Matematická logika

Výroková logika (2.přednáška)

Marie Duží
marie.duzi@vsb.cz

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Výroková logika

- Analyzuje způsoby skládání jednoduchých výroků do výroků složených pomocí logických spojek.
- Co je to výrok? *Výrok je tvrzení, o němž má smysl prohlásit, zda je pravdivé či nepravdivé.*
- Princip dvouhodnotovosti – *tercium non datur* – *dvouhodnotová logika* (existují však vícehodnotové logiky, logiky parciálních funkcí, fuzzy logiky, ...)
- Triviální definice? Jsou všechna (oznamovací) tvrzení výroky?
  Ne, není pravda, že všechna tvrzení jsou výroky:
  - *Francouzský král je holohlavý*
  - *Přestal jste bít svou ženu?*
    (zkuste odpovědět ano nebo ne, pokud jste nikdy nebyl ženatý nebo nikdy svou ženu nebil).

Výroková logika: sémantický výklad (sémantika = význam)

- **Výroky** dělíme na:
  - ***Jednoduché*** – žádná vlastní část jednoduchého výroku již není výrokem.
  - ***Složené*** – výrok má vlastní část(i), která je výrokem.
- ***Princip kompozicionality***: význam složeného výroku je funkcí významu jeho složek.
- Význam jednoduchých výroků redukuje VL na Pravda (1), Nepravda (0).
- Proto je výroková logika vlastně algebrou pravdivostních hodnot.

Výroková logika: příklady složených výroků

- V Praze prší **a** v Brně je hezky.

  V_1 spojka V_2

- **Není pravda**, že v Praze prší.

  spojka V

Výroková logika: Definice 2.1.1. (jazyk VL)

- **Formální jazyk** je zadán *abecedou* (množina výchozích symbolů) a *gramatikou* (množina pravidel, která udávají, jak vytvářet „Dobře utvořené formule“ - DUF).
- **Jazyk výrokové logiky**
  - **Abeceda**:
    - Výrokové symboly: p, q, r, ... (případně s indexy)
    - Symboly logických spojek (funktorů): ¬, ˅, ˄, ⊃, ≡
    - Pomocné symboly (závorky): (,), [,], {, }
      - Výrokové symboly zastupují elementární výroky
      - Symboly ¬, ˅, ˄, ⊃, ≡ nazýváme po řadě **negace** (¬), **disjunkce** (˅), **konjunkce** (˄), **implikace** (⊃), **ekvivalence** (≡).

Výroková logika: Definice 2.1.1. (jazyk VL)

- **Gramatika** (definuje rekurzivně dobře utvořené formule DUF)

Induktivní definice nekonečné množiny DUF:

1. Výrokové symboly ***p, q, r, ...*** jsou *(dobře utvořené) formule* (báze definice).
2. Jsou-li výrazy A, B formule, pak jsou (DU) *formulemi* i výrazy **$(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(A \equiv B)$** (indukční krok definice).
3. Jiných formulí výrokové logiky, než podle bodů (1), (2) není. (uzávěr definice).

Jazyk výrokové logiky je množina všech dobře utvořených formulí výrokové logiky.

Pozn.: Formule dle bodu (1) jsou ***atomické formule.*** Formule dle bodu (2) jsou ***složené formule.***

Výroková logika: Dobře utvořené formule

Příklad: $(p \supset q) \wedge p$ je DUF (vnější závorky vynechány)

$(p \vee) \neg \equiv q$ není DUF

Poznámky:

Symboly A, B jsou *metasymboly.* Můžeme za ně dosadit kteroukoli DUF již vytvořenou dle definice.

Pro spojky se někdy užívají jiné symboly:

symbol	alternativně
$\supset$	$\Rightarrow$, $\rightarrow$
$\equiv$	$\Leftrightarrow$, $\leftrightarrow$
$\wedge$	&
$\neg$	~

Priorita logických spojek: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\equiv$ (v tomto pořadí).

Příklad: $(p \supset q) \wedge p$ *není ekvivalentní* $p \supset q \wedge p$!

Druhá formule je $p \supset (q \wedge p)$!

Proto raději ***nezneužívat priority*** a psát závorky!

Sémantika (význam) formulí (Definice 2.1.2.)

Pravdivostní** ohodnocení (valuace) **výrokových symbolů je zobrazení v, které ke každému výrokovému symbolu p přiřazuje pravdivostní hodnotu, tj. hodnotu z množiny {1,0}, která kóduje množinu {Pravda, Nepravda}: $\{p_i\} \rightarrow \{1,0\}$

Pravdivostní funkce formule výrokové logiky je funkce w, která pro každé pravdivostní ohodnocení v výrokových symbolů p přiřazuje formuli její pravdivostní hodnotu. Tato hodnota je určena induktivně takto:

- Pravdivostní hodnota elementární formule: $w(p)_v = v(p)$ pro všechny výrokové proměnné p.
- Jsou-li dány pravdivostní funkce formulí A, B, pak pravdivostní funkce formulí **$\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \supset B$, $A \equiv B$** jsou dány následující tabulkou 2.1:

Pravdivostní funkce (Tabulka 2.1.)

A	B	¬A	A ˅ B	A ˄ B	A ⊃ B	A ≡ B
1	1	0	1	1	**1**	1
1	0	0	1	0	**0**	0
0	1	1	1	0	**1**	0
0	0	1	0	0	**1**	1

Převod z přirozeného jazyka do jazyka výrokové logiky, spojky.

- Elementární výroky: překládáme symboly p, q, r, ...
- Spojky přirozeného jazyka: překládáme pomocí symbolů pro spojky:

- ***Negace:***
  - „není pravda, že“: $\neg$ (unární spojka)
- ***Konjunkce:***
  - „*a*“: $\wedge$ (binární, komutativní) spojka;
  - *Praha je velkoměsto* ***a*** *2+2=4:* $p \wedge q$
    ne vždy, ne každé „a“ je logická konjunkce.
    Např. *„Jablka a hrušky se pomíchaly“.*
- ***Disjunkce*:**
  - *„nebo“:* $\vee$ (binární, komutativní) spojka;
    Praha ***nebo*** *Brno je velkoměsto. („nevylučující se“)*: $p \vee q$
  - V přirozeném jazyce často ve smyslu *vylučujícím se* „buď, anebo“ (*Půjdu do školy (a)nebo zůstanu doma.)*
    - Vylučující se „nebo“ je non-ekvivalence

Spojka implikace

- ***Implikace***
  - *„jestliže, pak“*, *„když, tak“*, *„je-li, pak“*: $\supset$ (binární, ***ne***komutativní) spojka;
    První člen implikace **antecedent**, druhý **konsekvent.**
  - Implikace (ani žádná jiná spojka) nepředpokládá *žádnou obsahovou souvislost* mezi antecedentem a konsekventem, proto bývá někdy nazývána *materiálová implikace* (středověk ”*suppositio materialis*”).
  - Implikace tedy (na rozdíl od častých případů v přirozeném jazyce) ***nezachycuje ani příčinnou ani časovou vazbu.***
    ”Jestliže 1+1=2, pak železo je kov” (pravdivý výrok): $p \supset q$
    ”Jestliže existují ufoni, tak jsem papež”: $p \supset r$
    (co tím chce dotyčný říct? Nejsem papež, tedy neexistují ufoni)
  - Pozn.: **Spojce “protože” neodpovídá logická spojka implikace!**
    - “Hokejisté prohráli semifinálový zápas, ***proto*** se vrátili z olympiády předčasně”.
      „***Protože*** jsem nemocen, zůstal jsem doma“. „nemocen“ $\supset$ „doma“ ?
      Ale to by muselo být pravda, i když nejsem nemocen (slide 24).
    - Mohli bychom to analyzovat pomocí *modus ponens:* $[p \wedge (p \supset q)] \supset q$

Spojka ekvivalence

- ***Ekvivalence***:
  - ”právě tehdy, když”, ”tehdy a jen tehdy, když”, apod. , ale ne ”tehdy, když” – to je implikace!
  - ”Řecká vojska vyhrávala boje ***tehdy (a jen tehdy), když*** o jejich výsledku rozhodovala fyzická zdatnost”: $p \equiv q$
  - Používá se nejčastěji v matematice (v definicích), v přirozeném jazyce řidčeji.

- *Příklad*:

a) ”Dám ti facku, když mě oklameš.” okl ⊃ facka

b) ”Dám ti facku tehdy a jen tehdy, když mě oklameš.“ okl ≡ facka

Situace: Neoklamal jsem. Kdy mohu dostat facku?

Ad a) – můžu dostat facku, ad b) – nemůžu dostat facku.

Splnitelnost formulí, tautologie, kontradikce, model (Definice 2.1.3.)

- **Model formule A**: ohodnocení výrokově logických proměnných *p, q, …* (valuace) *v* takové, že formule A je v tomto ohodnocení *v* pravdivá: $w(A)_v = 1$.

- **Formule je splnitelná**, má-li alespoň jeden model.

- **Formule je nesplnitelná (kontradikce)**, nemá-li žádný model.

- **Formule je tautologie**, je-li každé ohodnocení *v* jejím modelem.

- **Množina formulí $\{A_1,\dots,A_n\}$ je splnitelná**, existuje-li ohodnocení *v,* které je modelem každé formule A_i, $i = 1,\dots,n$.

Splnitelnost formulí, tautologie, kontradikce, model

- *Příklad: Formule A je tautologie,* ¬A kontradikce, formule $(p \supset q)$, $(p \wedge \neg q)$ jsou splnitelné.

  Formule A: $\neg(p \supset q) \equiv (p \wedge \neg q)$

p	q	$p \supset q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \supset q)$	$\neg(p \supset q) \equiv (p \wedge \neg q)$	$\neg A$
1	1	1	0	0	**1**	**0**
1	0	0	1	1	**1**	**0**
0	1	1	0	0	**1**	**0**
0	0	1	0	0	**1**	**0**

Výrokově logické vyplývání

Formule A ***výrokově logicky vyplývá*** *z množiny formulí M,* značíme *M* ╞ A, jestliže A je pravdivá v každém modelu množiny *M.*

Poznámka: ***Okolnosti*** *(definice 1) jsou zde mapovány jako* ***ohodnocení*** *(Pravda - 1, Nepravda - 0)* ***elementárních výroků****:*

- *Za všech okolností (při všech ohodnoceních), kdy jsou pravdivé předpoklady, je pravdivý i závěr !*

Příklady: Logické vyplývání

P1: Je doma (d) nebo šel na pivo (p)
P2: Je-li doma (d), pak nás očekává (o)
⇒ Z: Jestliže nás neočekává, pak šel na pivo.

			P1	P2	Z	
d	p	o	$d \vee p$	$d \supset o$	$\neg o \supset p$	
1	1	1	1	1	1	M1
1	1	0	1	0	1	M2
1	0	1	1	1	1	M3
1	0	0	1	0	0	
0	1	1	1	1	1	M4
0	1	0	1	1	1	M5
0	0	1	0	1	1	M6
0	0	0	0	1	0	

Závěr je pravdivý ve všech čtyřech modelech předpokladů.
(M1, M3, M4, M5)

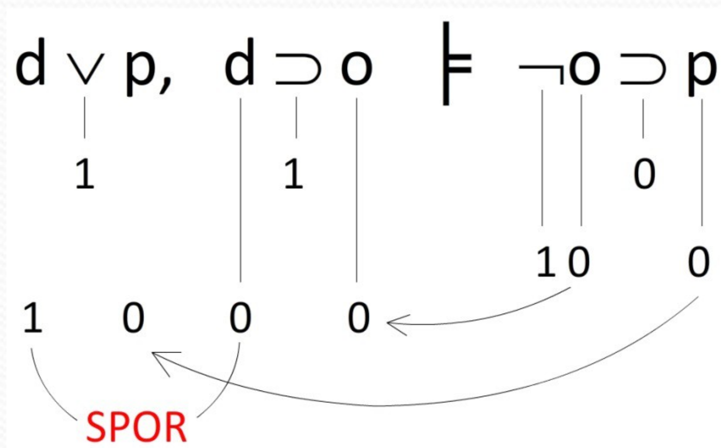
M1: d=1, p=1, o=1;
M3: d=1, p=0 ,o=1;
...

Příklady: Logické vyplývání

P1: Je doma (d) nebo šel na pivo (p)
P2: Je-li doma (d), pak nás očekává (o)
⇒ Z: Jestliže nás neočekává, pak šel na pivo p.

$$d \vee p,\ d \supset o \models \neg o \supset p$$

- **Tabulka má *2ⁿ* řádků!** Proto ***důkaz sporem*.**
- Předpokládejme, že úsudek ***není správný.*** Pak tedy mohou být všechny předpoklady pravdivé a závěr nepravdivý:



(Výrokově)Logické vyplývání

- Všechny úsudky se ***stejnou logickou formou*** jako platný úsudek jsou platné:

$$d \vee p,\ d \supset o \models \neg o \supset p$$

Za proměnné *d*, *p*, *o* můžeme dosadit kterýkoli elementární výrok:
Hraje na housle nebo se učí. (P1)
Jestliže hraje na housle, pak hraje jako Kubelík. (P2)

Tedy ⇒ Jestliže nehraje jako Kubelík, pak se učí. (Z)

Platný úsudek – stejná logická forma.

(Výrokově)Logické vyplývání

- Jestliže platí, že je správný úsudek:

$$P_1,\ldots,P_n \models Z,$$

pak platí, že je tautologie formule tvaru implikace:

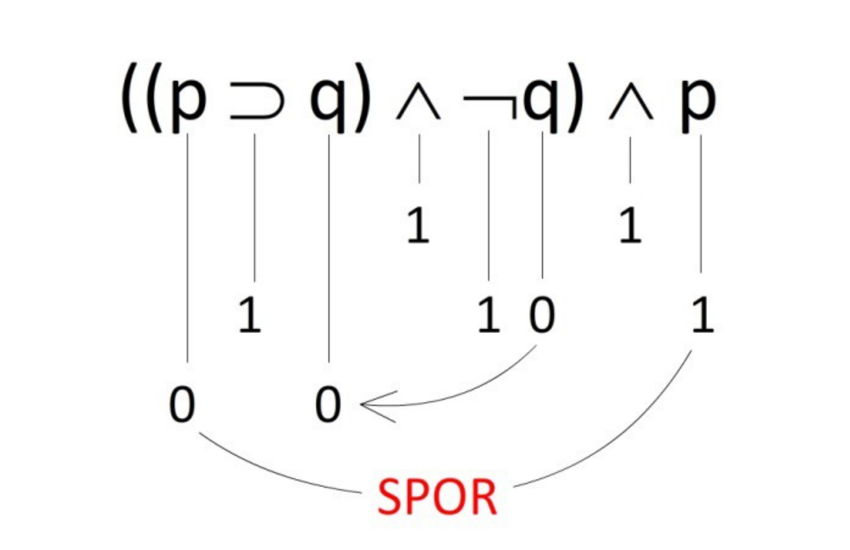
$$\models (P_1 \wedge \ldots \wedge P_n) \supset Z.$$

- **Důkaz**, že formule je **tautologie**, nebo že závěr Z **logicky vyplývá** z předpokladů :
  - Přímo – např. pravdivostní tabulkou
  - Nepřímo, sporem: $P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \wedge \neg Z$ je kontradikce, čili množina $\{P_1, \ldots, P_n, \neg Z\}$ je sporná (nekonzistentní, *nemá model*: neexistuje ohodnocení *v*, ve kterém by byly všechny formule této množiny pravdivé).

Důkaz tautologie

$\models ((p \supset q) \wedge \neg q) \supset \neg p$

Sporem:



Negovaná formule musí být kontradikce. Pokus, zda může vyjít 1.

Při žádném ohodnocení není **negovaná** formule **pravdivá**, tedy původní formule je tautologie.

Nejdůležitější tautologie VL

Tautologie s jedním výrokovým symbolem:

$\models$ $p \equiv p$

$\models$ $p \vee \neg p$ zákon vyloučeného třetího

$\models$ $\neg(p \wedge \neg p)$ zákon sporu

$\models$ $p \equiv \neg\neg p$ zákon dvojí negace

Algebraické zákony pro konjunkci, disjunkci a ekvivalenci

$\models (p \vee q) \equiv (q \vee p)$ komutativní zákon pro $\vee$
$\models (p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$ komutativní zákon pro $\wedge$
$\models (p \equiv q) \equiv (q \equiv p)$ komutativní zákon pro $\equiv$

$\models [(p \vee q) \vee r] \equiv [p \vee (q \vee r)]$ asociativní zákon pro $\vee$
$\models [(p \wedge q) \wedge r] \equiv [p \wedge (q \wedge r)]$ asociativní zákon pro $\wedge$
$\models [(p \equiv q) \equiv r] \equiv [p \equiv (q \equiv r)]$ asociativní zákon pro $\equiv$

$\models [(p \vee q) \wedge r] \equiv [(p \wedge r) \vee (q \wedge r)]$ distributivní zákon pro $\wedge$, $\vee$
$\models [(p \wedge q) \vee r] \equiv [(p \vee r) \wedge (q \vee r)]$ distributivní zákon pro $\vee$, $\wedge$

Zákony pro implikaci

- $\models$ $p \supset (q \supset p)$ zákon simplifikace
- $\models$ $(p \wedge \neg p) \supset q$ zákon Dunse Scota
- $\models$ $(p \supset q) \equiv (\neg q \supset \neg p)$ **zákon kontrapozice**
- $\models$ $(p \supset (q \supset r)) \equiv ((p \wedge q) \supset r)$ **spojování předpokladů**
- $\models$ $(p \supset (q \supset r)) \equiv (q \supset (p \supset r))$ na pořadí předpokladů nezáleží

- $\models$ $(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$ hypotetický sylogismus
- $\models$ $((p \supset q) \wedge (q \supset r)) \supset (p \supset r)$ tranzitivita implikace
- $\models$ $(p \supset (q \supset r)) \equiv ((p \supset q) \supset (p \supset r))$ Fregův zákon

- $\models$ $(\neg p \supset p) \supset p$ reductio ad absurdum
- $\models$ $((p \supset q) \wedge (p \supset \neg q)) \supset \neg p$ reductio ad absurdum

- $\models$ $(p \wedge q) \supset p$, $\models (p \wedge q) \supset q$
- $\models$ $p \supset (p \vee q)$, $\models q \supset (p \vee q)$

Zákony pro převody

$\models (p \equiv q) \equiv (p \supset q) \wedge (q \supset p)$

$\models (p \equiv q) \equiv (p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg p)$

$\models (p \equiv q) \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$

$\models \mathbf{(p \supset q) \equiv (\neg p \vee q)}$

$\models \mathbf{\neg(p \supset q) \equiv (p \wedge \neg q)}$ **Negace implikace**

$\models \mathbf{\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)}$ De Morgan zákony

$\models \mathbf{\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)}$ De Morgan zákony

Tyto zákony jsou také návodem jak ***negovat***.

Negace implikace

Není pravda, že budu-li hodný, dostanu lyže.

$\neg(p \supset q)$

Byl jsem hodný a (stejně) jsem lyže nedostal.

$p \wedge \neg q$ *(nesplněný slib)*

Státní zástupce:

Pokud je obžalovaný vinen, pak měl společníka $(v \supset s)$

Obhájce:

To není pravda ! $\neg(v \supset s)$

Pomohl obhájce obžalovanému, co vlastně řekl?

(Je vinen a udělal to sám!)

Negace implikace

Věty v budoucnosti:

Jestliže to ukradneš, tak tě zabiju! $(p \supset q)$

To není pravda: Ukradnu to a (stejně) mě nezabiješ. $p \wedge \neg q$

Ale:

Bude-li zítra 3. světová válka, pak zahyne více jak 5 miliard lidí.

To není pravda: Bude zítra 3.sv. válka a zahyne méně než 5 miliard lidí ???

… Asi jsme nechtěli říct, že bude určitě válka.

Zamlčená modalita: ***Nutně***, Bude-li zítra 3. světová válka, pak zahyne více jak 5 miliard lidí.

To není pravda: ***Možná, že*** Bude zítra 3.sv. válka, ale zahynulo by méně než 5 miliard lidí.

Modální logiky – nejsou náplní tohoto kursu.

Ještě úsudky

Převod z přirozeného jazyka nemusí být jednoznačný:

Jestliže má člověk vysoký tlak a špatně se mu dýchá nebo má zvýšenou teplotu, pak je nemocen.

p – „X má vysoký tlak“
q – „X se špatně dýchá“
r – „X má zvýšenou teplotu“
s – „X je nemocen“

1. možná analýza: $[(p \wedge q) \vee r] \supset s$
2. možná analýza: $[p \wedge (q \vee r)] \supset s$

Ještě úsudky

- *Jestliže má Karel vysoký tlak a špatně se mu dýchá nebo má zvýšenou teplotu, pak je nemocen.*

- *Karel není nemocen, ale špatně se mu dýchá.*

⇒ **Co z toho plyne?**

Musíme rozlišit 1. čtení a 2. čtení, protože nejsou ekvivalentní, závěry budou různé.

Analýza 1. čtení

1. analýza: $[(p \wedge q) \vee r] \supset s, \neg s, q \Rightarrow$???

Úvahou a úpravami:

$[(p \wedge q) \vee r] \supset s, \neg s \Rightarrow \neg[(p \wedge q) \vee r]$ (transpozice)

$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r$ (de Morgan)

$\Rightarrow (\neg p \vee \neg q), \neg r$, ale platí
$q \Rightarrow \neg p, \neg r$ (důsledky)

Tedy $\Rightarrow$ *Karel nemá vysoký tlak a nemá vysokou teplotu.*

Analýza 2. čtení

2. analýza: $[p \wedge (q \vee r)] \supset s$, $\neg s$, $q \Rightarrow$???

Úvahou a ekvivalentními úpravami:

$[p \wedge (q \vee r)] \supset s, \neg s \Rightarrow \neg [p \wedge (q \vee r)]$ (transpozice)

$\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \wedge \neg r)$ (de Morgan)

$\Rightarrow$ ale platí q $\Rightarrow$ druhý disjunkt nemůže být pravdivý $\Rightarrow$ je pravdivý první: $\neg p$ (důsledek)

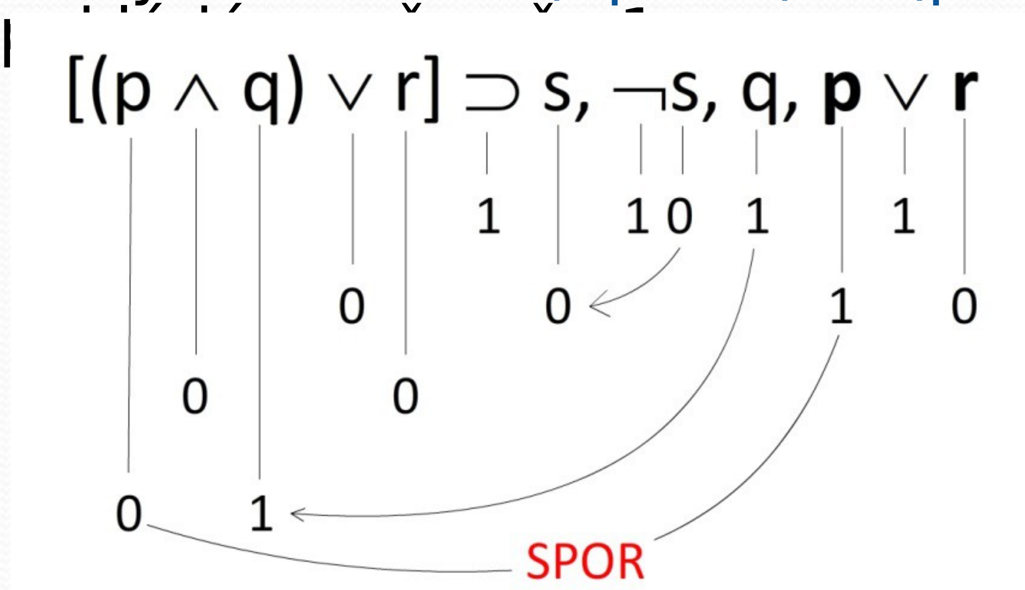
Tedy $\Rightarrow$ *Karel nemá vysoký tlak* (o jeho teplotě r nemůžeme nic usoudit)

Důkaz obou případů

1. analýza: $[(p \wedge q) \vee r] \supset s, \neg s, q \models \neg p, \neg r$
2. analýza: $[p \wedge (q \vee r)] \supset s, \neg s, q \models \neg p$ D.Ú.

a) 1. případ - tabulkou D.Ú.

b) 1. případ - sporem: k předpokladům přidáme negovaný závěr $\neg(\neg p \wedge \neg r) \Leftrightarrow (p \vee r)$ a předp



Shrnutí

- Typické úlohy:
  - Ověření *platnosti úsudku.*
  - *Co vyplývá* z daných předpokladů?
  - Doplňte chybějící předpoklady.
  - Je daná formule *tautologie, kontradikce, splnitelná?*
  - Najděte *modely* formule, najděte *model množiny* formulí.
- Umíme zatím řešit:
  - Tabulkovou metodou.
  - Úvahou a ekvivalentními úpravami.
  - Sporem, nepřímým důkazem.