ... *n* – arita = počet argumentů.
  - Funkční: f^n, g^n, h^n, ... *n* – arita = počet argumentů.
- Pomocné symboly: závorky (,), ...

Formální jazyk PL1 - Gramatika

- **Termy**:

1. každý symbol proměnné *x, y, …* je term.
2. jsou-li $t_1,\dots,t_n$ ($n \geq 0$) termy a je-li f n-ární funkční symbol, pak výraz $\boldsymbol{f(t_1,\dots,t_n)}$ je term; pro $n = 0$ se jedná o individuovou konstantu (značíme a, b, c, …).
3. jen výrazy dle 1. a 2. jsou termy

Formální jazyk PL1 - Gramatika

- **Atomické formule**:
  - je-li P *n*-ární predikátový symbol a jsou-li $t_1,\ldots,t_n$ termy, pak výraz $\boldsymbol{P(t_1,\ldots,t_n)}$ je atomická formule.
- **Formule:**
  - každá atomická formule je formule.
  - je-li výraz A formule, pak $\neg A$ je formule.
  - jsou-li výrazy A a B formule, pak výrazy $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \supset B)$, $(A \equiv B)$ jsou formule.
  - je-li *x* proměnná a A formule, pak výrazy $\forall \boldsymbol{x}\ \mathbf{A}$ a $\exists \boldsymbol{x}\ \mathbf{A}$ jsou formule.

Formální jazyk PL1 - 1. řád

- Jediné proměnné, které můžeme používat s kvantifikátory, jsou *individuové proměnné.*
- Nemůžeme kvantifikovat přes proměnné *vlastností* či *funkcí.*
- *Příklad:* Leibnizova definice rovnosti.
  - Mají-li dvě individua všechny vlastnosti stejné, pak je to jedno a totéž individuum.
  - $\forall P\,[P(x) \equiv P(y)] \supset (x = y)$

    - jazyk 2. řádu, kvantifikujeme přes vlastnosti.

Příklad: jazyk aritmetiky

Má tyto (speciální) funkční symboly:

- nulární symbol: 0 (konstanta nula) - konstanta je nulární funkční symbol.
- unární symbol: s (funkce následník).
- binární symboly: $+$ a $\times$ (funkce sčítání a násobení).
- Příkladem termů jsou (používáme infixní notaci pro + a $\times$):

$$0,\ s(x),\ s(s(x)),\ (x + y) \times \mathrm{s}(\mathrm{s}(0)),\ \text{atd.}$$

- Formulemi jsou např. výrazy ($=$ je zde speciální predikátový symbol):

$$s(0) = (0 \times x) + s(0),\ \exists x\,(y = x \times z),\ \forall x\,[(x = y) \supset \exists y\,(x = s(y))]$$

Převod z přirozeného jazyka do jazyka PL1

- „všichni“, „žádný“, „nikdo“, ... $\forall$
- „někdo“, „něco“, „někteří“, „existuje“, ... $\exists$
- Větu musíme často ekvivalentně přeformulovat
- Pozor: v češtině dvojí zápor !
- Žádný student není důchodce: $\forall \boldsymbol{x}\, [\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) \supset \neg \boldsymbol{D}(\boldsymbol{x})]$
- Ale, „všichni studenti nejsou důchodci“ čteme jako „ne všichni studenti jsou důchodci“:

$$\neg \forall \boldsymbol{x}\, [\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) \supset \boldsymbol{D}(\boldsymbol{x})] \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{x}\, [\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) \wedge \neg \boldsymbol{D}(\boldsymbol{x})]$$

Převod z přirozeného jazyka do jazyka PL1

- Pomocné pravidlo: **$\forall$ + $\supset$, $\exists$ + $\wedge$** (většinou).

- **$\neg \forall x\, [P(x) \supset Q(x)] \Leftrightarrow \exists x\, [P(x) \wedge \neg Q(x)]$**

  Není pravda, že všechna P jsou Q $\Leftrightarrow$ Některá P nejsou Q.

- **$\neg \exists x\, [P(x) \wedge Q(x)] \Leftrightarrow \forall x\, [P(x) \supset \neg Q(x)]$**

  Není pravda, že některá P jsou Q $\Leftrightarrow$ Žádné P není Q.

  (de Morganovy zákony v PL1).

Převod z přirozeného jazyka do jazyka PL1

- **Pouze** zaměstnanci používají výtah.

$$\forall x\ [V(x) \supset Z(x)]$$

- Všichni zaměstnanci používají výtah.

$$\forall x\ [Z(x) \supset V(x)]$$

- Marie má ráda **pouze** vítěze:

  Tedy pro všechny platí: pokud má Marie někoho ráda, pak je to vítěz:

$$\forall x\ [R(m, x) \supset V(x)],$$

  „mít rád“ je binární vztah, ne vlastnost !!!

Převod z přirozeného jazyka do jazyka PL1

- Everybody loves somebody sometimes.

$$\forall x\ \exists y\ \exists t\ L(x, y, t)$$

- Everybody loves somebody sometimes but Hitler doesn't like anybody.

$$\forall x\ \exists y\ \exists t\ L(x, y, t) \wedge \neg\exists z\ L'(h, z)$$

- Everybody loves nobody – 1 zápor. (nikdo nemá nikoho rád) – 3 zápory.

$$\forall x\ \forall y\ \neg L'(x, y) \Leftrightarrow \forall x\ \neg\exists y\ L'(x, y)$$

Volné, vázané proměnné

- $\forall x\ \exists y\ P(x, y, t) \wedge \neg\exists x\ Q(y, x)$

  vázané, volná volná, vázaná

Formule s *čistými proměnnými*: pouze volné výskyty nebo pouze vázané, ale každý kvantifikátor má své proměnné. Např. *x* ve druhém konjunktu je jiné než v prvním, tak proč jej nazývat stejně?

- $\forall x\ \exists y\ P(x, y, t) \wedge \neg\exists z\ Q(u, z)$

Substituce termů za proměnné

$A(t/x)$ → vznikne z A **korektní substitucí** ***termu*** *t* ***za proměnnou*** *x*.

Má-li být substituce korektní, musí splňovat následující dvě pravidla:

- Substituovat lze *pouze za volné výskyty* proměnné *x* ve formuli A a při substituci nahrazujeme *všechny volné výskyty* proměnné *x* ve formuli A termem *t*.

- Žádná individuová proměnná vystupující v termu *t* se po provedení substituce *t*/*x* nesmí stát ve formuli A vázanou (v takovém případě ***není*** term *t* za proměnnou *x* ve formuli A ***substituovatelný***).

Substituce, příklad

- A(x): $P(x) \supset \forall y\, Q(x, y)$, term $t = f(y)$
- Provedeme-li substituci A(f(y)/x), dostaneme:

$$P(f(y)) \supset \forall y\, Q(f(\mathbf{y}), y).$$

- Term f(y) není substituovatelný za x v dané formuli A.
- Změnili bychom smysl formule.
  - Např. v interpretaci nad přirozenými čísly P → být nejmenší; Q → menší nebo rovno (≤); f → funkce identita (=) mají obě formule rozdílný „smysl“:
  - „Je-li číslo x nejmenší, pak $x \leq$ y pro všechna y.“
  - „Je-li číslo y nejmenší, pak $y \leq$ y pro všechna y.“

Sémantika PL1

$$P(x) \supset \forall y\, Q(x, y)$$

Je tato formule pravdivá?

Nesmyslná otázka, vždyť nevíme, co znamenají symboly *P*, *Q*. Jsou to jen symboly, za které můžeme dosadit jakýkoli predikát.

$$P(x) \supset P(x)$$

Je tato formule pravdivá?

ANO, je, a to vždy, za všech okolností, tj. v každé interpretaci.

Sémantika PL1

$\forall x\, P(x, f(x))$ $\qquad$ $\exists x\, P(x, f(x))$

Musíme se dohodnout, jak budeme tyto formule chápat.

- O čem mluví, přes co „rangují“ proměnné: zvolíme universum diskursu, jakákoli **neprázdná** množina $\mathbf{U} \neq \Phi$.
- Co označuje symbol *P*; je binární, má dva argumenty, tedy musí označovat nějakou binární relaci $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{U} \times \mathbf{U}$.
- Co označuje symbol *f* ; je unární, má jeden argument, tedy musí označovat nějakou funkci $F \subseteq \mathbf{U} \times \mathbf{U}$, **značíme** $\mathbf{F}: \mathbf{U} \to \mathbf{U}$.

Sémantika PL1

A: $\forall x\, P(x, f(x))$ B: $\exists x\, P(x, f(x))$

Musíme se dohodnout, jak budeme tyto formule chápat.

- Nechť U = N (množina přirozených čísel).
- Nechť P označuje relaci < (tj. množinu dvojic takových, že první člen je ostře menší než druhý: $\{\langle 0,1\rangle, \langle 0,2\rangle, \ldots, \langle 1,2\rangle, \ldots\}$).
- Nechť f označuje funkci druhá mocnina x^2, tedy množinu dvojic, kde druhý člen je druhá množina prvního: $\{\langle 0,0\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,4\rangle, \ldots, \langle 5,25\rangle, \ldots\}$.

Nyní můžeme teprve vyhodnotit pravdivostní hodnotu formulí A, B.

Sémantika PL1

A: $\forall x\, P(x, f(x))$ B: $\exists x\, P(x, f(x))$

Vyhodnocujeme „zevnitř“:

Nejprve vyhodnotíme term $f(x)$. Každý term označuje prvek universa. Který? Záleží na *valuaci e proměnné x.* Nechť $e(x) = 0$, pak $f(x) = x^2 = 0$.

$e(x) = 1$, pak $f(x) = x^2 = 1$,
$e(x) = 2$, pak $f(x) = x^2 = 4$, atd.

Nyní vyhodnocením $P(x, f(x))$ musíme dostat pravdivostní hodnotu:

$e(x) = 0$, 0 není < 0 Nepravda
$e(x) = 1$, 1 není < 1 Nepravda
$e(x) = 2$, 2 je < 4 Pravda

Sémantika PL1

A: $\forall x\, P(x, f(x))$ B: $\exists x\, P(x, f(x))$

- Formule $P(x, f(x))$ je pro některé valuace *e* proměnné *x v dané interpretaci* Pravdivá, pro jiné nepravdivá.
- Význam $\forall x$ a $\exists x$: formule musí být pravdivá pro **všechny** resp. **některé** valuace *x*.
- Formule A: Nepravdivá v naší interpretaci I: $|\neq_I A$.
- Formule B: Pravdivá v naší interpretaci I: $|=_I B$.

Model formule, interpretace

A: $\forall x\, P(x, f(x))$ B: $\exists x\, P(x, f(x))$

- Našli jsme interpretaci I, ve které je formule B pravdivá. Interpretační struktura $\langle N, <, x^2 \rangle$ splňuje formuli B pro všechny valuace proměnné *x*, je to **model formule B**.

- Jak upravíme interpretaci I, aby v ní byla pravdivá formule A ? Nekonečně mnoho možností, nekonečně mnoho modelů.
  Např. $\langle N, <, x+1 \rangle$, $\langle \{N/\{0,1\}, <, x^2 \rangle$, $\langle N, \leq, x^2 \rangle$.

- Všechny modely formule A jsou také modely formule B („co platí pro všechny, platí také pro některé“).

Model formule, interpretace

C: $\forall x\, P(x, f(\boldsymbol{y}))$

jaké budou modely této formule (s volnou proměnnou *y*)?

Zvolme opět:

1. Universum U = N
2. Symbolu *P* přiřadíme relaci $\leq$
3. Symbolu *f* přiřadíme funkci x^2

Je struktura IS = ‹N, ≤, druhá mocnina› modelem formule C? Aby tomu tak bylo, musela by být formule C pravdivá v IS *pro všechna ohodnocení proměnné y*. Tedy formule $P(x, f(\boldsymbol{y}))$ by musela být pravdivá pro všechna ohodnocení *x* a *y*.

Ale to není, např. Pro $e(x) = 5$, $e(y) = 2$, 5 není $\leq 2^2$

Model formule, interpretace

C: $\forall x\, P(x, f(\boldsymbol{y}))$

jaké budou modely této formule (s volnou proměnnou y)?

Struktura $\langle N, \leq, x^2 \rangle$ není modelem formule C.

Modelem (triviálním) je např. $\langle N, N \times N, x^2 \rangle$. Celý Kartézský součin $N \times N$, tj. množina všech dvojic přirozených čísel, je také relace nad N.

Nebo je modelem struktura $\langle N, \geq, F \rangle$, kde F je funkce, zobrazení $N \rightarrow N$ takové, že přiřazuje všem přirozeným číslům číslo 0.