LOGIKA

RNDr. Ondrej Majer CSc.

Katedra filosofie

Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická

Technická Univerzita v Liberci

Inovace tohoto kurzu byla podpořena z projektu OPVK

reg.č. CZ.1.07/2.2.00/28.0216

Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia

který je spolufinancován z Evropského sociálního fondu a státního rozpočtu České republiky

evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

I. Argumentace

Argumentační výpověď – výpověď, v níž se pomocí určitých tvrzení zdůvodňuje pravdivost nějakého jiného, v zásadě problematického, tvrzení.

Argument – systém tvrzení extrahovaný z argumentační výpovědi,

Ne každá řada tvrzení je argumentem, argument, musí mít určitou strukturu.

Tvrzení o které tvrdíme, že je pravdivé na základě pravdivosti jiných tvrzení se nazývá ***závěr*** argumentu.

Propozice, na jejichž pravdivosti zakládáme pravdivost závěru se nazývají ***předpoklady*** (***premisy***) argumentu.

Argument vyjadřuje
(a) že předpoklady jsou pravdivé
(b) že pravdivost předpokladů zaručuje pravdivost závěru.

> *Bůh přeje každé existující věci dobro. Protože milovat nějakou věc není nic jiného než přát jí dobro, Bůh miluje vše, co existuje.*
> *(Tomáš Akvinský)*

> *Jelikož zvířata dokážou instinktivně najít léčivé rostliny a používat je v nemoci a lidé pocházejí ze zvířat, tudíž i oni musí mít tytéž, byť možná*

hluboko ukryté schopnosti.

Myslím, tedy jsem.

Z hlediska logiky nás nezajímá obsah argumentu, ale jeho forma.

Formálně chápaný argument nazýváme **úsudek** (inference)

Některé úsudky jsou **správné** (**platné**), některé ne, metody jak je rozlišit je jednou z úloh logiky.

Argumenty v přirozeném jazyce

mohou mít různou formu – mohou začínat závěrem a pokračovat premisami, premisy i závěr mohou být obsaženy v jedné větě, mohou používat skryté premisy, nemusí obsahovat explicitně vyjádřený závěr.

Skryté premisy.

Každý zákon je zlo, protože každý zákon je narušením svobody.

P1: Každý zákon je narušení svobody
P2: Každé narušení svobody je zlo
Z: Každý zákon je zlo

Nepřítomnost závěru

> *Pojem pornografie je vágní. Kdybychom pornografii právně zakázali, nevěděli bychom, co zakazujeme, ale právo přece musí přesně vymezovat hranice mezi zakázaným a povoleným.*

(Z: Nezakazovat pornografii)

> *Kdyby KSČ byla zločinecká organizace, znamenalo by to, že jsme měli před rokem 1989 v zemi dva miliony zločinců.*

(Z: KSČ nebyla zločinecká organizace)

Argumentace v dialogu

Sokratés: Není ten, kdo se naučil umění stavět, stavitelem? Je to tak?

Gorgiás: Ano.

Sokratés: Tedy ten, kdo se naučí léčit, je lékařem, a stejně je to s jinými uměními? Pokud se někdo naučí nějakému umění, nabývá znalostí, jaké každé z nich obsahuje?

Gorgiás: Bezpochyby.

Sokratés: Podle tohoto principu ten, kdo ví, co je spravedlnost, je spravedlivý.

> *Stoupenci trestu smrti tvrdí, že poprava vraha bude výstrahou a odradí jiné před spácháním vraždy. Ale to je slaboučký argument. Abychom ho přijali, museli bychom dokázat, že vrah, když plánuje zločin, sám předvídá, že bude chycen a potrestán. Chladnokrevně připravovat vraždu by pak dokázal jedině masochista. Je známo, že to tak není.*

Struktura argumentu

Argument nemusí mít jednoduchou lineární strukturu, kdy z řady předpokladů vyplývá jeden závěr. Může se skládat z řady navzájem propojených úsudků, kdy závěr jednoho může být předpokladem dalšího úsudku.

> *Archimédes bude připomínán, i když Aischylos bude zapomenut, protože jazyky umírají, kdežto matematické ideje nikoli.*

1. Jazyky umírají
2. Aischylovy hry jsou napsány v jazyce – skrytá premisa
3. Aischylovo dílo může zemřít
4. Matematické ideje nikdy nezemřou.
5. Archimédovým dílem jsou matematické ideje – skrytá premisa
6. Tedy Archimédovo dílo nikdy nezemře
7. Proto Archimédes bude připomínán i když Aischylos bude zapomenut

1.	4.
2.	*5.*
3.	6.

7.

(1) Můžeme očekávat, že dojde k malým změnám v délce našeho kalendářního roku. Je tomu tak ze dvou důvodů. (2) Za prvé, obíhání Země kolem Slunce

podléhá určitým nepravidelnostem. (3) Obíhání každého tělesa je ovlivněno rozložením hmoty a (4) rozložení hmoty Země podléhá kontinuálním změnám. (5) Například zemětřesení mění polohu tektonických desek. (6) Také hmota v tekutém jádru se přeskupuje během pohybů Země a navíc (7) déšť přemisťuje vodu z oceánů. Druhý důvod je, že (8) pohyb hmoty při přílivu a odlivu neustále zpomaluje obíhání Země. (9) Tento pohyb totiž produkuje teplo a (10) ztráta tepla vede k úbytku energie ze systému.

```
     (5) (6) (7)
       \  |  /
  (3)    (4)            (9)    (10)
     |                      |
    (2)                    (8)
          \              /
               (1)
```

Argument x vysvětlení

Argument

Pokud je pravdivost nějakého tvrzení *T* problematická a se snažíme ***prokázat jeho pravdivost*** tak, že uvádíme nějaké důvody *P* podporující pravdivost *T*. Tedy předkládáme argument pro pravdivost *T* a *P* je naše premisa.

Vysvětlení

Pokud už víme, že *T* pravdivé je, můžeme chtít zdůvodnit *proč* je pravdivé. Můžeme také uvádět důvody pro pravdivost *T*, nepředkládáme tím argument pro *T*, ale vysvětlení *T*.

> *Nejvzdálenější kvazary se jeví jako body intenzivně vyzařující infračervenou část spektra. To je proto, že ve vesmíru jsou rozptýlené atomy vodíku, které pohlcují modré světlo a pokud od bílého světla odečtete modrou, zůstane vám červená.*

Vysvětlení: Měsíc svítí, protože odráží sluneční světlo.

Argument: Bůh neexistuje, protože svět je plný zla.

?: Tomáš se bál přiznat vinu, a proto lhal.

Vysvětlení: Strana XY nevyhrála ve volbách, protože lidé chtěli změnu.

Argument: Strana XY nevyhraje ve volbách, protože lidé chtějí změnu.

Induktivní a deduktivní argumenty

Argument je *deduktivně platný*, když z pravdivosti předpokladů nutně vyplývá pravdivost závěru.

Argument je *induktivně platný*, když z pravdivosti předpokladů vyplývá vysoká pravděpodobnost závěru.

Deduktivní argument:
Zloděj se dostal do domu buďto dveřmi, nebo oknem. Pokud vnikl do domu oknem, musel to být velice štíhlý člověk. Podle hloubky stop v blátě před domem víme, že se nejedná o hubeného člověka. Takže zloděj musel do domu vniknout dveřmi.

Induktivní argument:
Téměř všichni herci jsou extraverti. XY je herec. Takže XY je (asi) extravert.

Deduktivní argument:
Rodina Procházků má tři členy: Jana, Marii a Toníka. Jan je nemocný, Marie je nemocná a také Toník je nemocný. Tudíž všichni členové rodiny Procházků jsou nemocní.

Induktivní argument:
Zatím v prosinci vždycky sněžilo. Tudíž i tento prosinec bude sněžit.

Cvičení

Určete předpoklady a závěr u následující argumentů

Jelikož se ukázalo, že všichni lidé jsou potomky malého počtu společných afrických předků, je jakékoli přesvědčení o zásadních rozdílech mezi rasami stejně směšné, jako myslet si, že je Země plochá.

Rozum je dar od boha, pokud jej používáme k poznání světa není to urážka boha ale jeho potěšení. (Tomáš Akvinský)

Změny jsou reálné. Změny jsou možné pouze v čase a proto čas musí být něčím reálným. (Kant, Kritika čistého rozumu)

Vesmír obsahuje velké množství atomů, že ani věčnost by nestačila k jejich spočítání. Nestačila by ani ke spočítání sil, které řídí spojování atomů do různých tvarů stejně jako byly spojeny v tomto světě. Musíme si tedy uvědomit, že v jiných částech vesmíru existují jiné světy s jinými lidskými i zvířecími rasami. (Lukrecius, De Rerum Natura)

Cvičení Určete strukturu argumentu v následujících populárně-vědeckých textech

Aralské jezero nemá odtok, tudíž je kolísání jezerní hladiny výsledkem bilance vypařování, srážek a přítoku. Zmenšování plochy jezera vede ke snížení objemu vypařované vody, která tak může být kompenzována i relativně malým přítokem. Tento efekt je nyní významný zejména vzhledem k plošně rozsáhlé, ale mělké Východní pánvi (o maximální hloubce 5 m). I malé snížení jejího objemu vody má za následek velké zmenšení vodní plochy, a tím i výrazně snížený výpar. Jezero tedy při stejném přítoku ubývá stále pomalejším tempem. Protichůdně působí oteplení oblasti o 2 °C, které nastalo v důsledku změny mikroklimatu snížením jezerní plochy.

Současné systémy identifikace a ochrany dat pomocí PIN, hesel a přístupových karet začínají být z bezpečnostního hlediska nedostatečné a nepraktické. Stále častěji dochází k situacím, kdy heslo zapomeneme, přístupovou kartu ztratíme nebo je nám dokonce odcizena. Navíc roste poptávka po dokonalejším zabezpečení i ze strany institucí, jako jsou letiště, banky, soudy, vojenské objekty a vývojová střediska. Z těchto důvodů se v posledních letech investují nemalé částky do vývoje alternativních zabezpečovacích a identitu ověřujících technologií.

Jako ideální prostředek ověřování identity jedinců neboli autentizace se jeví biometrické údaje. Jsou to takové údaje, které získáváme měřením určitých fyziologických znaků částí lidského těla – například velikosti, tvaru nebo struktury. Tyto znaky se zpravidla vyznačují vysokou variabilitou mezi jedinci a mohou být proto dobře využity k jejich rozlišení. Výhoda biometrického ověření identity spočívá na skutečnosti, že není založeno na tom, „co víte nebo co znáte“, ale, „kdo jste“, a proto je tento systém v praxi daleko obtížněji prolomitelný.

V porovnání s ostatními biometrickými údaji je totiž duhovka fenotypicky extrémně variabilní a stabilní systém, navíc dokonale chráněný uvnitř oka. Přestože je struktura a barva duhovky do vysoké míry dědičná, v detailech se u každého jedince vždy liší, včetně stranových odlišností jednoho páru. To je dáno především nahodilým fetálním vývojem embryonálních základů duhovky. Množství variací ve struktuře, stavbě trámčiny, a rozličná intenzita pigmentace je u každého jedince tak unikátní, že dokonce ani jednovaječná dvojčata nemají na rozdíl od ostatních znaků identickou strukturu duhovky.

II. Výroková logika

1. Základní pojmy – výrokové spojky a jejich význam

Výrok odpovídá oznamovacím větám přirozeného jazyka, u kterých můžeme (alspoň v principu) určit, jestli jsou pravdivé nebo nepravdivé.
V přirozeném jazyce tvoříme z jednoduchých vět tvoříme pomocí spojek věty složené. Podobně tvoříme v jazyce výrokové logiky z jednoduchých výroků složené výroky pomocí *logických spojek*. Názvy logických spojek odkazují k přirozenému jazyku, jak ale uvidíme, tato korespondence nebude přímočará.

Výrokové spojky

Význam spojek přirozeného jazyka je dán způsobem, jakým utvářejí význam složeného výrazu. Jelikož významem výroků je pravdivostní hodnota, je význam logických spojek dán způsobem, jakým určují pravdivostní hodnoty složeného výroku na základě pravdivosti jeho složek.zůčastněných výroků.

Konjunkce э (někdy také &)

- odpovídá spojkám *a, ale*, *i,...*

Konjunkce dvou výroků je

- *pravdivá*, právě když jsou pravdivé obě její části (konjunkty)
- *nepravdivá*, právě když alespoň jedna její část (konjunkt) je nepravdivá.

Formálně

A э ***B*** je pravda	*právě když*	***A*** je pravda a zároveň ***B*** je pravda
A э ***B*** *není pravda*	*právě když*	***A*** *není pravda nebo* ***B*** *není pravda (nebo ani jedno)*

Disjunkce (

- odpovídá spojce *nebo* ve významu slučovacím

Disjunkce dvou výroků je

- *pravdivá*, právě když je alespoň jedna její část (disjunkt) je pravdivá
- *nepravdivá*, právě když jsou pravdivé obě její části (disjunkty).

Formálně

A (*B* je pravda *právě když* *A* je pravda nebo *B* je pravda (nebo obojí)

A (*B* není pravda právě když *A* není pravda a zároveň *B* není pravda

Implikace →

– odpovídá vazbě *jestliže … , pak ...*

Implikace je

- *pravdivá*, právě když je její první část (antecedent) nepravdivá nebo její druhá část (konsekvent) pravdivá
- *nepravdivá*, právě když je její první část (antecedent) pravdivá a její druhá část (konsekvent) nepravdivá

A→*B* je pravda *právě když* *A* není pravda nebo *B* je pravda

A→*B* není pravda *právě když* *A* je pravda a *B* není pravda

A↔ *B* je pravda *právě když* *A* a *B* jsou oba pravdivé nebo oba nepravdivé

¬*A* je pravda *právě když* *A* není pravda

Kdy jsou složené výroky *ne*pravdivé (je pravdivá jejich *negace*)

A∍*B* není pravda

A není pravda nebo *B* není pravda (nebo ani jedno)

¬ (*A*∍*B*)

¬*A*(¬*B*

A(*B* není pravda
A není pravda a zároveň *B* není pravda

¬(*A*(*B*)
¬*A*э¬*B*

A→*B* není pravda
A je pravda a *B* není pravda

¬ (*A*→*B*)
*A*э¬*B*

A↔ *B* není pravda
A je pravda a *B* nepravda nebo naopak

¬ (*A*↔*B*)
(*A*э¬*B*)((¬*A*э*B*)

¬*A* není pravda
A je pravda

¬ (¬ *A*)
A

Tyto podmínky se obvykle zadávají ve formě **pravdivostní tabulky**

A	*B*	¬*A*	*A* ∍*B*	*A* (*B*	*A* →*B*	*A* ↔ *B*
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Logické spojky jsou navzájem definovatelné – pomocí negace a jedné další spojky lze vyjádřit všechny ostatní. Tyto logické spojky jsou považovány za standardní, mohli bychom definovat ještě další spojky jiné spojky, zajímavé jsou:

Shefferův operátor

A | *B* *nikoli* ***A*** *a současně* ***B*** (*nand* z anglického *not and*)

Peirceův operátor

A↓*B* *ani* ***A*** *ani* ***B*** (*nor* z anglického *not or*)

pomocí každého z nich lze definovat všechny základní logické spojky (včetně negace).

2. Základní sémantické vztahy ve výrokové logice

Pravdivost výroku je dána pravdivostmi jeho součástí. Úplnému výčtu pravdivostních hodnot jednoduchých (atomických) výroků budeme říkat ***situace*** nebo formálněji ***model***.

1) Vztahy mezi výrokem a situací (situacemi)

a) Je daný výrok pravdivý ***v dané*** situaci?
   Úloha: *Pokud prší nebo není teplo, (pak) Amélie ne jde na pláž.*
   Situace: *Prší.* – pravdivý
   Je teplo. – pravdivý
   Amélie jde na pláž. – pravdivý
   Metoda: dosazení.

b) Je daný výrok pravdivý ***vůbec v nějaké*** situaci (je ***splnitelný***)?
   Úloha (diplomatický ples)
   Princ: *Je teplo nebo neprší.*
   Královna: *Prší nebo jde Amélie na pláž.*
   Král: *Není teplo nebo Amélie nejde na pláž.*
   Metoda: tabulka – je alespoň v jednom řádku (= situaci) pro daný výrok (=sloupec)
   výsledek pravda?

c) Je daný výrok pravdivý ***v každé*** situaci (je ***tautologií***)?
   (Je nějaká situace, za které dané tvrzení neplatí?)
   Metoda: tabulka – všechny řádky (= situace) mají výsledek pravda?

d) Je daný výrok ***ne***pravdivý ***v každé*** situaci?
   Metoda: tabulka – všechny řádky (= situace) mají výsledek nepravda?

2) Vztahy mezi výroky

α) Jsou daná dvě tvrzení (ne)pravdivá za stejných situací (jsou ***ekvivalentní***)?

Pokud neprší a je teplo, (pak) jde Amélie na pláž.

Prší nebo není teplo nebo Amélie nejde na pláž.

Metoda: tabulka – jsou ve všechny řádcích (= situacích) jsou pro příslušné sloupce (=tvrzení) stejné hodnoty?

Sémantický strom – platí jeden a neplatí druhý nebo naopak

β) Je druhý výrok pravdivé za všech situací, kdy je pravdivý první (**vyplývá** druhý výrok z prvního)?

Neprší, je teplo a Albert jde na pláž.

Pokud neprší a je teplo, (pak) jde Albert na pláž.

Tabulka: kdykoli je pravda v prvním sloupci, je i v druhém.

3. Metoda sémantických stromů

(*Tableux method* v anglicky psané literatuře)

Tato metoda primárně řeší úlohu ***splnitelnosti*** výroků – snaží se najít situaci, kdy je daný výrok pravdivý.

- metoda sémantických stromů je systém pravidel, který převádí problém pravdivosti složeného výroku formule na problém pravdivosti jednoduchých výroků
- při rozkladu na jednodušší formule vlastně přepisujeme jiným způsobem podmínky pravdivosti, resp. nepravdivosti složených výroků, pro každou spojku tedy máme 2 pravidla

Výroky, které jsou výsledkem rozkladu nějakého složeného výroku musí být buď

- pravdivé současně – píšeme je pod sebe,
- nebo musí být pravdivá alespoň jeden z nich – píšeme je vedle sebe.

Např. pravidla pro konjunkci lze tedy číst takto:

	($A \wedge B$ není pravda)
$A \wedge B$ je pravda	$\neg(A \wedge B)$ je pravda

A je pravda	/ \
(a zároveň)	¬***A*** (nebo) ¬***B***
B je pravda	je je
	pravda pravda

- V rozkladu pokračujeme tak dlouho, dokud nám nezbudou pouze formule, které už nelze rozložit (tedy atomické formule nebo jejich negace).
- Vznikne tak struktura, která se v matematice nazývá *strom*.Větev sémantického stromu odpovídá situaci
- Je určena atomickými výroky, které se v dané větvi vyskytují
- Ty, které se vyskytují pozitivně (bez negace) jsou v této situaci *pravdivé* a
- Ty, které se vyskytují s negací jsou v ní *nepravdivé*.
- Pokud se nějaký atomický výrok v dané větvi vůbec nevyskytuje, pak může být v této situaci jak pravdivý, tak i nepravdivý.

$$\frac{A \wedge B}{\begin{array}{c}A\\B\end{array}}$$

$$\frac{A \vee B}{\begin{array}{cc}/ & \backslash\\A & B\end{array}}$$

$$\frac{A \rightarrow B}{\begin{array}{cc}/ & \backslash\\\neg A & B\end{array}}$$

$$\frac{\neg (A \wedge B)}{\begin{array}{cc}/ & \backslash\\\neg A & \neg B\end{array}}$$

$$\frac{\neg (A \vee B)}{\begin{array}{c}\neg A\\\neg B\end{array}}$$

$$\frac{\neg (A \rightarrow B)}{\begin{array}{c}A\\\neg B\end{array}}$$

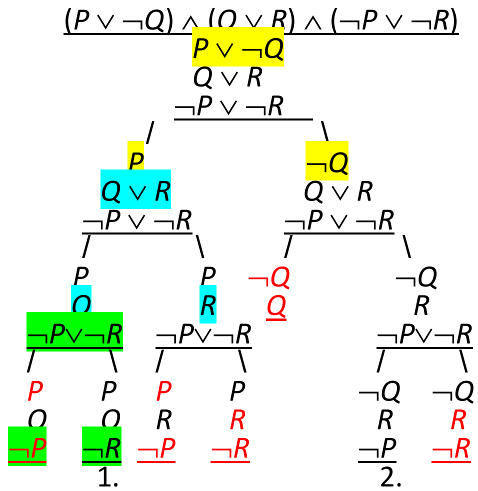
$$\frac{\neg(\neg A)}{A}$$

Pokud se v nějaké větvi sémantického stromu vyskytne nějaký atomický výrok a zároveň jeho negace, pak větev neodpovídá žádné situaci a říkáme, že je ***uzavřená****.*

- Pokud jsou ***všechny*** větve sémantického stromu vzniklého rozkladem zkoumané formule ***uzavřené***, pak neexistuje situace, za které by tato formule byla pravdivá – formule je ***nesplnitelná***.
- Pokud je nějaká větev ***otevřená***, pak odpovídá situaci, za které je formule pravdivá a formule je ***splnitelná***.

Příklad (Diplomatický ples)
Princ: *Pozvěte Peru nebo nezvěte Katar.* $P \vee \neg Q$
Královna: *Pozvěte Katar nebo Rumunsko nebo oba dva.* $Q \vee R$
Král: *Nezvěte Peru nebo nezvěte Rumunsko, případně žádného z nich.* $\neg P \vee \neg R$

Chceme, aby byly splněny všechny podmínky, tedy aby byla pravdivá jejich konjunkce. Podle pravidla pro konjunkci napíšeme konjunkty pod sebe a dále rozkládáme první formuli v pořadí atd.



Řešení: větve 1. a 2. výsledného stromu jsou otevřené, ostatní jsou uzavřené.
Větev 1. odpovídá situaci *P pravda, Q pravda, R nepravda*.
Tedy pozvěte Peru a Katar, nezvěte Rumunsko.
Větev 2. odpovídá situaci *Q nepravda, R pravda, P nepravda*.
Tedy pozvěte Rumunsko, nezvěte Peru a Katar.

Tautologičnost
Metodu sémantických stromů řešící splnitelnost, resp. nesplnitelnost formule. Lze jí ale použít i k řešení dalších úloh jako ***metodu hledání protipříkladu***.
Vezměme si následující otázky:

a) Je formule *F* tautologií?
b) Je formule *F* pravdivá ve všech situacích?
c) Existuje situace, za které je *F* nepravdivá?
d) Existuje situace, za které je pravdivá negace *F* ?

Je evidentní, že všechny otázky se ptají na totéž (ale každá jiným způsobem).
Pokud odpovíme *ano* na otázky a) a b) musíme odpovědět *ne* na c) a d) a naopak. Metoda protipříkladu zaměňuje otázku a) otázkou d).
Příklad:
Je $F=(P \vee T) \vee \neg P$ tautologie? tedy
Existuje situace, za které je pravdivá $\neg F = \neg\,((P \vee T) \vee \neg P)$?

```
¬ ((P∨T)∨¬P)
      |
   ¬ (P∨T)
   ¬(¬P)
      |
     ¬P
     ¬T
      P
```

Výsledný strom má jedinou větev a ta je uzavřená. Žádná situace, za které je ¬F pravdivá neexistuje, tedy ¬F není splnitelná, tedy *F* je tautologie.

Vyplývání

Podobné je to s relací vyplývání.

a) Vyplývá formule *Z* z formulí P_1, ..., P_n?

b) Je *Z* pravdivá v každé situaci, kdy jsou pravdivé P_1, ... P_n?

c) Existuje situace, kdy jsou P_1, ... P_n pravdivé a Z nepravdivá?

Příklad:

Pokud nemá Česko zdroje ropy nebo dostatečné zásoby uhlí, mělo by investovat do alternativních zdrojů.
Česko nemá zdroje ropy.

Česko by mělo investovat do alternativních zdrojů.

P1: A
P2: (A∨B)→C?

Z: C

Otázka: Můžeme najít situaci, kdy jsou pravdivé A, (A∨B)→C a C nepravdivá?

```
        A
     (A∨B)→C
       ¬C
      /    \
     A      A
  ¬ (A∨B)    C
    ¬C      ¬C
     |
       A
     ¬A
     ¬B
     ¬C
```

Odpověď: Nemůžeme.

Tedy kdykoli jsou pravdivé A, (A∨B)→C, je pravdivé i C.

Tedy C vyplývá z A, (A∨B)→C.

Vyplývání

Je teplo.
<u>Pokud neprší nebo je teplo, Amélie jde na pláž.</u>
Amélie jde na pláž.

$$\frac{\begin{array}{l} t \\ (\neg p \vee t) \rightarrow a \end{array}}{a}$$

Do tabulky zapíšeme situace, premisy a závěr.

situace					1. premisa	2. premisa	závěr
t	p	a			t	$(\neg p \vee t) \rightarrow a$	a
P	P	P					
P	P	N					
P	N	P					
P	N	N					
N	P	P					
N	P	N					
N	N	P					
N	N	N					

situace			pomocné f.		1. premisa	2. premisa	závěr
t	p	a	$\neg p$	$(\neg p \vee t)$	t	$(\neg p \vee t) \rightarrow a$	a
P	P	P					
P	P	N					
P	N	P					
P	N	N					
N	P	P					
N	P	N					
N	N	P					
N	N	N					

Pro určení pravdivosti 2. premisy potřebujeme určit pravdivost jejich podformulí.

Nemusíme vyplňovat celou tabulku – jen řádky, kdy jsou premisy ***pravdivé.***

situace			pomocné f.		1. premisa	2. premisa	závěr
t	p	a	$\neg p$	$(\neg p \vee t)$	t	$(\neg p \vee t) \to a$	a
P	P	P	N	P	P	P	P
P	P	N	N	P	P		
P	N	P	P	P	P	P	P
P	N	N	P	P	P		
N	P	P	N	N		P	
N	P	N	N	N		P	
N	N	P	P	P		P	
N	N	N	P	P			

Premisy jsou pravdivé v situacích odpovídajících
1. řádku (*Je teplo. Prší. Amélie jde na pláž.*)
3. řádku (*Je teplo. Neprší. Amélie jde na pláž.*

Otázka: Vyplývá závěr z předpokladů?

Úvaha:
Závěr je pravdivý ve všech situacích, kdy jsou pravdivé premisy (tj. v situacích 1. 3.) *tedy*
Závěr vyplývá z premis
tedy
Úsudek je platný.

Příklad 2

Prší.
<u>Pokud neprší nebo je teplo, Amélie jde na pláž.</u>
Amélie nejde na pláž.

p
$\underline{(\neg p \vee t) \rightarrow a}$
$\neg a$

situace			pomocné f.		1. premisa	2. premisa	závěr
t	p	a	$\neg a$	$(\neg p \vee t)$	p	$(\neg p \vee t) \rightarrow a$	$\neg a$
P	P	P	N	P	P	P	N
P	P	N	P	P	P	N	P
P	N	P	N	P	N	P	N
P	N	N	P	P	N	N	P
N	P	P	N	N	P	P	N
N	P	N	P	N	P	P	P
N	N	P	N	P	N	P	N
N	N	N	P	P	N	N	P

Premisy jsou pravdivé v situacích odpovídajících
1. řádku (*Je teplo. Prší. Amélie jde na pláž.*)
5. řádku (*Není teplo. Prší. Amélie nejde na pláž.*)
6. řádku (*Není teplo. Neprší. Amélie jde na pláž.*)

Otázka: Vyplývá závěr z předpokladů?

Úvaha:
Premisy jsou pravdivé v situacích 1., 5., 6.
Závěr je pravdivý ve situaci 1. , ale ***není*** pravdivý v situacích 5.6.
tedy
Závěr ***nevyplývá*** z premis
tedy
Úsudek ***není*** platný.

Vyplývání ve výrokové logice – věta o dedukci

Úsudek je postup, který z pravdivosti výchozích tvrzení (premis) vyvozuje pravdivost jiného tvrzení (závěru).

Neformálně

Víme, že platí: *Pokud neprší nebo je teplo, Amélie jde na pláž.*
Je teplo.
Můžeme tvrdit, že platí *Amélie jde na pláž.* ??

Úsudek je správný, pokud platí:
vždy (za každé situace), když jsou pravdivé premisy, je pravdivý i závěr,
neboli
nemůže nastat situace, kdy jsou všechny premisy pravdivé a závěr nepravdivý.

Pokud je tato podmínka splněna, říkáme, že závěr ***vyplývá*** z premis.

Formálně:
z předpokladů (premis) vyplývá závěr $\dfrac{P_1, ..., P_n}{Z}$

Stejné úsudky můžeme formulovat různými způsoby. Je zřejmé, že následující úsudky jsou vlastně dvě formulace stejné úlohy:

Je teplo.
Pokud neprší nebo je teplo, Amélie jde na pláž.
Amélie jde na pláž.

Je teplo, a pokud neprší nebo je teplo, Amélie jde na pláž.
Amélie jde na pláž.

Obecně platí, že předpoklady P_1, ..., P_n můžeme nahradit konjunkcí $P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n$. Nahrazujeme vlastně několik předpokladů jedním předpokladem.
(Platnost tohoto nahrazení bychom mohli ověřit např. tabulkovou metodou.)
tedy
z předpokladů vyplývá závěr $\dfrac{P_1, ..., P_n}{Z}$ *právě když* z předpokladu vyplývá závěr $\dfrac{P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n}{Z}$

Úlohu vyplývání závěru z několika předpokladů jsme převedli na vyplývání závěru z jednoho (složitějšího) předpokladu.

Věta o dedukci (dedukční teorém)

Podíváme-li se podrobněji na podmínky správnosti úsudku, zjistíme, že se nápadně podobají podmínkám pro pravdivost implikace:

e) úsudek je platný (závěr vyplývá z premis), pokud kdykoli jsou pravdivé jeho předpoklady, je pravdivý i jeho závěr

f) implikace je pravdivá, pokud kdykoli je pravdivý její předpoklad (antecedent), je pravdivý i její závěr (konsekvent) (dále je pravdivá pokud je nepravdivý antecedent, ale tento případ je z hlediska vyplývání nezajímavý, protože o premisách úsudku předpokládáme, že platí)

Tento vztah zachycuje Věta o dedukci (někdy se nazývá Dedukční teorém)

z předpokladu $\frac{P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n}{Z}$ vyplývá závěr	*právě když*	je implikace $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow Z$ pravdivá v každé situaci
	tedy	
	právě když	je implikace $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow Z$ ***tautologií***

Tato korespondence vyplývání a implikace není samozřejmá (jak se tvrdí v některých učebnicích) a je třeba ji dokázat. V některých neklasických logikách neplatí.

Je teplo, a pokud neprší nebo je teplo, Amélie jde na pláž.

Amélie jde na pláž.

Jestliže platí, že je teplo, a pokud neprší nebo je teplo, Amélie jde na pláž, pak Amélie jde na pláž.

III. Sylogismy

Některé úsudky považujeme intuitivně za platné, ale neumíme je vyjádřit a ověřit prostřeky výrokové logiky.

Všichni savci mají plíce.
Všechny velryby jsou savci.
Všechny velryby mají plíce.

Jak ověříme platnost tohoto úsudku?

Obecná definice vyplývání zůstává stejná: úsudek je pravdivý, pokud nemůže nastat situace, kdy jsou premisy pravdivé a závěr nepravdivý.

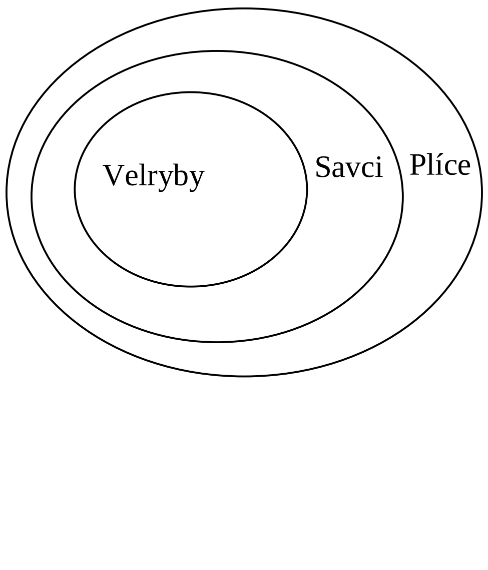
Jak to zjistíme?

Některé typy úsudků můžeme znázornit graficky a ověřit jejich platnost demonstrací.

Vlastnosti (*být velrybou*) reprezentujeme pomocí jejich **extenzí**
Extenze vlastnosti je třída všech objektů, které danou vlastnost mají.

Úsudek se týká vzájemného vztahu extenzí vlastností *být velrybou*, *být savcem*, *mít plíce*. Tyto vztahy reprezentujeme množinově.

Všechna individua, které mají vlastnost *být savcem* mají také vlastnost *mít plíce*.
Třída individuí, které mají vlastnost *být savcem*, je částí třídy individuí, které mají vlastnost *mít plíce*.
Všechna individua, které mají vlastnost *být velrybou …*
Z toho jak funguje inkluze víme, že třída *velryb* musí být částí třídy individuí, které mají vlastnost *mít plíce*.



Sylogismy
Úsudky podobné tomuto příkladu umožňuje řešit sylogistika.

Sylogistické úsudky jsou charakterizovány tím, že:

- mají 2 premisy a závěr
- tvrzení mají subjekt-predikátovou strukturu
- obsahují 3 vlastnosti (*termíny*) rozložené specifickým způsobem: vlastnost

vyšší termín P (predikát) je obsažen v první premise a závěru
nižší termín S (subjekt) je obsažen v druhé premise a závěru
střední termín M (medius) je obsažen v první a ve druhé premise (spojuje první a druhou premisu)

Všichni savci mají plíce.
Všechny velryby jsou savci.
Všechny velryby mají plíce.

Podle umístění středního termínu se rozlišují 4 figury:

M - P	P - M	M - P	P - M
S - M	S - M	M - S	M - S
S - P	S - P	S - P	S – P

Spojením termínů vznikne výrok **kladný**
(**a** obecný, **i** částečný) **a**ff**i**rmo

nebo **záporný**
(obecný, částečný), n**e**g**o**
konkrétní spojení se nazývá **modus**

Všichni savci mají plíce.	M **a** P
Všechny velryby jsou savci.	S **a** M
Všechny velryby mají plíce.	S **a** P

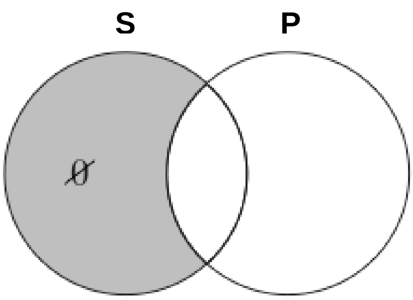
modus **a a a** první figury (B**a**rb**a**r**a**)

Kategorické výroky

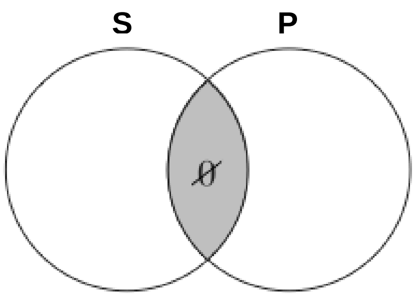
Rozlišujeme čtyři typy kategorických výroku - obecné/cástecné, kladné/záporné

	kladný (**a**ff**i**rmo)	záporný (n**e**g**o**)
obecný	**Všechna S jsou P**	**Žádné S není P**
	SaP	**SeP**
částečný	**Některá S jsou P**	**Některá S nejsou P**
	SiP	**SoP**

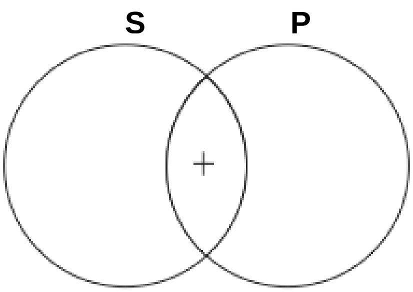
Graficky je znázorňujeme pomocí Vennových diagramů



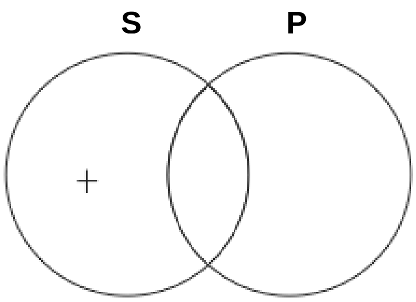
Všechna S jsou P



Žádné S není P



Některá S jsou P



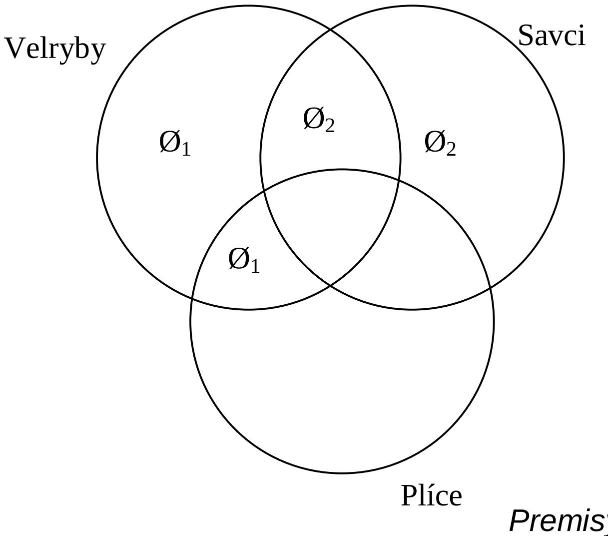
Některá S nejsou P

Příklady

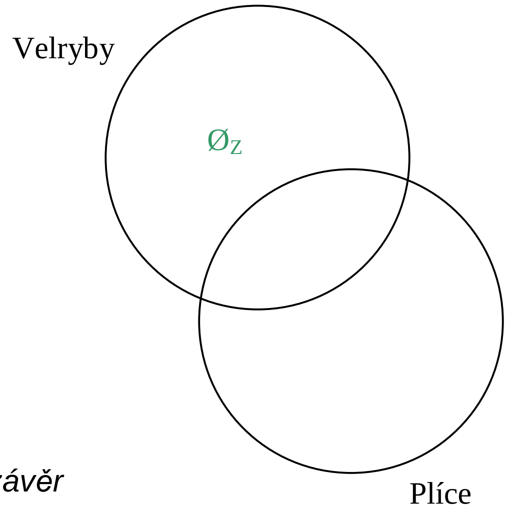
Premisy a závěr zakreslíme do Vennova diagramu pro tři množiny.
Indexy označují premisu nebo závěr odpovídající zakreslované podmínce (např. $\varnothing_1$ označuje, že daná oblast je prázdná podle 1. premisy)

P1: Všechny velryby jsou savci.	S a M
P2: Všichni savci mají plíce.	M a P
Z: Všechny velryby mají plíce.	S a P

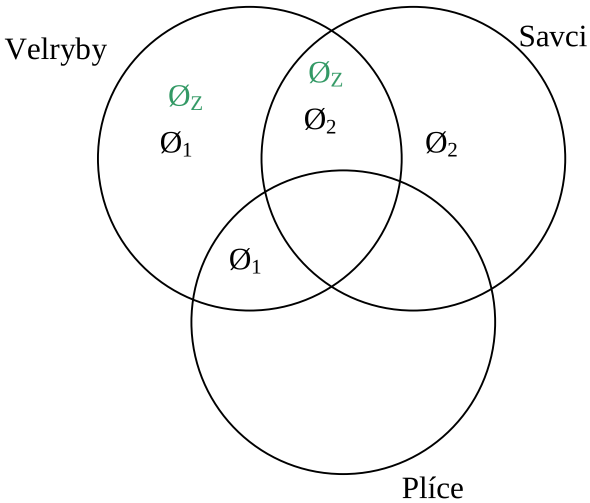
Premisy



Závěr

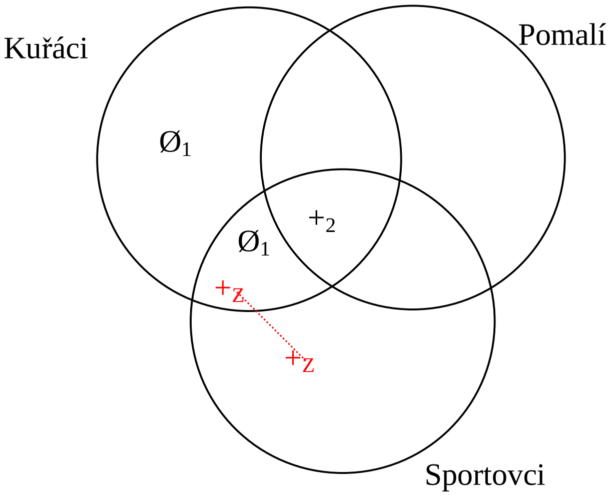


Premisy a závěr



Řešení: oblasti které označuje závěr jako prázdné musí být prázdné pokud jsou pravdivé premisy. Tedy pokud jsou premisy pravdivé musí být pravdivý i závěr, tedy úsudek platí, závěr vyplývá z premis.

P1: Všichni kuřáci jsou pomalí. M a P
<u>P2: Někteří sportovci jsou kuřáci.</u> <u>S i M</u>
Z: Někteří sportovci nejsou pomalí. S o P



Řešení: závěr tvrdé, že alespoň jedna z označených oblastí je prázdná (znázorňujeme to čárkovanou čarou mezi křížky). Podle premis je jedna z těchto oblastí prázdná a druhá může být prázdná (i když nemusí). Může se tedy stát, že jsou premisy pravdivé a závěr nepravdivý, tedy závěr nevyplývá z premis, tedy úsudek neplatí.

Axiomatická (syntaktická) metoda řešení sylogismů

Aristoteles rozlišuje mody **dokonalé** a **nedokonalé**

Dokonalé (první figura – *B**a**rb**ara***, *C**e**l**are**nt*, *D**arii***, *F**erio***)
jejich správnost je (podle Aristotela) zřejmá a tedy není třeba ji dokazovat.

Z dnešního pohledu jsou to **axiomy** sylogistického systému
axioo (αξοο) – 'uznávám za platné'

Ostatní – nedokonalé – mody lze na dokonalé převést pomocí
transformačních pravidel.

Pravidla obratu (**c***onversio*)

o1) *A* a *B* / *B* i *A* (*conversio* **p***er accident*)
Všichni šachisté jsou logici. / Někteří logici jsou šachisté.

o2) *A* i *B* / *B* i *A* (*conversio* **s***implex)*
Někteří šachisté jsou logici. / Někteří logici jsou šachisté.

o3) *A* e *B* / *B* e *A* (*conversio* **s***implex)*
Žádný sportovec není kuřák. Žádný kuřák není sportovec.

Záměna pořadí premis (**m***etathesis praemissarum*)

Převod *per impossibile*

Sylogismus je správný, pokud ho lze převést do některého dokonalého modu.

IV. Predikátová logika

Vystačí nám výroková logika a aristotelská sylogistika na všechny úsudky? Uvažme například následující:

> *Všechny kovy vodí elektrický proud.*
> *Svatováclavská koruna je ze zlata.*
> *Zlato je kov.*
> ---
> *Svatováclavská koruna vodí elektrický proud*

Úsudek je intuitivně platný, ale dosud probírané formální prostředky nám neumožňují to dokázat – musíme pracovat s *vnitřní strukturou výroků*

Potřebujeme logiku schopnou reprezentovat
- vlastnosti (*vodit elektrický proud, být ze zlata, být kovem*)
- vztahy (*být rodičem, sourozencem, hrát v jednom hokejovém týmu*)
- objekty, které těchto vlastností nabývají resp. nenabývají (*Svatováclavská koruna*)
- kvantifikátory vyjadřující obecná tvrzení (*Všechny*).

1. Predikáty. kvantifikátory

Vlastnosti (a vztahy) budeme zachycovat pomocí *predikátů.*

Vlastnosti	predikáty
vodit elektrický proud	*E*
být ze zlata	*Z*
být kovový	*K*

V roli podmětu mohou být například vlastní jména, v jazyce predikátové logiky jim odpovídají *individuové konstanty*

Jména	individuové konstanty
Svatováclavská koruna	*s*
Prsten moci	*p*
Meč Andúril	*a*

Spojením vlastního jména a přísudku dostaneme úplnou větu. Podobně spojením predikátu a individuové konstanty vznikne výrok.

Jméno	přísudek	výrok
Svatováclavská koruna	*je kovová.*	$K(s)$
Prsten moci	*je kovový.*	$K(p)$
Meč Andúril	*je kovový.*	$K(a)$

Na místo podmětu můžeme místo vlastního jména dosadit i zájmeno. V jazyce PL tomu odpovídají *kvantifikátory*.

Zájmeno	kvantifikátor
Něco	$\exists$
Všechno	$\forall$

Jakým způsobem vytvoříme výrok?

Zájmeno	přísudek	výrok (??)
Něco	*je kovové.*	$K(\exists)$
Všechno	*je zlaté.*	$Z(\forall)$

Problém: uvažme tvrzení

Něco je kovové a něco je zlaté.

Jak ho budeme formalizovat?
Máme pokaždé stejné „něco“? $K(\exists) \wedge Z(\exists)$?
Nebo pokaždé jiné? $K(\exists_1) \wedge Z(\exists_2)$?

Ještě větší problémje s tvrzením
Všechny kočky chytají nějaké myši. $K(\forall)$ $M(\exists)$ $Ch(\forall, \exists)$??

Jak zaručíme, že ve výrazech „chytají nějáké“ a „nějaké myši“ máme na mysli stejné „nějaké“?

Místo číslování kvantifikátorů zavádíme *proměnné* (blíže neurčené objekty).

S pomocí proměnných můžeme tvořit neúplné výroky – *výrokové formy.* V přirozeném jazyce jim odpovídají přísudky (neúplné věty).

Přísudky	výrokové formy
_____*vodí elektrický proud.*	$E(x)$
_____*je ze zlata.*	$Z(x)$
_____*je kovový.*	$K(y)$

Výroková forma není výrok, protože bez znalosti objektu, který v ní vystupuje, nemůžeme určit její pravdivostní hodnotu.
Doplněním výrokové formy o individuovou konstantu nebo kvantifikátor dostaneme výrok.

Zájmeno	přísudek	výrok
Něco	*je kovové*.	$\exists x\, K(x)$
Všechno	*je zlaté.*	$\forall y\, Z(y)$

Něco je kovové a něco je zlaté. $\exists x\, K(x) \wedge \exists y\, Z(y)$

2. Jazyk predikátové logiky

- logické spojky $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$
- závorky (,)

- (individuové) proměnné x, y, z, ...
- (individuové) konstanty a, b, c, ...
- predikáty P, Q, R, ...
- kvantifikátory $\forall, \exists$

Správně utvořené formule
Tvoření výrazů jazyka predikátové logiky se řídí následujícími pravidly:

1. predikát doplněný o individuové proměnné nebo individuové konstanty je formule (atomická formule)
   P(x), Q(a,b), Q(a,x), ...
2. pokud už máme správmě utvoření formule φ, ψ , pak $\neg \varphi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ jsou také formule
   $\neg$P(x), P(x) $\rightarrow$Q(a,x), ...
3. pokud φ(x) je formule s *volným výskytem* proměnné x, pak $\forall$x φ(x), $\exists$x φ(x) jsou formule

$\exists$x P(x), $\forall$x Q(a,x), $\forall$x $\exists$y (Q(a,x) $\wedge$ P(y)), ...

4. nic jiného, než výrazy utvořené podle bodů 1- 3 není správně utvořený výraz

Výrok x výroková forma

_ je útočník.	_ hraje v útoku s _	_ hraje mezi _ a _.
Jágr je útočník.	**Plekanec** hraje v útoku s **Jágrem**	**P.** hraje mezi **J.** a **Č**.
Někdo je útočník	*Každý* hraje v útoku s *někým*.	*Každý* hraje v útoku mezi *někým* a *někým*.
$U(x)$	$V(y,x)$	$W(y,x,z)$
$U(a)$	$V(b,a)$	$W(b,a,c)$
$\exists x\, U(x)$	$\forall x \exists y\, V(x, y)$	$\forall x \exists y \exists z\, W(x,y,z)$

Výrok má pravdivostní hodnotu, výroková forma ne, obsahuje „prázdná místa“ (volné proměnné), je neúplná (viz 1. řádek příkladu).

Výroková forma se stane se výrokem pokud prázdná místa zaplníme – buď volné proměnné vážeme kvantifikátory nebo místo nich dosadíme konstanty („jména konkrétních individuí“).

Sémantika

Situace ve výrokové logice –- úplný výčet pravdivost/nepravdivost jednoduchých výroků
Situace v predikátové logice – úplný výčet vlastností individuí a jejich vztahů
Pro každé individuum uvedeme, zda má/nemá danou vlastnost, je/není v daném vztahu

Situace: *Amélie plave. Brian se prochází s Francescou.*

	plave (*P*)		**prochází se** (W) *a*	*b*	*c*
Amélie	P	*a*	N	N	N
Brian	N	*b*	N	N	P
Francesca	N	*c*	N	P	N

$$P(a),\ \neg P(b),\ \neg P(c),\ W(b, c),\ W(c, b),\ \neg W(a, b)$$

Na základě tohoto výčtu můžeme určit pravdivostní hodnoty následujících tvrzení:

a)	*Všichni plavou.*	$\forall x P(x)$	N
b)	*Někdo se prochází s Francescou.*	$\exists x W(x,c)$	P
c)	*Někdo se s někým prochází.*	$\exists x \exists y\, W(x,y)$	P
d)	*Všichni se s někým prochází*	$\forall x \exists y\, W(x,y)$	N
e)	*Někdo se s nikým neprochází*	$\exists x \forall y \neg\, W(x,y)$	P

3. Vyplývání v predikátové logice

(pouze informativně)
Obecná definice vyplývání je stejná, jako u ostatních systémů – závěr vyplývá z předpokladů, pokud nemůže nastat situace, za které by byly premisy platné a závěr neplatný.
Metoda – podoně jako ve výrokové logice můžeme použít metodu sémantických stromů.

Pravidla pro výrokové spojky jsou stejná, jako u výrokové logiky.

Dále máme pravidla pro negované kvantifikátory (podmínky nepravdivosti pro kvantifikované výroky). Odpovídají vztahu kontradikce v logickém čtverci:

$$\frac{\neg(\square\ x)\ )}{(\square\ x)\ \neg)} \qquad\qquad \frac{\neg(\square\ y)\ )}{(\square\ y)\ \neg)}$$

Pravidla pro pravdivost kvantifikátorů:
Obecný kvantifikátor: pokud mají nějakou vlastnost všechny objekty, musí ji mít i každý konkrétní objekt, který se v úsudku vyskytoval. Např. pokud je pravda, že *Všichni plavou* musí být pravda i *Amélie plave, Brian plave, Franceska plave.*

Existenční kvantifikátor: pokud je pravda, že existuje objekt s nějakou vlastností nemusíme vědět, který konkrétně to je. Označíme si tedy tento objekt „pracovně“ novým jménem.

$$\frac{\square\ x\ )}{)_{x/c}} \qquad\qquad \frac{\square\ y\ )}{)_{y/d}}$$

kde *c* je 'použitá' konstanta

kde d je 'nová' konstanta

Obecný postup je stejný, jako v případě výrokové logiky – k předpokladům přidáme negaci závěru a zjišťujeme, zda je tato množina splnitlená (= alespoň jedna otevřená větev sémantického stromu). Pokud ano, závěr nevyplývá, pokud ne, závěr vyplává. V případě, že pracujeme s konečným univerzem objektů, rozhodne metoda sémantických stromů vždy o tom, zda daný závěr vyplývá z daných předpokladů. V případě nekonečného univerza (např. přirozená čísla) může nastat případ, že vznikne nekonečná větev sémantického stromu, o které nemůžeme rozhodnout, zda je uzavřená nebo otevřená a na otázku vyplývání tedy nedostaneme odpověď.

V. Neklasické logiky a teorie vyčíslitelnosti

1. Základní principy klasické logiky

Klasická logika (výroková i predikátová) vychází z určitých základních principů.

Princip dvojhodnotovosti

Každý výrok je buď pravdivý nebo nepravdivý.

Tento princip říká, že výroky mohou nabývat jen dvou pravdivostních hodnot. Existují logiky vícehodnotové, které tento princip nesplňují.

Zákon vyloučeného třetího (tertium non datur)

$A \vee \neg A$

Buď platí výrok A nebo jeho negace.Tento zákon neříká totéž co princip dvojhodnotovosti.Některé neklasické logiky splňují princip dvojhodnotovosti, ale ne zákon vyloučeného třetího (intuicionistická logika).

Zákon sporu

$\neg (A \wedge \neg A)$

Nemůže se stát, že je zároveň pravdivý nějaký výrok i jeho negace. Někdy se uvádí ve formě **ex falso quodlibet** (ze sporu plyne cokoli):

$(A \wedge \neg A) \rightarrow B$

Tedy pokud platí spor, pak z toho můžeme vyvodit pravdivost libovolného výroku *B.* Tento zákon porušují parakonzistenetní logiky a některé substrukturální logiky.

Princip kompozicionality

Pravdivostní hodnota složeného výroku je dána pravdivostními hodnotami částí

Jedná se o zvláštní případ obecného sémantického principu kompozicionality významu.

Tyto principy se považují za základní, nicméně se objevily logické systémy, které z různých důvodů jeden nebo více z těchto principů porušují. Takovéto logiky nazýváme *neklasické.*

Některé neklasické systémy probereme stejně jako důvody, proč porušují klasické zákony. Nebudeme při tom zacházet do technických detailů a omezíme se na výrokové neklasické logiky.

2. Vícehodnotové logiky

V jakých případech nám nestačí dvě pravdivostní hodnoty – pravda/nepravda? Jakou máme motivaci k zavedení další resp. dalších pravdivostních hodnot a jak bychom je měli interpretovat?

Zpochynění principu dvouhodnotovosti se objevuje už v samých začátcích logiky. Aristoteles demonstruje problematičnost tohoto principu na slavném příkladu:

Zítra bude námořní bitva.

Tento výrok se podle Aristotela stane pravdivým/nepravdivým až v čase, kdy má zmiňovaná událost nastat (zítra), ale v momentě promluvy (dnes) žádnou pravdivostní hodnotu nemá. Aristoteles v tomto předběhl svou dobu a až na výjimky začíná systematické studium logik s více hodnotami až na začátku 20. století.

Jedna motivace pro zavedení třetí hodnoty je tedy epistemická – výrok má některou ze dvou klasických hodnot, ale my ji *neznáme.*

Podobnou motivaci měl Jan Lukasiewicz – pro výroky, které nejsou (logicky) nutně pravdivé nebo nepravdivé zavedl hodnotu *je možné* resp. *je pravděpodobné.*

Další oblastí kde se uplatňuje myšlenka více pravdivostních hodnot jsou logiky pracující s vágními predikáty jako *velký, chytrý, červený*. Tyto predikáty používáme v běžném hovorovém jazyce, ale jejich význam není vymezen ostrou hranicí. Vidíme-li například člověka průměrného vzrůstu, nebudeme o něm tvrdit, že je (stoprocentně, nezpochybnitelně) malý, ani že je (stoprocentně, nezpochybnitelně) velký. Možná bychom zvolili výraz „něco mezi“ nebo „tak na půl“. Tato problematika je jednou z motivací vzniku vícehodnotového systému zvaného fuzzy logika (resp. fuzzy logiky). V rámci fuzzy logik se třetí hodnota chápe jako něco mezi pravdou a nepravdou – jako *prostřední hodnota*.

Zcela jiné pojetí třetí hodnoty pochází z oblasti rekurzivních funkcí, ale dá se obecně vztáhnout na oblast výrazů nějakého formálního jazyka. Pokud máme nějaký výraz takového jazyka, můžeme jeho hodnotu chápat jako *nedefinováno, nesmysl*. Na rozdíl od epistemického pojetí tomu není tak, že by daný výraz měl nějakou hodnotu, ale my nevěděli jakou. Hodnotou *nedefinováno* dáváme najevo, že výraz žádnou hodnotu v principu mít nemůže.

Logické operace pro neklasické hodnoty

Pokud zavedeme novou pravdivostní hodnotu, musíme určit, jakým způsobem budou s touto hodnotou pracovat logické spojky. Pokud např. máme disjunkci výroků z nichž jeden má hodnotu *Pravda* a jeden hodnotu *Neznáme,* jaká bude hodnota složeného výroku?

Podobně jako v případě klasické výrokové logiky použijeme tabulku. Pro klasické hodnoty se operace nemění, nové hodnoty musíme dodefinovat. V následujících tabulkách pro binární spojky jsou v levém sloupci hodnoty výroku *A* a v prvním řádku hodnoty výroku *B.* Hodnotu *Neznáme* označíme otazníkkem.

Konjunkce

Konjunkce je pravdivá pouze v případě, kdy jsou oba konjunkty pravdivé – potřebujeme tedy znát obě hodnoty. Pokud jednu hodnotu neznáme, je zřejmě výsledek neznámý.

Zbytek hodnot je klasický.

$A \wedge B$	P	?	N
P	P	?	N
?	?	?	?
N	N	?	N

Disjunkce

Pro pravdivost disjunkce nám stačí, vědět, že jeden z disjunktů je pravdivý. Pokud je jeden nepravdivý a jeden neznámý, výsledná hodnota je *Neznáme* – pokud by byl neznámý disjunkt pravdivý, byla by výsledná hodnota *Pravda*, pokud nepravdivý, výsledkem by byla *Nepravda*.

$A \vee B$	P	?	N
P	P	P	P
?	P	?	?
N	P	?	N

Implikace

Víme, že implikace je pravdivá, pokud je antecedent nepravdivý nebo konsekvent pravdivý, a nepravdivá, pokud je antecedent pravdivý a konsekvent nepravdivý. Podobným způsobem jako u disjunkce můžeme nahlédnout, že zbylé výsledné hodnoty jsou neznámé.

$A \rightarrow B$	P	?	N
P	P	?	N
?	P	?	?
N	P	P	P

Negace

Negace „obrací“ pravdivostní hodnoty. Pokud neznáme pravdivostní hodnotu výroku, neznáme ani pravdivostní hodnotu jeho negace.

A	$\neg A$
P	N
?	?
N	P

Toto rozšíření o klasické výrokové logiky o třetí hodnotu se v literatuře uvádí jako *silné Kleeneho schéma* (strong Kleene schema). Odpovídá i jiným interpretacím třetí pravdivostní hodnoty než *Neznáme*.

Pokud chápeme třetí hodnotu v duchu fuzzy logiky jako „něco mezi“ (budeme značit ½), máme na pravdivostních hodnotách přirozené uspořádání P < ½ < N. Můžeme adekvátně použít tabulky pro konjunkci, disjunkci a negaci Kleeneho schématu. Pokud máme Hodnota konjunkce potom bude dána hodnotou konjunktu s menší pravdivostní hodnotou, hodnota disjunkce pak hodnotou 'většího' disjunktu. (Zcela stejné kritérum bychom mohli použít pro konjunkci a disjunkci klasických hodnot přirozeně uspořádaných jako P < N.)

Tabulka pro negaci zůstává rovněž stejná („pokud je někdo napůl malý, je i napůl velký“), jediné co zbývá změnit je definice implikace:

$A \to B$	P	½	N
P	P	½	N
½	P	P	½
N	P	P	P

Z hlediska motivací fuzzy logiky není důvod zůstat u tří hodnot, je naopak zcela přirozené škálu pravdivostních hodnot rozšířit. Každá další hodnota pak vlastně umožňuje jemnější ohodnocení stupně příslušnosti k extenzi nějakého vágního predikátu. Místo o dalších pravdivostních hodnotách pak mluvíme o *stupních pravdivosti*. Největší škála, která se ve fuzzy logikách standarně uvažuje je reálný interval < 0,1 >. Operace jsou definovány analogicky trojhodnotovému případu. Pokud označíme |A| pravdivostní hodnotu výroku *A* na stupnici < 0,1 >, pak

$| A \wedge B | = \min(|A| , |B|)$

$| A \vee B | = \max(|A| , |B|)$

$| \neg A | = 1 - |A|$

$| A \to B | = 1$ pokud $|A| \leq |B|$

$= |A| - |B|$ jinak

Tato definice spojek odpovídá slabému fragmentu Lukasiewiczovy fuzzy logiky. Plná Lukasiewiczova logika obsahuje m.j. další spojky pro konjunkci a disjunkci (tzv. silná konjunkce resp. disjunkce) a její výklad přesahuje informativní rámec této přednášky.

3. **<u>Modální logiky (možnost a nutnost)</u>**

Pojem možnosti je značně široký – něco je možné logicky (neodporuje to logickým zákonům), fyzikálně (odpovídá fyzikálním zákonům), historicky (je v souladu s historickými fakty). Úkolem modální logiky je zachytit všechny tyto různorodé možnosti v jednotném logickém rámci.

Modální výroky typu *je možné, že A* budeme označovat ◊*A* a modální výroky typu *je nutné A* budeme označovat *A*

Jak určit pravdivostní hodnotu modálních výroků? Je zřejmé, že pouhá pravdivostní hodnota *A* nebude stačit. Pokud je *A* nepravda, pak je zřejmě nepravda i *A,* ◊*A.* Pokud je výrok *A* pravdivý, měly by být pravdivé i výroky *A,* ◊*A* ? Jak by se pak odlišovala pravdivost od nutné pravdivosti?

Otázku jak zachytit význam výroků obsahujících výrazy „je možné“, „je nutné“ řešil už Aristoteles. Velkého rozvoje nicméně oblast modálních logik dosáhla až ve druhé polovině minulého století v souvislosti se sémantikou využívající pojem možného světa.

Pojem možného světa je připisován Gottfriedu Wilhelmu Leibnitzovi (1646 – 1716), který o možných světech napsal:

> *Vesmír – skutečný svět – je jedním z nekonečného množství možných světů existujících v Boží mysli. Bůh stvořil tento svět tím, že učinil jeden z možných světů, ten nejlepší, skutečným.*

Možnost a nutnost úzce souvisí s pojmem alternativnosti. Moderní logika využívá pojem možného světa jako nástroj pro modelování alternativnosti, pohled na ontologický status možných světů se při tom liší. Nejradikálnějším zastáncem možných světů jako reálně existujících entit je bezpochyby David Lewis. Ve své knize Counterfactuals říká:

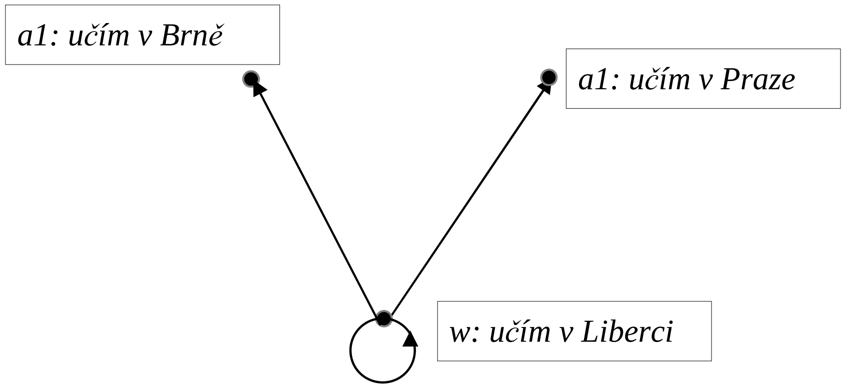
> *Věci se mohou mít jinak, než se zrovna mají. Věřím, že věci by se mohly mít jinak mnoha různými způsoby. Větu „ věci by se mohly mít jinak mnoha různými způsoby“ lze přípustně parafrázovat následovně: Existuje mnoho dalších způsobů, jak by se věci mohly mít, vedle způsobu, jak se skutečně mají. Věřím, že existuje mnoho dalších entit, které odpovídají popisu „způsob, jak by se věci mohly mít“. Dávám přednost tomu, nazývat „způsoby jak by se věci mohly mít“ možnými světy.*

Možné světy nechápeme izolovaně, ale jako strukturu. Výchozím bodem je svět, který je aktuálním světem („jak věci skutečně jsou“). S aktuálním možným světem souvisí možné světy, které jsou jeho *alternativami.*Daný svět je se svými alternativami propojen relací *dosažitelnosti.*

K určení pravdivosti modálního výroku potřebujeme nejen to, jestli je výrok *A* pravdivý v aktuálním světě, ale i jeho pravdivost/nepravdivost v možných světech, které jsou jeho alternativami. Porušujeme tak *princip kompozicionality*, neboť jedinou částí složených výroků ◊*A* , *A* je výrok *A* a ten nám nebude stačit.

Struktura možných světů se obvykle znázorňuje formou grafu – body (vrcholy grafu) představují možné světy a jejich spojnice (hrany grafu) pak relaci dosažitelnosti.

Příklad: w je aktuální svět, a1, a2 jsou jeho alternativy, navíc je w alternativou sám k sobě (kruhová šipka)

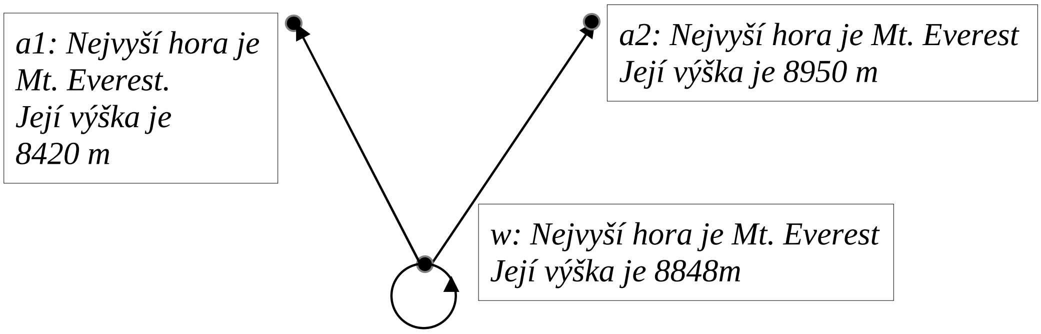


V úterý učím v Praze.	*Nepravda*
V úterý učím v Liberci.	*Pravda*
Je možné, že v úterý učím v Praze.	*Pravda*
Je nutné, že v úterý učím.	*Pravda*
Je možné, že v úterý učím v Bratislavě.	*Nepravda*

Epistemické logiky

Formální rámec modálních logik můžeme použít k modelování epistemických operátorů znalosti a přesvědčení (*Vím, že nejvyšší hora světa je Mt Everest. Jsem přesvědčen, že měří 8500 m*.) Relaci dosažitelnosti chápeme jako relaci epistemické alternativy a znalost definujeme jako platnost ve všech epistemických alternativách („epistemicky chápaná nutnost“).

Příklad: w je aktuální svět, a1, a2, w jsou jeho epistemické alternativy



Vím, že nejvyšší hora je Mt Everest.	*Pravda*
Její výška je 8848 m	*Pravda*
Vím, že její výška je 8848m.	*Nepravda*

4. Deontické logiky

Modální logiky se používají také k reprezentaci deontických operátorů – je dovoleno, je zakázáno, je přikázáno. Relace dosažitelnosti zde spojuje s ideálními deontickými alternativami (typicky tedy aktuální svět není svojí alternativou, protože není ideální).

Operátor Přikázáno odpovídá deontické nutnosti - $\boldsymbol{P}$(A) je pravda, pokud *A* je pravda ve všech deontických alternativách

Operátor dovolení odpovídá deontické možnosti – $\boldsymbol{D}(A)$ je pravda pokud je *A* pravda v některé z deontických alternativ.

Operátor zákazu odpovídá deontické nemožnosti – $\boldsymbol{Z}$(A) je pravda pokud A není pravda v žádné deontické alternativě.

Deontické operátory jsou vzájemně definovatelné

Něco je přikázáno, právě tehdy, když není dovoleno činit opak, právě tehdy, když je zakázáno činit opak.

$$\boldsymbol{P}(\mathrm{A}) \leftrightarrow \neg\, \boldsymbol{D}(\neg A) \leftrightarrow \boldsymbol{Z}(\neg A)$$

Něco je zakázáno, právě tehdy, když to není dovoleno , právě tehdy, když je přikázáno činit opak.

$$\boldsymbol{Z}(\mathrm{A}) \leftrightarrow \neg \boldsymbol{D}(A) \leftrightarrow \boldsymbol{P}(\neg A)$$

Něco je dovoleno, právě tehdy, když to není zakázáno právě tehdy, když není přikázáno činit opak,

$$\boldsymbol{D}(\mathrm{A}) \leftrightarrow \neg \boldsymbol{Z}(A) \leftrightarrow \neg\, \boldsymbol{P}(\neg A)$$

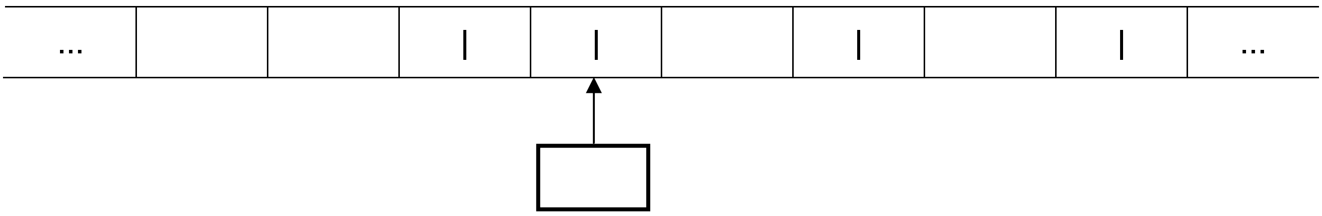
- **<u>4. Vyčíslitelnost a Turingův stroj</u>**

Logika se standardně zajímá o pravdivost (výroků, tvrzení), případně o platnost, správnost (úsudků). Teorie vyčíslitelnosti se zajímá o procedury, kterými můžeme pravdivost resp. platnost ověřit zejména o *složítost* tedy časovou náročnost těchto procedur měřenou počtem elementárních kroků, které musí tato procedura vykonat.

V teorii vyčíslitelnosti se pracuje s formalizovanými procedurami, které se nazývají *algoritmy*. Jednou ze základních formalizací pojmu algoritmus je Turingův stroj. Navržení tohoto virtuálního stroje anglickým matematikem a logikem A.M. Turingem ve 40. letech minulého století bylo vědeckým objevem nesmírného významu. Turingův stroj v sobě zahrnuje prototyp programovacího jazyka a umožnil tak vlastně vznik a rozvoj informatiky.

Turingův stroj sestává z následujících částí:

- (potenciálně nekonečné) páska rozdělená na políčka
- každé políčko je buď prázdné nebo obsazené (obsahuje symbol 0 nebo 1)
- čtecí hlavu, která umí číst (zjistit, zda je políčko prázdné nebo obsazené), zapisovat/mazat a posunout se o jedno políčko doprava/doleva
- tabulku instrukcí



Každý souvislý úsek čárek (jedniček) reprezentuje přirozené číslo. Páska slouží jako úložiště vstupních dat a zároveň jako operační paměť pro průběžné ukládání výsledků. Výpočet začíná tak, že je hlava čte nejlevější políčko vstupu.

Příklad: Úloha – přičti k vstupnímu číslu jedničku a vrať se na levé krajní políčko výsledku.

Tabulka instrukcí:

Stav	Obsah políčka	Pohyb hlavy	Zápis	Přechod do stavu
S_0	|	Vpravo		S_0
	0	Stop	|	S_1
S_1	|	Vlevo		S_1
	0	Vpravo		Konec

Obdobným způsobem bychom mohli „naprogramovat“ sčítání dvou čísel a další aritmetické operace. Přesto, že Turingův stroj disponuje pouze nejjednoduššími instrukcemi, je (v principu) schopen zvládnout jakoukoli úlohu, kterou řeší současné počítače.