

Logika

8. Automatické dokazování v predikátové logice (obecná rezoluční metoda)

RNDr. Luděk Cienciala, Ph. D.

Tato inovace předmětu Úvod do logiky je spolufinancována Evropským sociálním fondem a Státním rozpočtem ČR, projekt č. CZ.1.07/2.2.00/28.0216, “Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia”.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- Důkaz logické pravdivosti, a tedy i logického vyplývání apod., zkoumáním všech možných interpretací, je v predikátové logice často obtížný.
- Jednou z efektivních metod je však rezoluční metoda, která je pro PL_1 zobecněním základní rezoluční metody výrokové logiky .

- Obecná rezoluční metoda se stala základem pro logické programování, zejména programovací jazyk PROLOG (Programming in Logic).
- Rezoluční metoda je jedna z procedur (algoritmů), které parciálně rozhodují, zda daná formule PL₁ je nesplnitelná.
 - Pro předloženou formuli A , která nesplnitelná je, tedy procedura v konečném čase tuto skutečnost zjistí a zastaví se.
 - V případě, že A je splnitelná, algoritmus nemusí nikdy skončit svou činností.

- Chceme-li tedy rozhodnout, zda daná formule A je logicky pravdivá, použijeme rezoluční metodu na formuli $\neg A$ a zjišťujeme, zda je nesplnitelná.
 - Je-li tomu tak, procedura to zjistí a vydá kladnou odpověď.
 - V opačném případě proces nemusí nikdy skončit.

- Chceme-li zjistit, zda-li B vyplývá z předpokladů $A_1, \dots, A_n$, formálně zapsáno: $\{A_1, \dots, A_n\} \models B$:
 - aplikujeme rezoluční metodu na formuli $A_1 \& \dots \& A_n \& \neg B$, neboť pokud je tato formule nesplnitelná, pak je formule $(A_1 \& \dots \& A_n) \rightarrow B$ tautologie a vztah vyplývání platí.

- ♦ Rezoluční metodu lze aplikovat pouze na formule speciálního tvaru, v tzv. **klauzulární (Skolemově) formě**.
 - ♦ Nejprve proto ukážeme, že každou formuli je možno převést do klauzulární formy tak, že výsledná formule je splnitelná, právě když výchozí formule je splnitelná.
 - ♦ Potom uvedeme Herbrandovu větu, o niž se opírají první známé rozhodovací procedury pro dokazování nesplnitelnosti v predikátové logice 1. řádu.
 - ♦ Uplatnění rezolučního pravidla výrokové logiky je totiž v PL_1 komplikováno tím, že v literálech se vyskytují termy obecně různého „tvaru”, které je nutno nějak „unifikovat” .
 - ♦ Popíšeme základní rezoluční metodu pro PL_1 , která je značně neefektivní.
 - ♦ Průlomem v těchto metodách se však stal Robinsonův objev unifikačního algoritmu, který umožnil zobecnění základní rezoluční metody na mnohem účinnější rezoluční metodu, která se pak stala základem logického programování.

- Automatické dokazování v predikátové logice zobecňuje postupy automatického dokazování výrokové logiky.
- Oproti situaci ve výrokové logice je situace v predikátové logice složitější a to z těchto důvodů:
 - Komplikovanější je procedura převedení formule na klauzulární tvar.
 - Oproti výrokové logice obsahuje navíc:
 - převod formule na prenexní tvar,
 - eliminaci kvantifikátorů z formule.
 - Složitější je tvar rezolučního odvozovacího pravidla. Jeho použití vyžaduje úpravu literálů - unifikaci.

- Formule A predikátové logiky je v ***prenexním tvaru***, má-li podobu $Q_1x_1 Q_2x_2 \dots Q_nx_n B$, kde
 - $n \geq 0$ a pro každé $i = 1, 2, \dots, n$ je Q_i buď všeobecný kvantifikátor $\forall$ nebo existenční $\exists$,
 - $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou navzájem různé individuové proměnné,
 - B je formule utvořená z elementárních formulí pouze užitím výrokových funktorů $\neg, \&, \vee$.
- Výraz $Q_1x_1 Q_2x_2 \dots Q_nx_n$ se nazývá ***prefix (charakteristika)*** a B ***otevřeným jádrem (maticí)*** formule A v prenexním tvaru.

- **Věta:** Každou formuli lze přepsat do prenexního tvaru, tj. ke každé formuli predikátové logiky A existuje formule A^* v prenexním tvaru, která je s formulí A ekvivalentní (tj. $A \Leftrightarrow A^*$).

Algoritmus /převod formule do prenexního tvaru/:

(1) Eliminace funktorů $\rightarrow$ a $\leftrightarrow$. Toho lze dosáhnout užitím následujících ekvivalencí (náhrady jejich levé strany pravou stranou):

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B,$$

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A) \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \& (\neg B \vee A).$$

(2) Převedení formule na tvar s čistými proměnnými.

- ♦ Použijeme následující ekvivalence (náhrady levé strany pravou):
 $(\forall xA \& \forall xB) \Leftrightarrow \forall x (A \& B)$ $(\exists xA \vee \exists xB) \Leftrightarrow \exists x (A \vee B)$
- ♦ Přejmenování vázaných proměnných tak, aby žádná proměnná nebyla ve formuli současně volná i vázaná a tak, aby všechny vázané proměnné byly navzájem různé. To platí nejenom pro celou formuli, ale i pro každou její podformuli.

(3) Vypuštění nadbytečných kvantifikátorů, tj. Kvantifikátorů jejichž oblast působnosti neobsahuje žádný výskyt kvantifikované proměnné.

(4) Přenesení všech výskytů funktoru negace bezprostředně před elementární formule. Toho lze dosáhnout opakovaným užitím následujících ekvivalencí (náhrady jejich levé strany pravou stranou):

$$\neg \neg A \Leftrightarrow A,$$

$$\neg(A \ \& \ B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B,$$

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \ \& \ \neg B,$$

$$\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x),$$

$$\neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x).$$

(5) Přenesení všech kvantifikátorů na začátek formule. Toho lze dosáhnout opakovaným užitím následujících ekvivalencí (náhrady jejich levé strany pravou stranou):

$$\forall x A \ \& \ B \Leftrightarrow \forall x (A \ \& \ B) \qquad \exists x A \vee B \Leftrightarrow \exists x (A \vee B)$$

B neobsahuje volnou x

$$A \ \& \ \forall x B \Leftrightarrow \forall x (A \ \& \ B) \qquad A \vee \exists x B \Leftrightarrow \exists x (A \vee B)$$

A neobsahuje volnou x

$$\exists x A \ \& \ B \Leftrightarrow \exists x (A \ \& \ B) \qquad \forall x A \vee B \Leftrightarrow \forall x (A \vee B)$$

B neobsahuje volnou x

$$A \ \& \ \exists x B \Leftrightarrow \exists x (A \ \& \ B) \qquad A \vee \forall x B \Leftrightarrow \forall x (A \vee B)$$

A neobsahuje volnou x

Příklad: Určete prenexní formu formule :

$$\forall x [p(x) \& \forall y \exists x (\neg q(x,y) \rightarrow \forall z r(a,x,y))]$$

$$\forall x [p(x) \& \forall y \exists x (q(x,y) \vee \forall z r(a,x,y))] \text{ eliminace } \rightarrow$$

$$\forall x [p(x) \& \forall y \exists t (q(t,y) \vee \forall z r(a,t,y))] \text{ přejmenování proměnné}$$

$$\forall x [p(x) \& \forall y \exists t (q(t,y) \vee r(a,t,y))] \text{ vypuštění nadbytečného}$$

kvantifikátoru

$$\forall x \forall y [p(x) \& \exists t (q(t,y) \vee r(a,t,y))] \text{ přesun kvantifikátoru doleva}$$

$$\forall x \forall y \exists t [p(x) \& (q(t,y) \vee r(a,t,y))] \text{ přesun kvantifikátoru doleva}$$

Poznámky:

- Prenexní tvar formule není určen jednoznačně.
- Konečná podoba prenexní formule závisí na pořadí provádění úprav a na způsobu přejmenování vázaných proměnných.
- Všechny prenexní tvary jsou však ekvivalentní.

- **Definice: Skolemova forma** uzavřené formule je prenexní tvar této formule, která neobsahuje žádné existenční kvantifikátory. Skolemova forma vznikne z prenexní formy opakovaným použitím následujících dvou operací (*skolemizací*):
 - $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \exists y A(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \rightarrow \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n A(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n))$, kde f je nový (v jazyce dosud nepoužitý) n -ární funkční symbol, tzv. **Skolemova funkce**,
 $\exists x \forall y_1 \forall y_2 \dots \forall y_n A(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \rightarrow \forall y_1 \forall y_2 \dots \forall y_n A(c, y_1, y_2, \dots, y_n)$, kde c je nová (v jazyce dosud nepoužitá) individuová konstanta, tzv. **Skolemova konstanta**,
- Každému eliminovanému existenčnímu kvantifikátoru odpovídá jiná Skolemova funkce nebo konstanta.
- Skolemovu formu formule A označíme zápisem A^S .

- **Literál** je atomická formule nebo negace atomické formule (např. $p(f(x))$, $\neg q(y)$).
- **Klausule** je disjunkce literálů (např. $[p(f(x)) \vee \neg q(y)]$).
- **Konjunktivní normální tvar** formule predikátové logiky je prenexní tvar formule, jejíž matice je konjunkce disjunkcí literálů (tj. konjunkce klausulí).
- **Disjunktivní normální tvar** formule predikátové logiky je prenexní tvar formule, jejíž matice je disjunkce konjunkcí literálů.
- **Klauzulární forma** formule je Skolemova forma, jejíž matice je v klauzulárním tvaru, tj. je konjunkcí klausulí.

- ♦ Skolemovy konstanty a funkce představují předměty (reprezentanty předmětů), o jejichž existenci vypovídají původní formule.
 - ♦ Například:
 - ♦ $\exists x \forall y A(x, y) \rightarrow \forall y A(c, y)$
 - ♦ Je-li univerzem množina všech nezáporných celých čísel a realizací (interpretací) predikátu A je relace $<$ (tedy $A(x, y)$ „chápeme jako“ $x < y$), pak c interpretujeme jako 0 . V tomto modelu je konstanta c jediná, ale v jiných modelech tomu tak být nemusí.
 - ♦ $\forall x \exists y A(x, y) \rightarrow \forall x A(x, f(x))$
 - ♦ Je-li univerzem množina reálných čísel a oborem pravdivosti predikátu A je relace $<$, pak interpretací funkčního symbolu f může být např. funkce f' , která je zadána předpisem: $f'(x) = x + \sqrt{3}$.

- Po provedené skolemizaci zůstávají v prefixu formule pouze obecné kvantifikátory.
- Důležitá pro nás je *klausulární forma* formule:
 $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n [C_1 \& C_2 \& \dots C_k]$, kde C_i jsou klausule (disjunkce literálů).
 - Vzhledem k tomu, že uvažujeme pouze uzavřené formule, není nutné tyto kvantifikátory explicitně uvádět.

- Skolemova forma A^S uzavřené formule A není ekvivalentní s formulí A , ale platí:
 $\models A^S \rightarrow A$, neboli $A^S \models A$.

- **Věta (Skolem):** Každá formule A může být převedena na formuli A^S v *klauzulární* (Skolemově) *formě* takovou, že A je splnitelná, právě když A^S je splnitelná.

- ♦ **Důkaz:** Uvedeme algoritmus převodu $A \rightarrow A^S$.
- 1. *Utvoření existenčního uzávěru formule A.* (Zachovává splnitelnost.)
- 2. *Eliminace nadbytečných kvantifikátorů.* (Ekvivalentní krok.)
Z formule A vypustíme všechny kvantifikátory $\forall x_i, \exists x_i$,
v jejichž rozsahu se nevyskytuje proměnná x_i .
- 3. *Přejmenování proměnných.* (Ekvivalentní krok.)
Přejmenujeme všechny proměnné, které jsou v A
kvantifikovány více než jednou tak, aby všechny
kvantifikátory měly navzájem různé proměnné.
- 4. *Eliminace spojek $\rightarrow, \leftrightarrow$ podle těchto vztahů* (Ekvivalentní krok.):
$$(A \rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B), (A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \& (\neg B \vee A)$$

5. *Přesun spojek $\neg$ dovnitř.* (Ekvivalentní krok.)
6. *Přesun kvantifikátorů doprava.* (Ekvivalentní krok.)
Provádíme náhrady podle těchto ekvivalencí (Q je kvantifikátor $\forall$ nebo $\exists$; $\odot$ je symbol $\&$ nebo $\vee$; A, B neobsahují volnou proměnnou x):
$$Qx (A \odot B(x)) \Leftrightarrow A \odot Qx B(x), Qx (A(x) \odot B) \Leftrightarrow Qx A(x) \odot B$$
7. *Eliminace existenčních kvantifikátorů* (Zachovává splnitelnost.)
Provádíme postupně Skolemizaci.
8. *Přesun všeobecných kvantifikátorů doleva.* (Ekvivalentní krok, neboť jsme již provedli krok 3. a platí ekvivalence dle 6.)
9. *Použití distributivních zákonů.* (Ekvivalentní krok.)
Provedeme postupné náhrady podformulí vlevo formulemi vpravo:
$$(A \& B) \vee C \Leftrightarrow (A \vee C) \& (B \vee C), A \vee (B \& C) \Leftrightarrow (A \vee B) \& (A \vee C)$$

- **Poznámky:**

- Z praktických důvodů se snažíme minimalizovat počet argumentů zaváděných Skolemových funkcí.
 - Krok 6 slouží tomuto účelu.
- Výslednou formuli můžeme ještě zjednodušit použitím úprav, které zachovávají splnitelnost.

- Uvažujme formuli $A = \forall x \exists y \forall z \exists v [p(z,y) \wedge q(x,v)]$.
Pokud bychom aplikovali Skolemizaci bez kroku 6, dostali bychom formuli:
 $A^{S'} = \forall x \forall z [p(z, f(x)) \wedge q(x, h(x,z))]$, kde f, h jsou zavedené Skolemovy funkce. Použijeme-li však nejprve krok 6, dostaneme
 $A' = \exists y \forall z p(z,y) \wedge \forall x \exists v q(x,v)$ a z ní eliminací existenčních kvantifikátorů
 $A'' = \forall z p(z, a) \wedge \forall x q(x, h(x))$. Odtud pak přesunem kvantifikátorů doleva:
 $A^S = \forall z \forall x [p(z, a) \wedge q(x, h(x))]$, v níž zavedené Skolemovy funkce a, h jsou jednodušší.

Nalezněte Skolemovu formu uzavřené prenexní formy $\exists u \forall v \exists w \forall x \forall y \exists z A(u, v, w, x, y, z)$

1. $\exists u \forall v \exists w \forall x \forall y \exists z A(u, v, w, x, y, z)$ výchozí forma
2. $\forall v \exists w \forall x \forall y \exists z A(a, v, w, x, y, z)$ po eliminaci $\exists u$
3. $\forall v \forall x \forall y \exists z A(a, v, f(v), x, y, z)$ po eliminaci $\exists w$
4. $\forall v \forall x \forall y A(a, v, f(v), x, y, g(v, x, y))$ po eliminaci $\exists z$
5. $A(a, v, f(v), x, y, g(v, x, y))$ bez explicitní obecné kvantifikace

Převeďme formuli A na formuli v klausulární (Skolemově) formě A^S :

$$A = \forall x \{p(x) \rightarrow \exists z [\neg \forall y [q(x,y) \rightarrow p(f(x_1))] \& \forall y [q(x,y) \rightarrow p(x)]]\}.$$

1.,2. Utvoření existenčního uzávěru a eliminace $\exists z$:

$$A_2 = \exists x_1 \forall x \{p(x) \rightarrow \{\neg \forall y [q(x,y) \rightarrow p(f(x_1))] \& \forall y [q(x,y) \rightarrow p(x)]\}\}.$$

3. Přejmenování proměnné y :

$$A_3 = \exists x_1 \forall x \{p(x) \rightarrow \{\neg \forall y [q(x,y) \rightarrow p(f(x_1))] \& \forall z [q(x,z) \rightarrow p(x)]\}\}.$$

4. Eliminace $\rightarrow$:

$$A_4 = \exists x_1 \forall x \{\neg p(x) \vee \{\neg \forall y [\neg q(x,y) \vee p(f(x_1))] \& \forall z [\neg q(x,z) \vee p(x)]\}\}.$$

5. Přesun negace dovnitř:

$$A_5 = \exists x_1 \forall x \{\neg p(x) \vee \{\exists y [q(x,y) \& \neg p(f(x_1))] \& \forall z [\neg q(x,z) \vee p(x)]\}\}.$$

6. Přesun kvantifikátorů $\exists y$ a $\forall z$ doprava:

$$A_6 = \exists x_1 \forall x \{ \neg p(x) \vee \{ [\exists y q(x, y) \& \neg p(f(x_1))] \& [\forall z \neg q(x, z) \vee p(x)] \} \}.$$

7. Eliminace existenčních kvantifikátorů:

$$A_7 = \forall x \{ \neg p(x) \vee \{ [q(x, h(x)) \& \neg p(f(a))] \& [\forall z \neg q(x, z) \vee p(x)] \} \}.$$

8. Přesun $\forall z$ doleva:

$$A_7 = \forall x \forall z \{ \neg p(x) \vee \{ [q(x, h(x)) \& \neg p(f(a))] \& [\neg q(x, z) \vee p(x)] \} \}.$$

9. Použití distributivního zákona:

$$A_8 = \forall x \forall z \{ [\neg p(x) \vee q(x, h(x))] \& [\neg p(x) \vee \neg p(f(a))] \& [\neg p(x) \vee \neg q(x, z) \vee p(x)] \}.$$

10. Provedeme zjednodušení:

i) Vypustíme třetí klausuli (je to tautologie)

ii) Odstraníme kvantifikátor $\forall z$ (stal se zbytečným)

iii) Ve druhé klausuli odstraníme $\neg p(x)$, neovlivníme tím

splnitelnost

$$A^S = \forall x \{ [\neg p(x) \vee q(x, h(x))] \& \neg p(f(a)) \}.$$

- ♦ **Herbrandova procedura.**

Chceme-li dokázat logickou pravdivost formule A v PL_1 , pak budeme postupovat obdobně jako ve VL:

- ♦ Formuli A znegujeme
- ♦ Formuli $\neg A$ převedeme do klausulární formy $(\neg A)^S$
- ♦ Na formuli $(\neg A)^S$ budeme postupně uplatňovat rezoluční pravidlo. Pokud získáme prázdnou klausuli, je důkaz úspěšně ukončen.
 - ♦ Tento třetí bod však v PL_1 nelze provést tak jednoduše jako ve výrokové logice. Problémem je to, že literály s opačným znaménkem, které bychom mohli při uplatňování rezoluce „vyškrtnout“, mohou obsahovat různé termy.

Příklad :

Uvažujme formuli A v klausulární formě:

$$\forall x \forall y \forall z \forall v [p(x, f(x)) \& q(y, h(y)) \& (\neg p(a, z) \vee \neg q(z, v))].$$

Dokážeme, že tato formule je nespílnitelná.

Vypišme jednotlivé klausule pod sebe a pokusme se uplatňovat pravidlo rezoluce:

1. $p(x, f(x))$
2. $q(y, h(y))$
3. $\neg p(a, z) \vee \neg q(z, v)$

Klausule 1. a 3. obsahují literály s opačným znaménkem, avšak uplatnění rezoluce brání to, že $p(x, f(x)) \neq p(a, z)$.

Je-li term t substituovatelný za x ve formuli $A(x)$, pak $\forall x A(x) \models A(x/t)$, „co platí pro všechny, platí i pro t “, můžeme se pokusit najít vhodnou substituci termů za proměnné tak, abychom dostali shodné „unifikované“ literály.

V našem příkladě taková substituce existuje:

$x / a, z / f(a)$.

Po provedení této substituce dostaneme klausule:

1'. $p(a, f(a))$

2. $q(y, h(y))$

3'. $\neg p(a, f(a)) \vee \neg q(f(a), v)$

kde na 1' a 3' již lze uplatnit pravidlo rezoluce:

4. $\neg q(f(a), v)$

Abychom nyní mohli rezolvovat klausule 2. a 4., zvolíme opět substituci:

$y / f(a), v / h(f(a))$.

Dostaneme

2'. $q(f(a), h(f(a)))$

4'. $\neg q(f(a), h(f(a)))$

a jejich rezolucí již obdržíme prázdnou klausuli.

Tedy formule A je nesplnitelná.

- Problémem ovšem je to, že příslušné substituce jsme hledali "zkusmo", intuitivně.
- Aby mohl být celý proces automatizován (a mohl tak sloužit jako základ pro logické programování), musíme najít nějaký *algoritmus*, jak provádět příslušné *unifikace*.

- Uvedeme zde dva:
 - *Herbrandova procedura*
 - *Robinsonův unifikační algoritmus*
- Podle definice je daná formule A nesplnitelná, právě když nabývá hodnoty *nepravda* ve všech interpretacích nad všemi možnými obory interpretace.
- Důkaz toho, že A je nesplnitelná, by samozřejmě usnadnilo, kdybychom našli jistý pevný obor interpretace D takový, že A je nesplnitelná, právě když nabývá hodnoty *nepravda* ve všech interpretacích nad tímto pevným oborem D . Takový obor ke každé formuli A existuje a nazývá se *Herbrandovo universum* H_A .

Herbrandovo universum H_A

- Je tvořeno množinou všech termů, které mohou být sestaveny z individuových konstant a_i a funkčních konstant f_i , které se vyskytují v A . (Pokud v A není žádná individuová konstanta, použijeme libovolnou, např. a .)
 - V dalším výkladu budeme vyznačovat prvky Herbrandova universa kurzívou a tučně, abychom je odlišili od funkčních symbolů formule.

- **Příklad:**

- Pro formuli $A = \forall x [p(a) \vee q(b) \rightarrow p(f(x))]$ je $H_A = \{a, b, f(a), f(b), f(f(a)), f(f(b)), \dots\}$
- Pro formuli $B = \forall x \forall y p(f(x), y, q(x, y))$ je $H_A = \{a, f(a), q(a, a), f(f(a)), q(a, f(a)), q(f(a), a), \dots\}$

- **Definice:** Bud' A formule v klausulární formě: $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n [C_1 \& \dots \& C_k]$. *Základní instancí* klausule C_i ($1 \leq i \leq k$) rozumíme klausuli, která vznikne z C_i tím, že všechny individuové proměnné v C_i nahradíme nějakými prvky z H_A .

- **Věta (Herbrand):** Formule A v klausulární formě je nesplnitelná, právě když existuje konečná konjunkce základních instancí jejích klausulí, která je nesplnitelná.

- Herbrandova procedura parciálně rozhoduje, zda je daná formule A nesplnitelná.
- K dané formuli postupně generujeme základní instance jejích klausulí a resoluční metodou vždy testujeme, zda je jejich konjunkce nesplnitelná.
- Jestliže tomu tak je, pak A je nesplnitelná a tato procedura to po konečném počtu kroků zjistí.
- V případě splnitelnosti A může procedura generovat donekonečna nové a nové základní instance a testovat jejich konjunkce.

- Podstatným problémem této metody je skutečnost, že generování základních klausulí je neefektivní.
 - Počet základních instancí, které musí být generovány, dokud nenarazíme na "protipříklad" – nesplnitelnou konjunkci, může být často tak velký, že nám přeplní paměť počítače, nehledě na časovou složitost takového algoritmu. **J.A. Robinson** navrhl v r. 1965 metodu, která na rozdíl od Herbrandovy procedury nevyžaduje generování základních instancí, ale rozhodne přímo, zda k *libovolné* konjunkci klausulí existuje substituce taková, která unifikuje některé literály a umožní dokázat nesplnitelnost (pokud tato konjunktce nesplnitelná je).

- ♦ **Definice:** Nechť A je formule obsahující individuové proměnné x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, a to buď přímo (jako bezprostřední argumenty) nebo zprostředkovaně (jako argumenty funkcí). Označme $\sigma = \{x_1/t_1, x_2/t_2, \dots, x_n/t_n\}$ **simultánní substituci** termů t_i za (všechny výskyty) předmětové proměnné x_i pro $i = 1, 2, \dots, n$. Potom zápisem $A\sigma$ označíme formuli, která vznikne z formule A provedením *substituce* σ .
 - Poznamenejme, že substituce se může týkat všech, nebo jen některých, nebo dokonce žádné individuové proměnné obsažené v A (v tomto případě pro některá nebo všechna i substituujeme x_i/x_i).
- ♦ Formule B je **instancí** formule A , jestliže existuje substituce σ taková, že $B = A\sigma$.

- **Definice: *Unifikace*** (unifikační substituce, unifikátor) formulí A, B je substituce σ taková, že

$$A\sigma = B\sigma.$$

Nejobecnější unifikace formulí A, B je unifikace σ taková, že pro každou jinou unifikaci ρ formulí A, B platí $\rho = \sigma\tau$, kde $\tau \neq \varepsilon$, tj. každá unifikace vznikne z nejobecnější unifikace provedením další dodatečné substituce.

♦ **Věta (Robinson: zobecněné rezoluční odvozovací pravidlo):**

Nechť A_i, B_i, L_i jsou atomické formule predikátové logiky.
Potom platí následující odvozovací pravidlo:

$$A_1 \vee \dots \vee A_m \vee L_1, B_1 \vee \dots \vee B_n \vee \neg L_2 \mid - A_1\sigma \vee \dots \vee A_m\sigma \vee B_1\sigma \vee \dots \vee B_n\sigma,$$

kde σ je unifikace formulí L_1, L_2 , tj. $L_1\sigma = L_2\sigma$.

Klauzule na levé straně odvozovacího pravidla nazýváme **rodičovskými klauzulemi** a klauzuli na pravé straně **rezolventou**.

Formule A^S v klausulární formě je nespílitelná, právě když z ní lze opakovaným použitím obecného pravidla rezoluce odvodit prázdnou klausuli

- Speciální případy rezolučního odvozovacího pravidla (předpokládáme $L_1\sigma = L_2\sigma$):
 - $m = 0, n = 0: L_1, \neg L_2 \mid -$ odvození sporu
 - $m = 0, n = 1: L_1, \neg L_2 \vee B \mid - B\sigma$ pravidlo MP
 - $m = 1, n = 1: L_1 \vee A, \neg L_2 \vee B \mid - A\sigma \vee B\sigma$ základní tvar rez. pravidla
- Unifikace σ formulí L_1, L_2 může být jakákoliv; chceme-li však vyvodit z předpokladů (rodičovských klauzulí) nejobecnější závěr (rezolventu) je třeba použít nejobecnější unifikaci.

Příklady:

- ♦ **Dokážeme správnost úsudku** (analytickou pravdivost věty):
Jistý filosof odporuje všem filosofům, tedy odporuje sám sobě.

Větu analyzujeme jako

(„zamýšlená” interpretace je nad množinou individuí, $p \rightarrow$ podmnožina filosofů, $q \rightarrow$ relace, ve které budou ty dvojice, kde první odporuje druhému)

$\exists x \{[p(x) \ \& \ \forall y (p(y) \rightarrow q(x,y))] \rightarrow q(x,x)\}$

Formuli znegujeme a převedeme na klausulární tvar:

$\forall x \ \forall y \{p(x) \ \& \ [\neg p(y) \vee q(x,y)] \ \& \ \neg q(x,x)\}.$

K jednotlivým klausulím

1. $p(x)$

2. $\neg p(y) \vee q(x,y)$

3. $\neg q(x,x)$

je nejobecnějším unifikátorem substituce $\{y/x\}$:

4. $q(x,x)$ z 1. a 2.

5. z 3. a 4.

♦ **Dokažme správnost úsudku:**

Kdo zná Pavla a Marii, ten Marii lituje.
Někteří nelitují Marii, ačkoli ji znají.

Někdo zná Marii, ale ne Pavla.

$\forall x [\neg Z(x, P) \vee \neg Z(x, M) \vee L(x, M)]$

$\neg L(a, M) \& Z(a, M)$

$\forall y [\neg Z(y, M) \vee Z(y, P)]$

Klausule:

1. $\neg Z(x, P) \vee \neg Z(x, M) \vee L(x, M)$

2. $\neg L(a, M)$

3. $Z(a, M)$

4. $\neg Z(y, M) \vee Z(y, P)$

5. $\neg Z(a, P) \vee \neg Z(a, M)$

6. $\neg Z(a, P)$

7. $\neg Z(a, M)$

8.

$\forall x ([Z(x, P) \& Z(x, M)] \rightarrow L(x, M))$

$\exists x [\neg L(x, M) \& Z(x, M)]$

$\exists x [Z(x, M) \& \neg Z(x, P)]$

odstranění implikace (1. předpoklad)

Skolemizace (2. předpoklad)

negovaný závěr (přejmenování x)

rezoluce 1., 2., substituce x/a

rezoluce 3., 5.

rezoluce 4., 6., substituce y/a

rezoluce 3., 7.

Dokažme správnost úsudku:

Všichni členové vedení jsou majiteli obligací nebo akcionáři.

Žádný člen vedení není zároveň majitel obligací i akcionář.

Všichni majitelé obligací jsou členy vedení.

Žádný majitel obligací není akcionář.

$$\forall x [v(x) \rightarrow (o(x) \vee a(x))]$$

$$\forall x [v(x) \rightarrow \neg(o(x) \& a(x))]$$

$$\forall x [o(x) \rightarrow v(x)]$$

$$\forall x [o(x) \rightarrow \neg a(x)]$$

Klausule:

1. $\neg v(x) \vee o(x) \vee a(x)$
2. $\neg v(x) \vee \neg o(x) \vee \neg a(x)$
3. $\neg o(x) \vee v(x)$
4. $o(k)$
5. $a(k)$
6. $\neg o(x) \vee \neg a(x)$
7. $\neg a(k)$
- 8.

1. předpoklad
 2. předpoklad
 3. předpoklad
- negovaný závěr
(po Skolemizaci)
- rezoluce 2., 3.
- rezoluce 4., 6., substituce
 x/k
- rezoluce 5., 7.

Dokažme správnost úsudku:

Každý, kdo má rád Jiřího, bude spolupracovat s Milanem.

Milan nekamarádí s nikým, kdo kamarádí s Lád'ou.

Petr bude spolupracovat pouze s kamarády Karla.

Jestliže Karel kamarádí s Lád'ou, pak Petr nemá rád Jiřího.

$$\forall x [R(x, J) \rightarrow S(x, M)]$$

$$\forall x [K(x, L) \rightarrow \neg K(M, x)]$$

$$\forall x [S(P, x) \rightarrow K(x, Kr)]$$

$$K(Kr, L) \rightarrow \neg R(P, J)$$

Klausule:

1. $\neg R(x, J) \vee S(x, M)$
2. $\neg K(y, L) \vee \neg K(M, y)$
3. $\neg S(P, z) \vee K(z, Kr)$
4. $K(Kr, L)$
5. $R(P, J)$
6. $\neg K(M, Kr)$
7. $\neg S(P, M)$
8. $\neg R(P, J)$
- 9.

1. předpoklad

2. předpoklad

3. předpoklad

negovaný

závěr

rezoluce 4., 2., substituce y/Kr

rezoluce 3., 6., substituce z/M

rezoluce 1., 7., substituce x/P

rezoluce 5., 8.

Dokažme správnost úsudku:

Každý muž má rád fotbal a pivo.

Xaver má rád pouze milovníky fotbalu a piva.

Někteří milovníci fotbalu nemají rádi pivo.

Některé ženy nemá Xaver rád.

$\forall x [M(x) \rightarrow (R(x,f) \wedge R(x,p))]$

$\forall x [R(Xa,x) \rightarrow (R(x,f) \wedge R(x,p))]$

$\exists x [R(x,f) \wedge \neg R(x,p)]$

$\forall x [M(x) \vee R(Xa,x)]$

1. předpoklad

2. předpoklad

3. předpoklad

negovaný závěr: $\exists x [\neg M(x) \wedge \neg R(Xa,x)]$,

(žena = není muž)

Klausule:

1. $\neg M(x) \vee (R(x,f)$

2. $\neg M(x) \vee (R(x,p)$

3. $\neg R(Xa,y) \vee (R(y,f)$

4. $\neg R(Xa,y) \vee (R(y,p)$

5. $R(k,f)$

6. $\neg R(k,p)$

7. $M(z) \vee R(Xa,z)$

8. $\neg R(Xa,k)$

9. $M(k)$

10. $R(k,p)$

11.

rezoluce 4., 6. (y/k)

rezoluce 7., 8. (z/k)

rezoluce 2., 9. (x/k)

rezoluce 6., 10.