

Matematická logika

Matematické základy Informatiky (úvod)

Marie Duží

marie.duzi@vsb.cz



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Učební texty:

<http://www.cs.vsb.cz/duzi>

Tabulka „Courses“, odkaz „Mathematical

Učební texty,

Presentace přednášek kursu „Matematická logika“,

Příklady na cvičení + doplňkové texty.

Podmínky pro absolvování předmětu

Viz. Edison

Celkem:

- alespoň **51 bodů** - **dobře (3)**,
- alespoň **66 bodů** - **velmi dobře (2)**,
- alespoň **86 bodů** - **výborně (1)**

Úvod

Co je to logika? Čím se logika zabývá?

Noel Coward o logice:

- *Matematici ji musejí provozovat,*
- *vědci ji pravděpodobně provozují,*
- *sociologové ji docela dobře nemohou provozovat,*
- *politikové předstírají, že ji provozují,*
- *informatičtí tvrdí, že nakonec ji budou provozovat počítače,*
- *filosofové se domnívají, že ji provozují nejlépe,*
- *postmodernisté říkají, že ji nemůžeme provozovat,*
- *Bůh ji nepotřebuje provozovat*
- *a Gödel řekl, že nikdo ji nemůže provozovat úplně.*

Úvod

Logika je věda o *správném usuzování*, neboli o umění *správné argumentace*.

Co je to úsudek (argument)?

Úsudek: na základě pravdivosti předpokladů (premis) P_1, \dots, P_n je možno soudit, že je pravdivý i závěr Z :

$$\frac{P_1, \dots, P_n}{Z}$$

Příklad: Na základě toho, že je úterý, **soudím**, že se koná přednáška „*Matematická logika*“:

úterý \Rightarrow přednáška

Úvod: správné (platné) úsudky

Budeme se zabývat pouze *deduktivně platnými úsudky*:

$$P_1, \dots, P_n \vDash Z$$

kdy závěr Z *logicky vyplývá* z předpokladů
(premis) P_1, \dots, P_n .

Definice 1:

Závěr Z **logicky** vyplývá z předpokladů P_1, \dots, P_n , značíme $P_1, \dots, P_n \vDash Z$, jestliže za žádných **okolností** nemůže nastat případ takový, že předpoklady (premisy) by byly *pravdivé* a závěr *nepravdivý*.

Úvod: správné (platné) úsudky

Příklad: Na základě toho, že je úterý, soudím, že se koná přednáška „*Matematická logika*“:

Dnes je úterý

Dnes je přednáška Matematická logika.

neplatný

Je to deduktivně platný úsudek? Není. Třeba je Duží nemocná a přednáška se nekoná, i když je úterý (chybí předpoklad, že každé úterý ...).

Každé úterý je přednáška Matematická logika.

Dnes je úterý.

Dnes je přednáška Matematická logika.

platný 😊

Deduktivně nesprávné úsudky: generalizace (indukce), abdukce

Nebudeme se zabývat úsudky *generalizací*
(*indukce*), *abduktivními*, a jinými *-dukce* ⇒
umělá inteligence (nemonotónní usuzování)

Příklad:

Doposud vždy v úterý byla logika.

Logika bude i toto úterý

indukce, neplatný

Všechny labutě v Evropě jsou bílé

Všechny labutě na světě jsou bílé

indukce, neplatný

Deduktivně nesprávné úsudky: generalizace (indukce), abdukce

Příklady:

Všichni králíci v klobouku jsou bílí.
Tito králíci jsou z klobouku.
⇒ Tito králíci jsou bílí.

Dedukce, platný

Tito králíci jsou z klobouku.
Tito králíci jsou bílí.
⇒ (asi) Všichni králíci v klobouku jsou bílí.

*Generalizace, Indukce,
neplatný*

Všichni králíci v klobouku jsou bílí.
Tito králíci jsou bílí.
⇒ (asi) Tito králíci jsou z klobouku.

*Abdukce, neplatný
Hledání předpokladů
(příčin) jevů,
diagnostika
„poruch“*

Příklady deduktivně správných (platných) úsudků

1.

Je doma nebo šel na pivo.
Je-li doma, pak se naučí na zkoušku.
Ale na zkoušku se nenaučil.

Tedy
Šel na pivo.

Někdy se zdá, jako bychom žádnou logiku nepotřebovali. Vždyť: Nenaučil-li se na zkoušku (dle 3. premisy), pak nebyl doma dle 2. premisy, a dle 1. premisy šel na pivo. Všichni běžně logiku používáme a potřebujeme. Bez ní bychom nepřežili:

2.

Všechny muchomůrky zelené jsou prudce jedovaté.
Houba, kterou jsem našla je muchomůrka zelená.

Houba, kterou jsem našla je prudce jedovatá.

Spolehnu se na logiku a nebudu zkoumat (jak bych to dělala?), zda je ta houba jedovatá.

Příklady deduktivně správných (platných) úsudků

3.

Všechny muchomůrky zelené jsou prudce jedovaté.
Tomáš je muchomůrka zelená.

Tomáš je prudce jedovatý. Tedy \Rightarrow

Úsudek je *správný*. Závěr je však *nepravdivý*.

Tedy alespoň jedna premisa je nepravdivá (zjevně ta druhá).

Okolnosti (dle Definice 1) jsou různé **interpretace** (dle expresivní síly logického systému). Logické spojky ('a', 'nebo', 'jestliže, ...pak...') mají pevný význam, **interpretujeme predikáty a funkční výrazy**.

V našem případě, kdyby byly výrazy „Tomáš“ a „muchomůrka zelená“ interpretovány tak, aby byla druhá premisa pravdivá, byla by zaručena pravdivost závěru.

Říkáme také, že úsudek má správnou *logickou formu*.

Deduktivně správné (platné) úsudky

Logika je *nástroj*, který pomáhá *objevovat vztah logického vyplývání*, tj. *ověřovat platnost argumentů*, řešit úlohy typu „Co vyplývá z daných předpokladů“?, apod.

P₁: Je-li tento kurs dobrý, pak je užitečný.

P₂: Buď je přednášející přísný, nebo je tento kurs neúžitečný.

P₃: Ale přednášející není přísný.

Tedy

Z: Tento kurs není dobrý.

Logika pomáhá naší „logické intuici“, která může někdy selhat.

- Premisy mohou být složitě formulované, „zapletené do sebe a do negací“, vztah vyplývání pak není na první pohled patrný.
- Podobně jako všichni rodilí mluvčí jazyka používají gramatická pravidla, aniž by znali gramatiku. Ale někdy je dobré se podívat do mluvnice jazyka českého (zejména v přípravě na soutěž „Chcete být milionářem?“).

Příklady úsudků

P₁: Všichni muži mají rádi fotbal a pivo.

P₂: Někteří milovníci piva nemají rádi fotbal.

P₃: Xaver má rád pouze milovníky fotbalu a piva.

Z: Některé ženy nemá Xaver rád.

Zdá se, že **nutně**, jsou-li pravdivé všechny
Předpoklady, pak musí být pravdivý i Závěr.

Jistě, má-li Xaver rád pouze milovníky fotbalu a piva
(3.), pak nemá rád některé milovníky piva (ty co
nemají rádi fotbal (2.)), tedy nemá rád (dle 1.)
některé „**ne-muže**“, t.j. **ženy**.

Je však tento úsudek logicky platný? (zkuste najít
protipříklad!)

Xaver a pivo

Dle **Definice 1** logicky platný *není*: úsudek je logicky platný, pokud je **nutně, tj. za všech okolností (interpretací) kdy jsou pravdivé předpoklady, je pravdivý i závěr.**

Ale: v našem příkladu ta individua, která ***nejsou muži*** by nemusela být interpretována jako ***ženy***.

Chybí zde premisa, že „*kdo není muž, je žena*“.
Podobně ještě potřebujeme premisu „*kdo je milovník něčeho, ten to má rád*“.

Příklady deduktivně správných (logicky platných) úsudků

Tedy: musíme uvádět všechny předpoklady nutné pro odvození závěru.

P_1 : Všichni muži mají rádi fotbal a pivo.

P_2 : Někteří milovníci piva nemají rádi fotbal.

P_3 : Xaver má rád pouze milovníky fotbalu a piva.

P_4 : Kdo není muž, je žena.

P_5 : Kdo je milovník něčeho, ten to má rád.

Nyní je úsudek logicky platný, má **platnou logickou formu**.

Z: Některé ženy nemá Xaver rád.

Závěr logicky vyplývá z předpokladů
(je v nich „informačně, dedukčně obsažen“).

Platné úsudky v matematice

Úsudek A:

Žádné prvočíslo není dělitelné třemi.
Číslo 9 je dělitelné třemi.

Číslo 9 není prvočíslo

logicky *platný*

Úsudek B:

Žádné prvočíslo není dělitelné šesti.
Číslo osm není prvočíslo.

neplatný

logicky

Ve druhém případě (Úsudek B) se sice nemůže stát, že by byly premisy pravdivé a závěr nepravdivý, avšak, závěr v případě B *nevyplývá logicky* z předpokladů.

Kdyby byl výraz „osm“ interpretován jako číslo 12, byly by předpoklady pravdivé, ale závěr nepravdivý.

(Závěr s předpoklady „přímo nesouvisí“, není v nich deduktivně obsažen)

Sémantická věta o dedukci

Je-li úsudek $P_1, \dots, P_n \vDash Z$ logicky platný, pak je *logicky nutně pravdivý* také výrok tvaru:

$$\vDash P_1 \wedge \dots \wedge P_n \supset Z$$

Nutně, jestliže jsou pravdivé všechny premisy P_1, \dots, P_n , pak je pravdivý i závěr Z . Tedy platí:

$$P_1, \dots, P_n \vDash Z \quad \Leftrightarrow \text{(právě když)}$$

$$P_1, \dots, P_{n-1} \vDash P_n \supset Z \quad \Leftrightarrow$$

$$P_1, \dots, P_{n-2} \vDash (P_{n-1} \wedge P_n) \supset Z \quad \Leftrightarrow$$

$$P_1, \dots, P_{n-3} \vDash (P_{n-2} \wedge P_{n-1} \wedge P_n) \supset Z \quad \Leftrightarrow \dots$$

$$\vDash (P_1 \wedge \dots \wedge P_n) \supset Z$$

Logická analýza jazyka

Správnost úsudku je dána *významem* (interpretací) jednotlivých tvrzení, která analyzujeme (formalizujeme) dle expresivní síly logického systému:

- *Výroková logika*: analyzuje jen do úrovně skladby složeného výroku z elementárních výroků, jejichž skladbu již dále nezkoumá. Elementární výroky vstupují jen svou pravdivostní hodnotou: Pravda – 1, Nepravda – 0 (algebra pravdivostních hodnot)
- *Predikátová logika 1. řádu*: analyzuje navíc elementární výroky do úrovně vlastností individuí a vztahů mezi nimi.
- *Predikátová logika 2. řádu*: analyzuje navíc vlastnosti vlastností a funkcí a vztahy mezi nimi.
- *Modální logiky* (nutně, možná), *epistémické logiky* (znalosti, hypotézy), *deontické logiky* (příkazy), ...
- *Transparentní intensionální logika* (snad **nejsilnější** systém) – je náplní kursu „*Inteligentní systémy*“.

Vlastnosti deduktivních úsudků

- *Ze sporných předpokladů* (které nemohou být nikdy všechny najednou pravdivé) vyplývá *jakýkoli závěr*.

Jestliže se budu pilně učit, pak uspěji u zkoušky.

U zkoušky jsem neuspěl, ačkoliv jsem se pilně učil.

- *Reflexivita*: je-li A jeden z předpokladů P_1, \dots, P_n , pak $P_1, \dots, P_n \vdash A$.

- *Transitivita*: jestliže

$$P_1, \dots, P_n \vdash Z \text{ a } Q_1, \dots, Q_m, Z \vdash Z', \text{ pak}$$
$$P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_m \vdash Z' .$$

Ještě úsudky

- Úsudek je platný, jestliže **nutně, za všech okolností, tj. při všech interpretacích (ohodnoceních ve výrokové logice)**, ve kterých jsou **pravdivé předpoklady**, je pravdivý i **závěr**:

$$P_1, \dots, P_n \models Z$$

- $P_1, \dots, P_n \models Z$ právě tehdy, když tvrzení tvaru (formule tvaru) P_1 a ... a P_n **implikuje** Z je vždy pravdivé (tautologie):

$$\models (P_1 \wedge \dots \wedge P_n) \supset Z$$

Ještě úsudky

$P_1, \dots, P_n \models Z$ právě tehdy, když $\models (P_1 \wedge \dots \wedge P_n) \supset Z$

POZOR!!!

To neznamená, že je či musí být závěr či některá premisa pravdivá. Jde o **platné úsudkové schéma**, nutný vztah mezi předpoklady a závěrem.

Ještě úsudky

Žádné prvočíslo není dělitelné třemi.
Číslo 9 je dělitelné třemi.

⇒ Číslo 9 není prvočíslo

Je platný úsudek, i když první premisa je nepravdivá. Jiná interpretace:

Všichni lidé jsou rozumní.
Kámen není rozumný.

⇒ Kámen není člověk

Ještě úsudky

Nebo, dosazením:

Je-li 12 prvočíslo, pak není dělitelné 3
12 je dělitelné 3
 \Rightarrow 12 není prvočíslo

Nebo:

12 není prvočíslo nebo není dělitelné 3
12 je dělitelné 3
 \Rightarrow 12 není prvočíslo

Platná úsudková schémata (logické formy):

- $A \supset B, A \vdash B$ *modus ponens*
- $A \supset \neg B, B \vdash \neg A$ *modus ponens + transpozice*
- $A \supset B, \neg B \vdash \neg A$ *modus ponens + transpozice*
- $\neg A \vee \neg B, B \vdash \neg A$ *eliminace disjunkce*

Ještě úsudky

- Tedy, dokážeme-li, že závěr logicky vyplývá z předpokladů, **nedokážeme tím, že závěr je pravdivý.**
- Je pravdivý **za předpokladu pravdivosti premis.**
- Úsudek, jehož premisy jsou pravdivé se anglicky nazývá **sound**. (Těžko přeložit, snad spolehlivý, přesvědčivý).
- **Ale:** pravdivost či nepravdivost premis může být **náhodná** záležitost, kdežto vztah vyplývání mezi premisami a závěrem je **nutný vztah** („za všech okolností ...“).
- Stejně jako je **tautologie logicky, tedy nutně pravdivá formule.**
- Má-li tvar implikace, zůstává (dle definice implikace) pravdivá, i když antecedent implikace je nepravdivý.



Děkuji Vám za pozornost

Na shledanou po přestávce