



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Predikátová logika

Predikátová logika je rozšířením logiky výrokové o kvantifikační výrazy jako každý, všichni, někteří či žádný. Nejmenší jazykovou jednotkou, kterou byla výroková logika schopna identifikovat, byla jednoduchá věta. Logika predikátová tuto jednoduchou větu dále strukturuje. Respektive, v situaci, kterou věta popisuje, rozlišuje jednak individua (objekty, o kterých mluvíme) a jednak predikáty (to, co individuí přisuzujeme). Ve struktuře tvrzení těmto složkám pak odpovídají termy (výrazy označující individua) a predikáty (výrazy označující vlastnosti těchto individuí či vztahy mezi nimi).

Individua a termy

Individua jsou jednotlivé objekty, o kterých mluvíme. Podle kontextu se jedná o objekty zcela odlišných druhů. Konstitutivní charakteristikou individuí je fakt, že je jsme schopni pojímat jako samostatné objekty, jednotliviny. Individuem může být podle kontextu cokoliv, na co jsme schopni ukázat a označit to jako "to."

Termy pak jsou všechny výrazy, které používáme k bezprostřednímu označování těchto individuí. Ve formalizovaných jazycích to jsou individuové konstanty a proměnné. Konstanty jsou výrazy, které označují právě jedno konkrétní, tj. stále stejné, individuum. Proměnné rovněž zastupují právě jedno individuum, toto individuum ale není konkrétní, nýbrž libovolné a podle kontextu to může být individuum pokaždé jiné. Jako individuové proměnné se v predikátové logice používají malá tiskací písmena x , y , z .

V přirozené jazyce pak můžeme říci, že individuovým konstantám odpovídají vlastní jména, zatímco proměnným zájmena. Zájmena rovněž zastupují jedno individuum, ale toto individuum se kontext od kontextu liší.

Predikáty

Predikáty jsou to, co v tvrzení o individuech vypovídám. Jsou to výrazy, které vyjadřují vlastnosti individuí nebo vztahy mezi nimi. Predikát sám o sobě je neúplný výraz. Vyžaduje vždy individuum, o kterém by se mohl vypovídat. To znamená, že teprve spojením predikátu s termem či termy vznikne tvrzení. Podle toho, kolik termů je třeba dosadit, aby vzniklo tvrzení dělíme predikáty na jednomístné a vícemístné.

Jednomístné predikáty vyžadují pouze jeden term, aby vzniklo tvrzení. Jako příklad můžeme použít výraz zelený. Aby vzniklo tvrzení, je třeba doplnit KDO je zelený, tedy

Projekt ESF OPVK . CZ.1.07/2.2.00/28.0216

"Logika: systémový rámec rozvoje oboru v R a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia"

je spolufinancován z Evropského sociálního fondu a státního rozpočtu České republiky.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

jeden term. Například "Česílko je zelený", "Ty jsi zelený" atd. Jednomístné predikáty vyjadřují vlastnosti individuů, tj. JAKÉ individuum je, nebo CO je zač.

Vícemístné predikáty jsou predikáty, které vyžadují více termů, aby vzniklo tvrzení. Např. predikát menší vyžaduje doplnění nejen toho, KDO je menší, ale také toho, NEŽ CO je menší. Teprve doplním dvou termů vznikne tvrzení, např. "Říp je menší než Sněžka". Vícemístné predikáty vyjadřují vztahy mezi individui. Většina vět přirozeného jazyka popisuje situaci, která je relací mezi určitým počtem individuů a tato relace je vyjádřena přísudkovou vazbou.

V přirozeném jazyce vyjadřují nějaký predikát všechny obecné termíny – tj. podstatná i přídavná jména a slovesa. V predikátové logice zastupují predikáty predikátové proměnné, tj. velká tiskací písmena P, Q, R. Za touto predikátovou proměnné je v závorce uveden výčet všech těch individuových proměnných, o kterých se vypovídá. Zápis $P(x)$ tedy znamená individuum x je P nebo x má vlastnost P. Zápis $R(x,y)$ znamená, že individuum x je v relaci R k individuu y .

Kvantifikátory

Poslední novou kategorií výrazů predikátové logiky jsou kvantifikátory. Kvantifikátory jsou výrazy, které o nějakém predikátu tvrdí, o kolika individuích se vypovídá. Například tvrzení "Všechno je zelené" tvrdí, že predikát být zelený má tu vlastnost, že se vypovídá o všech individuích. Kvantifikátory máme dva – obecný a existenční.

Obecný kvantifikátor tvrdí, že pro všechna platí, že ...,

zatímco

existenční kvantifikátor říká, že existuje alespoň jedno individuum takové, že platí ...

DeMorganovy zákony

Vztahy mezi obecným a existenčním kvantifikátorem vyjadřují DeMorganovy zákony. Ty říkají, za jakých podmínek můžeme obecný kvantifikátor převést na existenční a naopak. Tvrdí, že:

není pravda, že všechna x jsou P znamená, že existuje aspoň jedno x , které není P

není pravda, že aspoň jedno x je P znamená, že pro všechna x platí, že nejsou P

Projekt ESF OPVK . CZ.1.07/2.2.00/28.0216

"Logika: systémový rámec rozvoje oboru v R a koncepcí logických propedeutik pro mezioborová studia"

je spolufinancován z Evropského sociálního fondu a státního rozpočtu České republiky.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Jinými slovy, tvrzení o tom, že všechna x mají nějakou vlastnost bude nepravdivé, najdeme-li alespoň jedno individuum, které danou vlastnost nemá. A obráceně, nepodaří-li se nám najít aspoň jedno individuum, které by měl odanou vlastnost, můžeme tvrdit, že pro všechna individua platí, že tu vlastnost nemají.

De Morganovy zákony ale můžeme chápat i jako návod na mechanickou úpravu nějaké věty – máme-li ve větě zápor před kvantifikačním výrazem, kvantifikátor se změní na opačný a zápor se posune za něj. Stejně jako ve výrokové logice i v logice predikátové platí, že věta je tím srozumitelnější, čím kretší je negovaný úsek. Využití DeMorganových zákonů je tedy zřejmé.

Kombinace více kvantifikátorů

Formalizace

Formalizace je přepis vět z přirozeného jazyka do jazyka (v tomto případě) predikátové logiky. Ve výrokové logice formalizace spočívala v postupném nahrazování spojek spojkami logickými. V predikátové logice bude výchozím bodem formalizace určení kvantity – zda se daná věta vypovídá o všech nebo jen o některých prvcích univerza. V dalším kroku se potom tvrzení rozdělí na podmětovou a přísudkovou část a mezi ně se vloží implikace, jedná-li se o obecné tvrzení, a konjunkce, jedná-li se o tvrzení existenční.

Označme podmětovou část věty jako $Po(x)$ a přísudkovou jako $Př(x)$

Obecná forma obecných tvrzení tedy je: Pro všechna x platí jestliže $Po(x)$, pak $Př(x)$.

Obecná forma existenčních tvrzení je: Existuje alespoň jedno x takové, že platí $Po(x)$ a $Př(x)$

To, že se k obecnému kvantifikátoru pojí implikace a k existenčnímu konjunkce není vlastnost predikátové logiky, ale přirozeného jazyka. Je to určitá vazba, která je pro přirozený jazyk příznačná a které snadno rozumíme (víme, co si představit). Pokud by po kvantifikátoru následovala jiná spojka, byla by to sice správně utvořená formule predikátové logiky, nedávala by nám ale při čtení valný smysl.

V dalším kroku se pak dále rozkládají jednotlivé části věti.

Projekt ESF OPVK . CZ.1.07/2.2.00/28.0216

"Logika: systémový rámec rozvoje oboru v R a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia"

je spolufinancován z Evropského sociálního fondu a státního rozpočtu České republiky.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Hlavním krokem formalizace v prediktové logice tedy je správné určení kvantit, protože od ní se pak odvíjí základní větná struktura. Důležité je tedy uvědomit si, které kvantifikační výrazy odpovídají jakým kvantifikátorům:

každý, všichni, žádný, nikdo znamenají obecný kvantifikátor

ne všichni, ne každý znamenají negaci obecného kvantifikátoru

někteří znamená existenční kvantifikátor

neexistuje znamená negaci existenčního kvantifikátoru

Např.

Všechny labutě jsou bílé. Pro všechna x platí, jestliže x je labuť, pak x je bílé.

Žádný učený z nebe nespádl. Pro všechna x platí, jestliže x je učený, pak x nespádl z nebe.

Ne každý má pod čepicí. Není pravda, že pro všechna x platí, že x má pod čepicí.

Dále, každá věta přirozeného jazyka vyjadřuje nějakou relaci mezi individui. Vyjímkou jsou jednoduché predikativní věty typu "Tráva je zelená". Proto je třeba si při každé formalizaci uvědomit, kolik různých druhů objektů popisuje. Každý tento druh objektů pak vyžaduje vlastní individuovou proměnnou a vlastní kvantifikátor. Obvykle i vlastní predikát, který říká, co je zač. Ve větě "Pekař peče housky" tak máme dva druhy individuí – pekaře a housky. Ta věta tvrdí, že pro každého pekaře platí, že upekl nějakou housku. Proto její formalizace bude vypadat:
Pro všechna x platí, jestliže x je pekař, pak existuje y takové, že y je houska a x peče y .

Vztahy mezi tvrzeními

Stejně jako ve výrokové logice půjde především o rozhodnutí, zda dvě tvrzení jsou nebo nejsou ekvivalentní. Pokud dva výrazy jsou ekvivalentní, znamená to, že mohou, i když nemusí, být synonymní. Pokud ale ekvivalentní nejsou, nemohou být ani synonymní. Ekvivalence je tedy jakousi minimální podmínkou synonymie.

Protože obecná tvrzení v sobě obsahují implikaci, lze pro určování ekvivalence použít implikační schémata konverze, inverze a kontrapozice jak je známe z výrokové logiky.

Vezměme věty:

Projekt ESF OPVK . CZ.1.07/2.2.00/28.0216

"Logika: systémový rámec rozvoje oboru v R a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia"

je spolufinancován z Evropského sociálního fondu a státního rozpočtu České republiky.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Kovářova kobyla chodí vždycky bosa.

Kobyla, která chodí bosa, je kovářova.

Kobyla, která není kovářova, bosa nechodí.

Kobyla, která nechodí bosa, není kovářova.

Lze snadno ukázat, že první a čtvrtá jsou navzájem ekvivalentní, protože se jedná o kontrapozici. Druhá a třetí věta jsou opět ekvivalentní, protože jsou rovněž ve vztahu kontrapozice. Nejsou ale ekvivalentní s první (a tedy ani se čtvrtou), protože druhá je konverzí a třetí je inverzí první věty.

Dalším nástrojem pro určování ekvivalence mezi tvrzeními jsou DeMorganovy zákony. Týkají se situace, kdy porovnáváme dvě věty vyjádřené pomocí různých kvantifikátorů.

Vezměme věty:

Ne všichni sloni žijí v Africe

Někteří sloni žijí v Africe.

Někteří sloni nežijí v Africe.

Zformalizujeme-li první větu, získáme zápis:

Není pravda, že pro všechna x platí, jestliže x je slon, pak x žije v Africe.

Odstraníme-li negaci u kvantifikátoru podle DeMorganových zákonů, získáme:

Existuje alespoň jedno x takové, že není pravda, že jestliže x je slon, pak x žije v Africe.

Protože k existenčnímu kvantifikátoru patří konjunkce, musíme v dalších krocích implikaci převést na konjunkci, aby vzniklo srozumitelné tvrzení. Toho dosáhneme převedením implikace na disjunkci a poté použitím DeMorganových zákonů pro konjunkci a disjunkci tak, jak to známe z výrokové logiky, až vyjde:

Existuje alespoň jedno x takové, že x je slon a x nežije v Africe.

Tyto postupné úpravy ukazují, že chceme-li vyjádřit tentýž obsah pomocí různých kvantifikátorů, musí se výsledné věty lišit o dva záporné – o zápor u kvantifikátoru a o zápor v přísudku.

Konečně můžeme v predikátové logice používat logický čtverec tak, jak jej známe z logiky Aristotelovské. Přepis logického čtverce do predikátové logiky má následující podobu:

Projekt ESF OPVK . CZ.1.07/2.2.00/28.0216

"Logika: systémový rámec rozvoje oboru v R a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia"

je spolufinancován z Evropského sociálního fondu a státního rozpočtu České republiky.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- Každé S je P: Pro všechna x platí, jestliže x je S, pak x je P.
- Žádné S není P: Pro všechna x platí, jestliže x je S, pak x není P.
- Některé S je P: Existuje alespoň jedno x, pro které platí, že x je S a zároveň x je P.
- Některé S není P: Existuje alespoň jedno x, pro které platí, že x je S a zároveň x není P.

Přičemž každý z těchto čtyř soudů má podle DeMorganových zákonů ještě alternativní formulaci používající druhý kvantifikátor.

Logický čtverec můžeme pro určování vztahů mezi tvrzeními používat v případě, kdy obě věty mají stejný podmět. Je to pak jen otázka správného určení kvantity a kvality, tedy zařazení do logického čtverce.

Projekt ESF OPVK . CZ.1.07/2.2.00/28.0216

"Logika: systémový rámec rozvoje oboru v R a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia"

je spolufinancován z Evropského sociálního fondu a státního rozpočtu České republiky.