Logika

9. Sémantické tablo axiomatický systém predikátové logiky

RNDr. Luděk Cienciala, Ph. D.

Tato inovace předmětu Úvod do logiky je spolufinancována Evropským sociálním fondem a Státním rozpočtem ČR, projekt č. CZ. 1.07/2.2.00/28.0216, "Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia".

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Rozhodování splnitelnosti formulí sémantickými tably

- Sémantické tablo formule *A* jazyka *L* predikátové logiky je konečný ohodnocený binární strom, jehož všechny uzly jsou označeny návěštími – sekvencemi formulí *A*, tak, že platí:
  - Listy jsou označeny sekvencemi literálů proměnných vyskytujících se ve formuli *A*.
  - Jestliže je uzel označen sekvencí formulí $X_1, X_2, \dots, \alpha, \dots, X_n$ obsahující jako člen formuli typu alfa, pak jediný uzel bezprostředně následující je označen sekvencí $X_1, X_2, \dots, \alpha_1, \alpha_2, \dots, X_n$ obsahující formule α_1, α_2.

α-pravidla:

α	α_1	α_2
$\neg\neg A$	A	
$A_1 \& A_2$	A_1	A_2
$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
$\neg(A_1 \rightarrow A_2)$	A_1	$\neg A_2$
$\neg(A_1 \leftarrow A_2)$	$\neg A_1$	A_2
$A_1 \leftrightarrow A_2$	$A_1 \rightarrow A_2$	$A_2 \rightarrow A_1$

- Jestliže je uzel označen sekvencí formulí $X_1, X_2, \ldots, \beta, \ldots, X_n$ obsahující jako člen formuli typu β, pak dvojice uzlů bezprostředně následujících je označena sekvencemi

  $X_1, X_2, \ldots, \beta_1, \ldots, X_n$ *a* $X_1, X_2, \ldots, \beta_2, \ldots, X_n$ obsahujícími po řadě formule β_1, β_2.

β - pravidla:

β	β_1	β_2
$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
$\neg(B_1 \& B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$B_1 \rightarrow B_2$	$\neg B_1$	B_2
$B_1 \leftarrow B_2$	B_1	$\neg B_2$
$\neg(B_1 \leftrightarrow B_2)$	$\neg(B_1 \rightarrow B_2)$	$\neg(B_2 \rightarrow B_1)$

- Jestliže je uzel označen sekvencí formulí $X_1, X_2, \ldots, \gamma, \ldots, X_n$ obsahující jako člen formuli typu γ pak jediný uzel bezprostředně následující je označen sekvencí $X_1, X_2, \ldots, \gamma, \gamma(a) \ldots, X_n$ obsahující původní formuli γ a její instanci $\gamma(a)$ přičemž a je konstanta vyskytující se již v jazyce.

γ - pravidla pro univerzální formule:

γ	$\gamma(a)$
$\forall x A(x)$	$\forall x A(x),\ A(a)$
$\neg\exists x A(x)$	$\neg\exists x A(x), \neg A(a)$

- Jesliže je uzel označen sekvencí formulí X_1, X_2, …, δ, …, X_n obsahující jako člen formuli typu δ, pak jediný uzel bezprostředně následující je označen sekvencí X_1, X_2, …, $\delta, \delta(a)$ …, X_n obsahující instanci $\delta(a)$ formule δ přičemž a je nová konstanta nevyskytující se dosud v jazyce.

δ - pravidla pro existenční formule:

δ	$\delta(a)$
$\exists x A(x)$	$A(a)$
$\neg \forall x A(x)$	$\neg A(a)$

- Návěštím kořene sémantického tabla je formule *A*.

Rozhodněte o splnitelnosti formule pomocí sémantického tabla

$$\neg(\forall x(p(x) \to q(x)) \to (\exists x\, p(x) \to \exists\, x\, q(x)))$$

$\neg(\forall x(p(x) \to q(x)) \to (\exists x\; p(x) \to \exists\; x\; q(x)))$

2x aplikujeme alfa pravidlo pro negaci implikace

|

$\forall x(p(x) \to q((x)),\ \neg(\exists x p(x) \to \exists x\; q(x))$

|

$\forall x(p(x) \to q(x)),\ \exists x p(x),\ \neg\exists x q(x)$

|

$\forall x(p(x) \to q(x)),\ p(a) \to q(a),\ p(a),\ \neg\exists x q(x),\ \neg q(a)$

$\forall x(p(x) \to q(x)),\ \neg\exists x q(x),\ \neg p(a),\ p(a),\ \neg q(a)$ $\quad$ $\forall x(p(x) \to q(x)),\ \neg\exists x q(x),\ q(a),\ p(a),\ \neg q(a)$

Obě větve jsou uzavřeny, z čehož lze učinit závěr, že formule je nesplnitelná.

Formální systém (logický kalkul) Hilbertova typu

- **Definice /*definice axiomatického systému Hilbertova typu*/:**
- ***Jazyk***:
  Viz definice dříve s jedinou výjimkou: množina funktorů je omezena na funktory $\neg$, $\rightarrow$, $\forall$.
- ***Axiómová schémata***:

A1:	$A \rightarrow (B \rightarrow A)$
A2:	$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
A3:	$(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$
A4:	$\forall x A(x) \rightarrow A(x/t)$
	Term *t* je substituovatelný za x v *A*
	axióm specifikace
A5:	$(\forall x[A \rightarrow B(x)]) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B(x))$,
	x není volná v *A*
	axióm kvantifikace implikace

- ***Odvozovací pravidla***:

MP:	$A, A \supset B \mid\!- B$	(pravidlo odloučení, *modus ponens*)
G:	$A \mid\!- \forall x A$	(pravidlo generalizace)

- ***Důkaz*** je konečná posloupnost kroků – dobře utvořených formulí (DUF) dle gramatiky jazyka, z nichž každá je buď axióm nebo vznikne z předchozích DUF pomocí odvozovacího pravidla. Posledním krokem je dokazovaná formule – ***teorém***.

- **Volba axiómů** není pochopitelně zcela libovolná; aby byl systém ″rozumný″, tedy korektní, podléhá dvěma kritériím:
  - Každý **axióm je *tautologie***
  - Množina axiómů musí umožňovat, aby se z nich daly odvodit všechny logicky platné formule a přitom je rozumné, aby tato množina byla minimální, tedy žádný axióm není dokazatelný z jiných axiómů – ***nezávislá množina axiómů***.

- Rovněž **volba odvozovacích pravidel** není libovolná. Aby byl systém korektní, musí pravidla ‘zachovávat pravdivost‘ v tom smyslu, že formule, kterou podle pravidla obdržíme, je pravdivá alespoň ve všech modelech předpokladů pravidla, tedy z těchto předpokladů vyplývá.

- Tedy pro každé pravidlo $A_1,\dots,A_n$ |– B by mělo platit, že $A_1, \dots, A_n$ |= B.
- Pravidlo generalizace $A(x)$ |– $\forall x A(x)$ však zjevně tento požadavek obecně nesplňuje, formule $A(x) \rightarrow \forall x A(x)$ není tautologie.
  - Přesto je Hilbertův kalkul korektní systém a formuli $A(x) \rightarrow \forall x A(x)$ v něm *nedokážeme*.

- Jak je to možné?
  - Intuitivní zdůvodnění tohoto pravidla je : Máme-li dokázat nějakou vlastnost pro všechny objekty, je možno ji dokázat na jednom *libovolně* vybraném (při důkazu však nesmíme používat žádných dalších specifických vlastností tohoto objektu).
  - Vzpomeňme si, jak jsme prováděli ve škole např. důkazy v geometrii.
    - Nakreslíme *libovolný* trojúhelník a pro tento trojúhelník provedeme nějakou konstrukci, jejíž pomocí dokážeme zkoumanou vlastnost (tohoto) trojúhelníka, a protože to byl trojúhelník libovolný, prohlásíme, že tuto vlastnost mají všechny trojúhelníky.
    - Musíme si však dát pozor, aby zvolený trojúhelník byl skutečně libovolný, tedy aby neměl nějakou další vlastnost, třeba rovnoramenný, protože takovéto specifické vlastnosti nesmíme – ani podvědomě – v důkazu využít. Jinak bychom naše tvrzení dokázali pouze pro všechny *rovnoramenné* trojúhelníky.

- **Věta /o *dedukci*/:**
  Pro *uzavřenou* formuli A a libovolnou formuli B platí:
  $|\!- A \rightarrow B$ právě tehdy, když $A \;|\!- B$.

- **Věta /*o korektnosti*/:**

  Každá dokazatelná formule predikátové logiky (tj. teorém kalkulu Hilbertova typu) je také tautologií predikátové logiky. Formálně: **Jestliže |– *A*, pak |= *A***.

- **Důkaz** /nástin/:
  - Všechny formule, které obdržíme z axiómových schémat *A1*–*A5* jsou tautologiemi, tedy jsou pravdivé v každé interpretační struktuře *I* (při libovolné valuaci e volných proměnných). Korektnost pravidla *MP* (*modus ponens*) byla demonstrována v důkazu Postovy věty.

- Korektnost pravidla generalizace $A(x) \mid\!- \; \forall x A(x)$ je zaručena definicí splňování formule $\forall x A$ ve struktuře I.
  - Předpokládejme, že jsme v důkazové posloupnosti dosud pravidlo generalizace nepoužili.
  - Tedy formule $A(x)$ musí být tautologií (neboť mohla vzniknout z axiómů – tautologií pouze použitím pravidla *MP*, které zachovává pravdivost).
  - To znamená, že v libovolné struktuře I platí, že $\models_I A(x)[e]$ – formule $A(x)$ je pravdivá v I pro libovolné ohodnocení e proměnné x.
  - Tedy platí pro *libovolné* individuum $i \in M$, kde M je universum zvolené v interpretační struktuře I, že formule A je pravdivá v I pro valuaci, která přiřazuje individuum i proměnné x, tedy $\models_I A[e(x/i)]$, kde $e(x/i)$ je valuace stejná jako e až na to, že přiřazuje proměnné x individuum i. Tedy formule $\forall x A(x)$ je pravdivá v I, $\models_I \forall x A(x)$.
  - Pravidlo generalizace je korektní v tom smyslu, že *zachovává* ***pravdivost formule v interpretaci.***

- **Věta /*o sémantické úplnosti axiomatického systému* - *K. Gödel*/:**

  Každá tautologie predikátové logiky je dokazatelná (v logickém kalkulu Hilbertova typu). Formálně, **je-li |= *A* pak |– *A***.

- ***Věta:*** Nechť A, B jsou formule predikátové logiky. Je-li $\vdash A \rightarrow B$ a proměnná x nemá žádný volný výskyt ve formuli A, pak $\vdash A \rightarrow \forall x\, B$.

Důkaz

1. $A \rightarrow B \vdash A \rightarrow B$ — předpoklad
2. $A \rightarrow B \vdash \forall x(A \rightarrow B)$ — generalizace na 1.
3. $\vdash \forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B)$ — schéma kvantifikace implikace
4. $A \rightarrow B \vdash A \rightarrow \forall x B$ — modus ponens na 2. a 3.

Gentzenovský axiomatický systém

- ***Definice (logického axiómu gentzenovského axiómatického systému*** *G1)*
  Logickým axiómem gentzenovského axiómatického systému G1 predikátové logiky je množina (sekvence) ***U*** formulí obsahující komplementární pár literálů
  $\{ \mathbf{p}(x_1, x_2, \ldots x_n), \neg\mathbf{p}(x_1, x_2, \ldots x_n), \} \rightarrow$ ***U*** některé atomické formule $\mathbf{p}(x_1, x_2, \ldots x_n)$.

- Odvozovací pravidla jsou rovněž téměř beze změn přenesena z G do základu gentzenovského formálního systému $G1$ predikátové logiky.
- Odvozovací pravidla α a β systému $G1$ jsou zde rovněž definována metajazykově, a to příslušnými schématy a tabulkami.
- Navíc jsou zde pravidla γ a δ pro formule s kvantifikátory určená metajazykovými schématy.

- **Definice (odvozovacích pravidel gentzenovského axiómatického systému** *G1)*

  Odvozovacími pravidly gentzenovského axiómatického systému *G1* jsou :

a) α - *pravidla* daná schématem

$$\frac{\boldsymbol{U} \cup \{ \alpha_1, \alpha_2 \}}{\boldsymbol{U} \cup \{\alpha\}}.$$

b) β - *pravidla* daná schématem

$$\frac{\boldsymbol{U}_1 \cup \{\beta_1\} \quad \boldsymbol{U}_2 \cup \{\beta_2\}}{\boldsymbol{U}_1 \cup \boldsymbol{U}_2 \cup \{\beta\}}$$

c) γ - *pravidla* daná schémata

$$\frac{\boldsymbol{U} \cup \{\exists x\, A(x), A(a)\}}{\boldsymbol{U} \cup \{\exists x\, A(x)\}}$$

$$\frac{\boldsymbol{U} \cup \{\neg \forall x\, A(x), \neg A(a)\}}{\boldsymbol{U} \cup \{\neg \forall x\, A(x)\}}$$

d) δ - *pravidla* daná schémata

$$\frac{\boldsymbol{U} \cup \{A(a)\}}{\boldsymbol{U} \cup \{\forall x\, A(x)\}}$$

$$\frac{\boldsymbol{U} \cup \{\neg A(a)\}}{\boldsymbol{U} \cup \{\neg \exists x\, A(x)\}}$$

kde A(x) *je* formule.

α	α_1	α_2
A	$\neg\neg A$	
$A_1 \vee A_2$	A_1	A_2
$\neg(A_1 \& A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
$A_1 \rightarrow A_2$	$\neg A_1$	A_2
$A_1 \leftarrow A_2$	A_1	$\neg A_2$
$\neg(A_1 \leftrightarrow A_2)$	$\neg(A_1 \rightarrow A_2)$	$\neg(A_1 \leftarrow A_2)$

β	β_1	β_2
$B_1 \& B_2$	B_1	B_2
$\neg(B_1 \vee B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$\neg(B_1 \rightarrow B_2)$	B_1	$\neg B_2$
$\neg(B_1 \leftarrow B_2)$	$\neg B_1$	B_2
$B_1 \leftrightarrow B_2$	$B_1 \rightarrow B_2$	$B_2 \rightarrow B_1$

a) Dokažte pomocí sémantického tabla logickou platnost formule

$(\forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x)) \rightarrow \forall x\, (p(x) \vee q(x))$

b) Proveďte gentzenovský důkaz této formule.

$$\neg(\forall x\, \mathbf{p}(x) \vee \forall x\, \mathbf{q}(x)) \rightarrow \forall x\, (\mathbf{p}(x) \vee \mathbf{q}(x))$$

$$(\forall x\, \mathbf{p}(x) \vee \forall x\, \mathbf{q}(x)),\ \neg \forall x\, (\mathbf{p}(x) \vee \mathbf{q}(x))$$

$\forall x\, \mathbf{p}(x),\ \neg \forall x\, (\mathbf{p}(x) \vee \mathbf{q}(x))$	$\forall x\, \mathbf{q}(x),\ \neg \forall x\, (\mathbf{p}(x) \vee \mathbf{q}(x))$
$\forall x\, \mathbf{p}(x),\ \exists x\, \neg(\mathbf{p}(x) \vee \mathbf{q}(x))$	$\forall x\, \mathbf{q}(x),\ \exists x\, \neg(\mathbf{p}(x) \vee \mathbf{q}(x))$
$\forall x\, \mathbf{p}(x),\ \neg(\mathbf{p}(a) \vee \mathbf{q}(a))$	$\forall x\, \mathbf{q}(x),\ \neg(\mathbf{p}(a) \vee \mathbf{q}(a))$
$\forall x\, \mathbf{p}(x),\ \neg\mathbf{p}(a),\ \neg\mathbf{q}(a)$	$\forall x\, \mathbf{q}(x),\ \neg\mathbf{p}(a),\ \neg\mathbf{q}(a)$
$\forall x\, \mathbf{p}(x),\ \mathbf{p}(a),\ \neg\mathbf{p}(a),\ \neg\mathbf{q}(a)$	$\forall x\, \mathbf{q}(x),\ \mathbf{q}(a),\ \neg\mathbf{p}(a),\ \neg\mathbf{q}(a)$

- Vytvoříme důkazový strom dané formule jako duální strom k sémantickému stromu, formule konstruovaný v obráceném pořadí jeho uzlů.
- Protože v případě duálního stromu čárky mezi podformulemi představují jejich disjunkci a větvení konjunkci, stačí při konstrukci duálního stromu zdola nahoru negovat všechny podformule obsažené v návěštích jeho uzlů.

$$\neg \forall x\, \mathbf{p}(x),\ \neg \mathbf{p}(a),\ \mathbf{p}(a),\ \mathbf{q}(a) \qquad\qquad \neg \forall x\, \mathbf{q}(x),\ \neg \mathbf{q}(a),\ \mathbf{p}(a),\ \mathbf{q}(a)$$

$$\neg \forall x\, \mathbf{p}(x),\ \mathbf{p}(a),\ \mathbf{q}(a) \qquad\qquad \neg \forall x\, \mathbf{q}(x),\ \mathbf{p}(a),\ \mathbf{q}(a)$$

$$\neg \forall x\, \mathbf{p}(x),\ (\mathbf{p}(a) \vee \mathbf{q}(a)) \qquad\qquad \neg \forall x\, \mathbf{q}(x),\ (\mathbf{p}(a) \vee \mathbf{q}(a))$$

$$\neg \forall x\, \mathbf{p}(x),\ \forall x\, (\mathbf{p}(x) \vee \mathbf{q}(x)) \qquad\qquad \neg \forall x\, \mathbf{q}(x),\ \forall x\, (\mathbf{p}(x) \vee \mathbf{q}(x))$$

$$\varnothing(\forall x\, \mathbf{p}(x) \vee \forall x\, \mathbf{q}(x)),\ \forall x\, (\mathbf{p}(x) \vee \mathbf{q}(x))$$

$$(\forall x\, \mathbf{p}(x) \vee \forall x\, \mathbf{q}(x)) \rightarrow \forall x\, (\mathbf{p}(x) \vee \mathbf{q}(x))$$

Důkaz formule :

1. $\neg\forall x\, \boldsymbol{p}(x),\ \neg\boldsymbol{p}(a), \boldsymbol{p}(a), \boldsymbol{q}(a)$	axióm
2. $\neg\forall x\, \boldsymbol{p}(x), \boldsymbol{p}(a), \boldsymbol{q}(a)$	γ - pravidlo na 1.
3. $\neg\forall x\, \boldsymbol{p}(x), (\boldsymbol{p}(a) \vee \boldsymbol{q}(a))$	α $\vee$ na 2.
4. $\neg\forall x\, \boldsymbol{p}(x),\ \forall x\, (\boldsymbol{p}(x) \vee \boldsymbol{q}(x))$	δ - pravidlo na 3.
5. $\neg\forall x\, \boldsymbol{q}(x),\ \neg\boldsymbol{q}(a), \boldsymbol{p}(a), \boldsymbol{q}(a)$	axióm
6. $\neg\forall x\, \boldsymbol{q}(x), \boldsymbol{p}(a), \boldsymbol{q}(a)$	γ - pravidlo na 5.
7. $\neg\forall x\, \boldsymbol{q}(x), (\boldsymbol{p}(a) \vee \boldsymbol{q}(a))$	α $\vee$ na 6.
8. $\neg\forall x\, \boldsymbol{q}(x),\ \forall x\, (\boldsymbol{p}(x) \vee \boldsymbol{q}(x))$	δ - pravidlo na 7.
9. $\neg(\forall x\, \boldsymbol{p}(x) \vee \forall x\, \boldsymbol{q}(x)),\ \forall x\, (\boldsymbol{p}(x) \vee \boldsymbol{q}(x))$	β $\vee$ na 4. a 8.
10. $(\forall x\, \boldsymbol{p}(x) \vee \forall x\, \boldsymbol{q}(x)) \rightarrow \forall x\, (\boldsymbol{p}(x) \vee \boldsymbol{q}(x))$	α $\rightarrow$ na 9.

- Způsob, jakým byl důkaz formule sestrojen (využitím duality) ukazuje, že gentzenovské důkazy logicky platných predikátových formulí nebývají tak obtížné, jako tomu bylo v případě hilbertovských důkazů.
- Ze způsobu řešení uvedeného příkladu lze též usoudit, že zde zavedený gentzenovský axiómatický systém predikátové logiky je sémanticky korektní a úplný, neboť platí :

- ***Věta:*** Gentzenovský důkaz formule A predikátové logiky existuje, právě když se sémantické tablo formule $\neg A$ uzavře.

- **Definice (důkazu věty teorie v systému *G1* predikátové logiky)**

  *Důkaz formule A z množiny speciálních axiómů **U*** v gentzenovském axiómatickém systému *G1* predikátové logiky je posloupnost sekvencí formulí taková, že každá sekvence je buď logickým axiómem v *G1* nebo speciálním axiómem nebo je odvozena z jednoho nebo dvou předcházejících členů posloupnosti pomocí některého z odvozovacích pravidel α, β, γ, δ systému *G1*.

  Je-li formule *A* posledním prvkem posloupnosti, nazývá se posloupnost *důkazem formule A* a samotná formule *A větou větou teorie **T(U)*** dokazatelnou z ***U*** v systému *G1*.

Dokažte ze speciálních axiómů $\boldsymbol{p}(x) \to \boldsymbol{q}(x)$, $\boldsymbol{p}(x)$ větu $\boldsymbol{q}(x)$ (pravidlo modus ponens systému *H1*).

1. $\boldsymbol{p}(x) \to \boldsymbol{q}(x) \mid\!- \boldsymbol{p}(x) \to \boldsymbol{q}(x)$	první předpoklad
2. $\boldsymbol{p}(x) \to \boldsymbol{q}(x) \mid\!- \neg\boldsymbol{p}(x), \boldsymbol{q}(x)$	přepis prvního předpokladu
3. $\boldsymbol{p}(x) \mid\!- \boldsymbol{p}(x)$	druhý předpoklad
4. $\boldsymbol{p}(x) \to \boldsymbol{q}(x), \boldsymbol{p}(x) \mid\!- \boldsymbol{p}(x)\ \&\ \neg\boldsymbol{p}(x), \boldsymbol{q}(x)$	β & na 3.
5. $\boldsymbol{p}(x) \to \boldsymbol{q}(x), \boldsymbol{p}(x) \mid\!- \boldsymbol{q}(x)$	vynechání nesplnitelné konjunkce