

Matematická logika

(Naivní) Teorie množin,

Relace, zobrazení, spočetnost a nespočetnost množin
(4. přednáška)

Marie Duží

marie.duzi@vsb.cz



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Co je to množina?

- Množina je soubor prvků a je svými prvky plně určena; množinu s prvky a, b, c značíme: $\{a, b, c\}$.
- Prvkem množiny může být **opět množina**, množina nemusí mít **žádné prvky** (značíme Φ) !
- *Příklady:* $\Phi, \{a, b\}, \{b, a\}, \{a, b, a\}, \{\{a, b\}\}, \{a, \{b, a\}\}, \{\Phi, \{\Phi\}\}, \{\{\Phi\}\}$.
- Množiny jsou identické, právě když mají stejné prvky (princip extenzionality).
 - Značení: $x \in M$ – „ x je prvkem M “
 - $a \in \{a, b\}, a \notin \{\{a, b\}\}, \{a, b\} \in \{\{a, b\}\}, \Phi \in \{\Phi, \{\Phi\}, \{\{\Phi\}\}\}, \Phi \in \{\Phi, \{\Phi\}\}$, ale: $x \notin \Phi$ pro žádné (tj. všechna) x .
 - $\{a, b\} = \{b, a\} = \{a, b, a\}$, ale: $\{a, b\} \neq \{\{a, b\}\} \neq \{a, \{b, a\}\}$

Množinové operace

(vytvářejí z množin nové množiny)

- **Sjednocení:** $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ **nebo** } x \in B\}$.

Čteme: „Množina všech x takových, že x je prvkem A nebo x je prvkem B .“

- $\{a, b, c\} \cup \{a, d\} = \{a, b, c, d\}$
- $\{\text{sudá čísla}\} \cup \{\text{lichá čísla}\} = \{\text{přirozená čísla}\}$ – značíme Nat .

- $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ pro **nějaké** } i \in I\}$.

- Nechť $A_i = \{x \mid x = 2 \cdot i \text{ pro nějaké } i \in \text{Nat}\}$.
- $\bigcup_{i \in \text{Nat}} A_i = \text{množina všech sudých čísel}$.

Množinové operace

(vytvářejí z množin nové množiny)

- **Průnik:** $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ **a** } x \in B\}$.

Čteme: „Množina všech x takových, že x je prvkem A **a současně** x je prvkem B .“

- $\{a, b, c\} \cap \{a, d\} = \{a\}$
- $\{\text{sudá čísla}\} \cap \{\text{lichá čísla}\} = \Phi$

- $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ pro **každé** } i \in I\}$.

- Nechť $A_i = \{x \mid x \in \text{Nat}, x \geq i\}$.
- Pak $\bigcap_{i \in \text{Nat}} A_i = \Phi$.

Vztahy mezi množinami

- Množina A je **podmnožinou** množiny B , značíme $A \subseteq B$, právě když každý prvek A je také prvkem B .
- Množina A je **vlastní podmnožinou** množiny B , značíme $A \subset B$, právě když každý prvek A je také prvkem B a **ne naopak**.

$$\{a\} \subseteq \{a\} \subset \{a, b\} \neq \{\{a, b\}\} !!!$$

- Platí: $A \subset B$, právě když $A \subseteq B$ a $A \neq B$
- Platí: $A \subseteq B$, právě když $A \cup B = B$, právě když $A \cap B = A$

Další množinové operace

- **Rozdíl**: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ a } x \notin B\}$
 - $\{a, b, c\} \setminus \{a, b\} = \{c\}$.
- **Doplněk** (komplement): Nechť $A \subseteq M$. Doplněk A vzhledem k M je množina $A' = M \setminus A$.
- **Kartézský součin**: $A \times B = \{\langle a, b \rangle \mid a \in A, b \in B\}$, kde $\langle a, b \rangle$ je **uspořádaná dvojice (záleží na pořadí)**.
 - Platí: $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$ právě když $a = c, b = d$.
 - **Ale**: $\langle a, b \rangle \neq \langle b, a \rangle$, ačkoliv $\{a, b\} = \{b, a\}$!!!
- **Zobecnění**: $A \times \dots \times A$ množina n -tic, značíme také A^n .

Další množinové operace

- **Potenční množina:** $2^A = \{B \mid B \subseteq A\}$, značíme také $P(A)$.

$$2_{\{a,b\}} = \{\Phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$$

$$2_{\{a,b,c\}} = \{\Phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$$

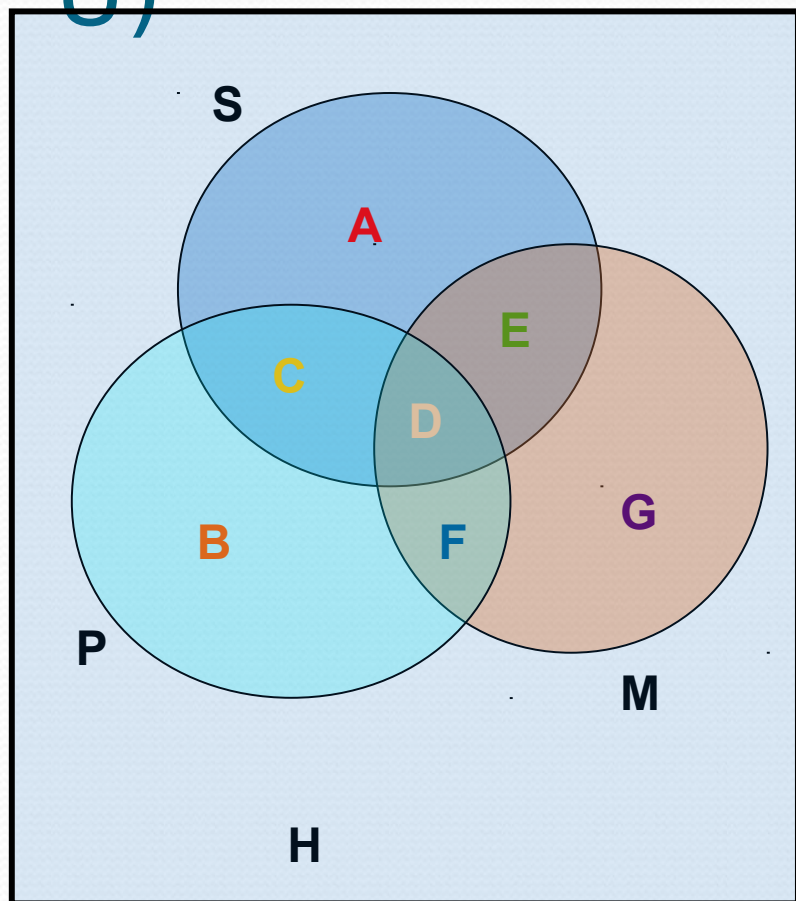
Kolik prvků má množina 2^A ?

Je-li $|A|$ počet prvků (kardinalita) množiny A , pak 2^A má $2^{|A|}$ prvků

(proto takové značení).

$$2_{\{a,b\} \times \{a\}} = \{\Phi, \{\langle a, a \rangle\}, \{\langle b, a \rangle\}, \{\langle a, a \rangle, \langle b, a \rangle\}\}$$

Grafické znázornění (v universu U)



A: $S \setminus (P \cup M) = (S \setminus P) \cap (S \setminus M)$

$$S(x) \wedge \neg(P(x) \vee M(x)) \Leftrightarrow S(x) \wedge \neg P(x) \wedge \neg M(x)$$

B: $P \setminus (S \cup M) = (P \setminus S) \cap (P \setminus M)$

$$P(x) \wedge \neg(S(x) \vee M(x)) \Leftrightarrow P(x) \wedge \neg S(x) \wedge \neg M(x)$$

C: $(S \cap P) \setminus M$

$$S(x) \wedge P(x) \wedge \neg M(x)$$

D: $S \cap P \cap M$

$$S(x) \wedge P(x) \wedge M(x)$$

E: $(S \cap M) \setminus P$

$$S(x) \wedge M(x) \wedge \neg P(x)$$

F: $(P \cap M) \setminus S$

$$P(x) \wedge M(x) \wedge \neg S(x)$$

G: $M \setminus (P \cup S) = (M \setminus P) \cap (M \setminus S)$

$$M(x) \wedge \neg(P(x) \vee S(x)) \Leftrightarrow M(x) \wedge \neg P(x) \wedge \neg S(x)$$

H: $U \setminus (S \cup P \cup M) = (U \setminus S) \cap (U \setminus P) \cap (U \setminus M)$

$$\neg(S(x) \vee P(x) \vee M(x)) \Leftrightarrow \neg S(x) \wedge \neg P(x) \wedge \neg M(x)$$

Russellův paradox

- Je pravda, že každý (tj. libovolným způsobem **zadaný**) soubor prvků lze považovat za množinu?
- Normální je, že množina a její prvky jsou objekty různých typů. Tedy „*normální množina*“ není prvkem sebe sama.
- Nechť tedy **N** je množina **všech** normálních množin:
$$\mathbf{N} = \{M \mid M \notin M\}.$$
- **Otázka:** Je $\mathbf{N} \in \mathbf{N}$?
 - **Ano?**
Ale pak dle zadání platí, že **N** je normální, tj. $\mathbf{N} \notin \mathbf{N}$.
 - **Ne?**
Ale pak $\mathbf{N} \notin \mathbf{N}$, tedy **N** je normální a patří do N, tj. $\mathbf{N} \in \mathbf{N}$.
 - Obě odpovědi vedou ke sporu, jedná se o „špatné zadání“, které nezadává takový soubor prvků, jenž bychom mohli považovat za množinu.

Relace

- **Relace** mezi množinami A , B je podmnožina Kartézského součinu $A \times B$.
- **Kartézský součin** $A \times B$ je množina všech uspořádaných dvojic $\langle a, b \rangle$, kde $a \in A$, $b \in B$.
- (Binární) **relace** R^2 na množině M je podmnožina Kartézského součinu $M \times M$: $R^2 \subseteq M \times M$.
- **n -ární relace** R^n na množině M : $R^n \subseteq \underbrace{M \times \dots \times M}_{n\text{-krát}}$

Relace

Pozor:

Dvojice $\langle a, b \rangle \neq \langle b, a \rangle$, ale množina $\{a, b\} = \{b, a\}$

$\langle a, a \rangle \neq \langle a \rangle$, ale $\{a, a\} = \{a\}$

U *n-tic* záleží na pořadí, prvky se mohou opakovat, na rozdíl od množin.

Notace: $\langle a, b \rangle \in R$ značíme také prefixně $R(a, b)$, nebo infixně $a R b$. Např. $1 \leq 3$.

Relace - příklad

Binární relace na $\mathbb{N}$: $<$ (ostře menší):

$\{\langle 0,1 \rangle, \langle 0,2 \rangle, \langle 0,3 \rangle, \dots, \langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 1,4 \rangle, \dots, \langle 2,3 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \dots, \langle 3,4 \rangle, \dots, \langle 5,7 \rangle, \dots, \langle 115,119 \rangle, \dots\}$

Ternární relace na $\mathbb{N}$: množina trojic přirozených čísel takových, že 3. číslo je rozdíl 1. číslo minus 2. číslo:

$\{\langle 0,0,0 \rangle, \langle 1,0,1 \rangle, \langle 1,1,0 \rangle, \dots, \langle 2,0,2 \rangle, \langle 2,1,1 \rangle, \langle 2,2,0 \rangle, \dots, \langle 3,0,3 \rangle, \langle 3,1,2 \rangle, \langle 3,2,1 \rangle, \langle 3,3,0 \rangle, \dots, \langle 115,110,5 \rangle, \dots\}$

Relace „adresa osoby“:

$\{\langle \text{Jan Novák, Praha 5, Bellušova 1831} \rangle, \langle \text{Marie Duží, Praha 5, Bellušova 1827} \rangle, \dots\}$

Funkce (zobrazení)

n -ární funkce F na množině M je speciální zprava jednoznačná $(n+1)$ -ární relace $F \subseteq M \times \dots \times M$:
 $(n+1) \times \forall \underline{a} \forall b \forall c ([F(\underline{a}, b) \wedge F(\underline{a}, c)] \supset b=c).$

Parciální F : ke každé n -tici prvků $\underline{a} \in M \times \dots \times M$ existuje **nanejvýš jeden** prvek $b \in M$.
Značíme $F: M \times \dots \times M \rightarrow M$, místo $F(\underline{a}, b)$ píšeme $F(\underline{a})=b$.

Množinu $M \times \dots \times M$ nazýváme **definiční obor (doména)** funkce F , množinu M pak **obor hodnot (range)**.

Funkce (zobrazení)

Příklad: Relace na $\mathbb{N}$:

$$\{ \langle \langle 1, 1 \rangle, 1 \rangle, \langle \langle 2, 1 \rangle, 2 \rangle, \langle \langle 2, 2 \rangle, 1 \rangle, \dots, \langle \langle 4, 2 \rangle, 2 \rangle, \dots, \langle \langle 9, 3 \rangle, 3 \rangle, \dots, \langle \langle 27, 9 \rangle, 3 \rangle, \dots \}$$

je parciální funkce **dělení** beze zbytku.

Také relace *minus na $\mathbb{N}$* (viz předchozí slide) je na $\mathbb{N}$ parciální funkcí: např. dvojice $\langle 2, 4 \rangle$ nemá v $\mathbb{N}$ obraz. Aby byla totální, museli bychom rozšířit její definiční obor na celá čísla.

Funkce (zobrazení)

Jako interpretace funkčních symbolů formulí PL1 používáme pouze *totální* funkce:

Totální funkce $F: A \rightarrow B$:

Ke každému prvku $a \in A$ existuje ***právě jeden*** prvek $b \in B$ takový, že:

$$F(a)=b: \forall a \exists b F(a)=b \wedge \forall a \forall b \forall c [(F(a)=b \wedge F(a)=c) \supset b=c]$$

Zavádíme někdy **speciální kvantifikátor $\exists!$** s významem „existuje právě jedno“ a píšeme:

$$\forall a \exists! b F(a)=b$$

Funkce (zobrazení)

Příklady:

Relace $+$ $\{\langle 0,0,0 \rangle, \langle 1,0,1 \rangle, \langle 1,1,2 \rangle, \langle 0,1,1 \rangle, \dots\}$ je na $\mathbb{N}$ (totální binární) funkce. Každým dvěma číslům přiřadí právě jedno, jejich součet.

Místo $\langle 1,1,2 \rangle \in +$ píšeme $1+1=2$

Relace $\geq$ není funkce: $\exists x \exists y \exists z [(x \geq y) \wedge (x \geq z) \wedge (y \neq z)]$

Relace $\{\langle 0,0 \rangle, \langle 1,1 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 3,9 \rangle, \langle 4,16 \rangle, \dots\}$ je na $\mathbb{N}$ totální funkce druhá mocnina (x^2).

Surjekce, injekce,

- Zobrazení $f: A \rightarrow B$ je **surjekce** (zobrazení **A na B**), jestliže k libovolnému $b \in B$ existuje $a \in A$ takový, že $f(a)=b$.

$$\forall b [B(b) \supset \exists a (A(a) \wedge f(a)=b)].$$

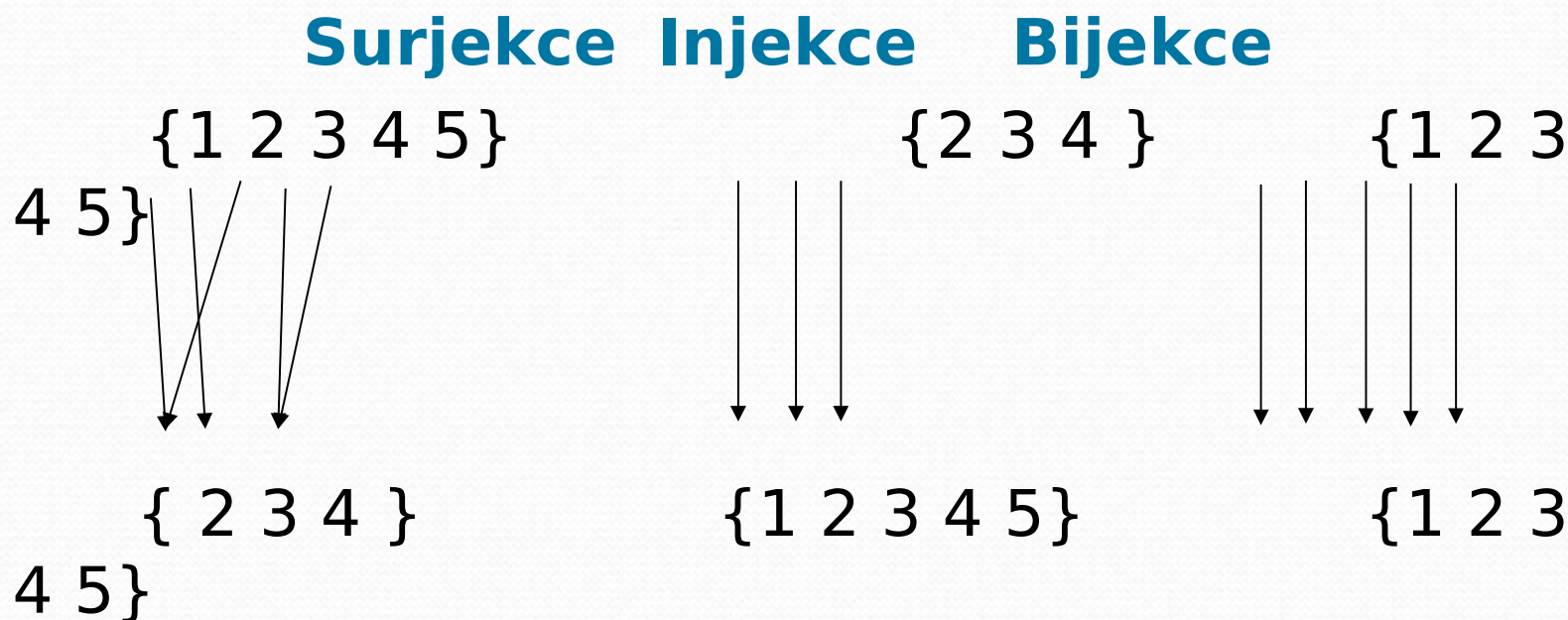
- Zobrazení $f: A \rightarrow B$ je **injekce** (**prosté** zobrazení **A do B**), jestliže pro všechna $a \in A$, $b \in A$ taková, že $a \neq b$ platí, že $f(a) \neq f(b)$.

$$\forall a \forall b [(A(b) \wedge A(a) \wedge (a \neq b)) \supset (f(a) \neq f(b))].$$

- Zobrazení $f: A \rightarrow B$ je **bijekce** (**prosté** zobrazení **A na B**), jestliže f je surjekce a injekce

Funkce (zobrazení)

- *Příklad:*



Existuje-li mezi množinami A , B bijekce, pak říkáme, že mají stejnou *kardinalitu* (počet prvků).

Kardinalita, spočetné množiny

- Množina A , která má stejnou kardinalitu jako množina $\mathbb{N}$ přirozených čísel, se nazývá **spočetná**.
- Příklad: množina sudých čísel S je spočetná. Prosté zobrazení f množiny S na $\mathbb{N}$ je dáno například předpisem:

$$f(n) = 2n.$$

Tedy $0 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 6, 4 \rightarrow 8, \dots$

Jeden z **paradoxů Cantorovy teorie** množin:

$S \subset \mathbb{N}$ (vlastní podmnožina) a přitom počet prvků obou množin je stejný:

$$\text{Card}(S) = \text{Card}(\mathbb{N})!$$

Kardinalita, spočetné množiny

Množina racionálních čísel $\mathbb{R}$ je rovněž spočetná.

Důkaz: Provedeme ve dvou krocích.

- a) **$\text{Card}(\mathbb{N}) \leq \text{Card}(\mathbb{R})$** ,
neboť každé přirozené číslo je racionální: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$.
- b) Sestrojíme **zobrazení $\mathbb{N}$ na $\mathbb{R}$** (tedy surjekci $\mathbb{N}$ na $\mathbb{R}$), čímž dokážeme, že **$\text{Card}(\mathbb{R}) \leq \text{Card}(\mathbb{N})$** :

1	2	3	4	5	6	...
1/1	2/1	1/2	3/1	2/2	1/3	...

Ale v tabulce se nám racionální čísla opakují, tedy toto zobrazení není prosté. Nicméně, žádné racionální číslo nevynecháme, je to zobrazení **na $\mathbb{R}$ (surjekce)**.

Proto je **$\text{Card}(\mathbb{N}) = \text{Card}(\mathbb{R})$** .

1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	...
2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6	...
3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	3/6	...
4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	4/6	...
5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	5/6	...
6/1	6/2	6/3	6/4	6/5	6/6	...
...	...	...	...	...	...	...

Kardinalita, nespočetné množiny

- Existují však **nespočetné** množiny: nejmenší z nich je množina reálných čísel $\mathbb{R}$.
- Již v intervalu $(0,1]$ je reálných čísel více než je všech přirozených, ale stejně mnoho jako všech $\mathbb{R}$!
- Cantorův diagonální důkaz:** Kdyby bylo v tomto intervalu čísel $\mathbb{R}$ spočetně mnoho, pak by šly uspořádat do posloupnosti první (1.), druhé (2.), třetí (3.),..., a každé z nich je tvaru $0,i_1i_2i_3\dots$, kde $i_1i_2i_3\dots$ je desetinný rozvoj čísla.
- Racionální čísla mají desetinný rozvoj konečný, iracionální čísla jej mají nekonečný.
- V posloupnosti desetinných míst $i_1i_2i_3\dots$ přičteme ke každému n -tému číslu i_n v jeho rozvoji číslo 1. Dostaneme číslo, které v původní uspořádané posloupnosti nebylo.) – viz další snímek

Cantorův diagonální důkaz nespočetnosti reálných čísel v intervalu $(0,1]$.

	1	2	3	4	5	6	7
1	i_{11}	i_{12}	i_{13}	i_{14}	i_{15}	i_{16}	i_{17}
2	i_{21}	i_{22}	i_{23}	i_{24}	i_{25}	i_{26}	i_{27}
3	i_{31}	i_{32}	i_{33}	i_{34}	i_{35}	i_{36}	i_{37}
4	i_{41}	i_{42}	i_{43}	i_{44}	i_{45}	i_{46}	i_{47}
5	i_{51}	i_{52}	i_{53}	i_{54}	i_{55}	i_{56}	i_{57}

....

Nové číslo, které v tabulce není:

$$0, i_{11}+1 \ i_{22}+1 \ i_{33}+1 \ i_{44}+1 \ i_{55}+1 \ ...$$