

# Logika

## 7. Predikátová logika 1. řádu

RNDr. Luděk Cienciala, Ph. D.

Tato inovace předmětu Úvod do logiky je spolufinancována Evropským sociálním fondem a Státním rozpočtem ČR, projekt č. CZ.1.07/2.2.00/28.0216, “Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia”.



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- ♦ Pouze jen malá část úsudků může být formalizována a dokázána v rámci výrokové logiky.

Pokusme se např. ověřit typ (zjevně správného) úsudku charakterizovaný následujícím příkladem:

Každý člověk je omylný.

Jan je člověk.

-----

Jan je omylný.

- Označíme-li uvedené tři věty symboly  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , pak pokus o formalizaci v rámci výrokové logiky je dán následujícím úsudkem:  $p, q / r$ , což odpovídá formuli:

$$(p \ \& \ q) \rightarrow r.$$

- Tato formalizace je však zřejmě nedostačující, a to z těchto důvodů:
  - Uvedené tři výroky jsou z hlediska VL elementární a navzájem nezávislé, avšak ve skutečnosti mají vnitřní komponenty, jsou strukturované, a existuje mezi nimi prostřednictvím těchto komponent vazba. Termín "člověk" se vyskytuje ve výrocích  $p$  i  $q$ , termín "omylný" ve výrocích  $p$  i  $r$ , a termín "Jan" ve výrocích  $q$  i  $r$ .
  - Formule  $(p \ \& \ q) \rightarrow r$  není tautologií, úsudek  $p, q / r$  není platný, i když úsudek demonstrováný příkladem evidentně platný je.

- ♦ V predikátové logice, která je zobecněním výrokové logiky, je uvedený úsudek formalizován jako

$\forall x [p(x) \rightarrow q(x)], p(J) \models q(J)$ , resp. následující formulí

$\{\forall x [p(x) \rightarrow q(x)] \& p(J)\} \rightarrow q(J)$ , kde

- ♦  $x$  je předmětová (individuová) proměnná probíhající určitou předmětnou oblast – universum diskursu,
- ♦  $J$  je individuová konstanta z dané předmětné oblasti (v uvedeném příkladě konkrétní člověk Jan),
- ♦  $p, q$  jsou určité vlastnosti předmětů z universa diskursu (v uvedeném příkladě je interpretujeme jako vlastnosti myslících bytostí "být člověkem" a "být omylný"),  $p(x), q(x)$  resp.  $p(J), q(J)$  značí, že  $x$  resp.  $J$  má vlastnost  $p$  resp.  $q$ ,
- ♦ zápis  $\forall x [ ]$  značí, že pro všechna individua z předmětné oblasti platí to, co je uvedeno v hranatých závorkách.

# Predikátová logika 1.řádu.

- V dalším se budeme zabývat pouze tzv. **predikátovou logikou 1. řádu**, která formalizuje úsudky o vlastnostech předmětů a vztazích mezi předměty pevně dané předmětné oblasti (univerza).
- Nebudeme se zabývat formalizací úsudků, které navíc vypovídají i o vlastnostech vlastností a vztahů a o vztazích mezi vlastnostmi a vztahy. Tím se zabývají **predikátové logiky druhého a vyšších řádů**.
- Predikátová logika 1. řádu je zobecněním výrokové logiky, kterou můžeme považovat za logiku nultého řádu.
- Predikátová logika 1. řádu je postačující pro formalizaci mnohých matematických i jiných teorií.

# Definice /jazyk predikátové logiky/:

- ♦ **Abeceda predikátové logiky** je tvořena následujícími skupinami symbolů:
  - ♦ **Logické symboly**
    - ♦ předmětové (individuové) proměnné:  $x, y, z, \dots$  (příp. s indexy)
    - ♦ symboly pro spojky:  $\neg, \&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
    - ♦ symboly pro kvantifikátory  $\forall, \exists$
    - ♦ případně binární predikátový symbol = (predikátová logika s rovností)
  - ♦ **Speciální symboly** (určují specifikum jazyka)
    - ♦ predikátové symboly:  $p, q, r, \dots$  /příp. s indexy/
    - ♦ funkční symboly:  $f, g, h, \dots$  /příp. s indexy/

Ke každému funkčnímu a predikátovému symbolu je přiřazeno nezáporné číslo  $n$  ( $n \geq 0$ ), tzv. arita, udávající počet individuových proměnných, které jsou argumenty funkce nebo predikátu.

  - ♦ **Pomocné symboly** /závorky/:  $(, )$  /případně i  $[, ], \{, \}$ /

- ◆ **Gramatika**, která udává, jak tvořit:
  - ◆ **termy:**
    - ◆ každý symbol proměnné je term
    - ◆ jsou-li  $t_1, \dots, t_n$  ( $n \geq 0$ ) termy a je-li  $f$   $n$ -ární funkční symbol, pak výraz  $f(t_1, \dots, t_n)$  je term; pro  $n = 0$  se jedná o nulární funkční symbol, neboli individuovou konstantu (značíme  $a, b, c, \dots$ )
    - ◆ jen výrazy dle předchozího jsou termy
  - ◆ **atomické formule:**
    - ◆ je-li  $p$   $n$ -ární predikátový symbol a jsou-li  $t_1, \dots, t_n$  termy, pak výraz  $p(t_1, \dots, t_n)$  je atomická formule
    - ◆ jsou-li  $t_1$  a  $t_2$  termy, pak výraz  $(t_1 = t_2)$  je atomická formule
  - ◆ **formule:**
    - ◆ každá atomická formule je formule
    - ◆ je-li výraz  $A$  formule, pak  $\neg A$  je formule
    - ◆ jsou-li výrazy  $A$  a  $B$  formule, pak výrazy  $(A \vee B)$ ,  $(A \& B)$ ,  $(A \rightarrow B)$ ,  $(A \leftrightarrow B)$  jsou formule
    - ◆ je-li  $x$  proměnná a  $A$  formule, pak výrazy  $\forall xA$  a  $\exists xA$  jsou formule
    - ◆ jen výrazy dle předchozího jsou formule



- Jazyk predikátové logiky, jak byl vymezen výše, je jazyk logiky 1. řádu, pro niž je charakteristické to, že *jediný přípustný typ proměnných jsou individuové proměnné*. Pouze individuové proměnné lze vázat kvantifikátory.

- Zápis formulí můžeme zjednodušit na základě následujících konvencí o vynechávání závorek:
  - Elementární formule a formuli nejvyššího řádu netřeba závorkovat (vnější závorky vynecháváme).
  - Závorky je možné vynechávat v souladu s následující prioritní stupnicí funktorů:  
( $\forall$ ,  $\exists$ ),  $\neg$ ,  $\&$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ . Každý funktor vlevo od vybraného funktoru váže silněji než vybraný funktor.
  - V případě, že o prioritě vyhodnocení nerozhodnou ani závorky ani prioritní stupnice, vyhodnocujeme formuli zleva doprava.
  - Speciálně vzhledem k asociativitě konjunkce a disjunkce, netřeba při zápisu vícečlenných konjunkcí a disjunkcí užívat žádné závorky.
  - Vedle závorek ( $,$ ) lze užívat i závorky  $[,],\{,\}$ .

- Jazyk elementární aritmetiky je případem jazyka predikátové logiky 1. řádu s rovností. Má tyto (speciální) funkční symboly:
  - nulární symbol:  $0$  (konstanta nula)
  - unární symbol:  $s$  (funkce následník)
  - binární symboly:  $+$  a  $\times$  (sčítání a násobení)
  - Příkladem termů jsou (používáme infixní notaci pro  $+$  a  $\times$ ):  
 $0$ ,  $s(x)$ ,  $s(s(x))$ ,  $(x + y) \times s(s(0))$ , atd.
  - Formulemi jsou např. výrazy:  
 $s(0) = (0 \times x) + s(0)$ ,  $\exists x (y = x \times z)$ ,  $\forall x [(x = y) \rightarrow \exists y (x = s(y))]$

- **Výskyt proměnné  $x$  ve formuli  $A$  je vázaný**, jestliže je součástí nějaké podformule  $\forall xB(x)$  nebo  $\exists xB(x)$  formule  $A$ .
- **Proměnná  $x$  je vázaná ve formuli  $A$** , má-li v  $A$  vázaný výskyt.
- Výskyt proměnné  $x$  ve formuli  $A$ , který není vázaný, nazýváme **volný**.
- **Proměnná  $x$  je volná ve formuli  $A$** , má-li v  $A$  volný výskyt.
- Formule, v níž každá proměnná má buď všechny výskyty volné nebo všechny výskyty vázané, se nazývá **formulí s čistými proměnnými**.
- Formule se nazývá **uzavřenou**, neobsahuje-li žádnou volnou proměnnou.
- Formule, která obsahuje aspoň jednu volnou proměnnou se nazývá **otevřenou**. Nechť  $x_1, x_2, \dots, x_n$  jsou všechny volné proměnné formule  $A$ . Potom uzavřenou formuli  $\forall A =df \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n A$  resp.  $\exists A =df \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n A$ , nazýváme **generálním** resp. **existenčním uzávěrem formule  $A$** .

- Symbolem  $A(x/t)$  označujeme formuli, která vznikne z formule  $A$  ***korektní substitucí termu  $t$  za proměnnou  $x$*** . Má-li být substituce korektní musí splňovat následující pravidla:
  - Při substituci nahrazujeme *všechny volné výskyty* proměnné  $x$  ve formuli  $A$ .
  - Substituovat lze *pouze volné výskyty* proměnné  $x$  ve formuli  $A$ .
  - Žádná individuová proměnná vystupující v termu  $t$  se po provedení substituce  $x/t$  nesmí stát ve formuli  $A$  vázanou (v takovém případě je term  $t$  za proměnnou  $x$  ve formuli  $A$  ***nesubstituovatelný***).

- Symbolem  $A(x_1, x_2, \dots, x_n / t_1, t_2, \dots, t_n)$  označujeme formuli, která vznikne z formule  $A$  korektními substitucemi  $x_i/t_i$  pro  $i = 1, 2, \dots, n$ . Všechny formule tvaru  $A(x_1, x_2, \dots, x_n / t_1, t_2, \dots, t_n)$  nazýváme *instancemi formule A*.

- **Příklad:** Nechť formulí  $A(x)$  je:  $p(x) \rightarrow \forall y q(x, y)$  a term  $t$  nechť je  $f(y)$ .
  - Provedeme-li substituci  $A(x/f(y))$ , dostaneme:  
$$p(f(y)) \rightarrow \forall y q(f(y), y).$$
  - Vidíme, že druhý (zvýrazněný) výskyt proměnné  $y$  není volný (přitom původně zde byla volná proměnná  $x$ , takže jsme změnili "smysl výrazu").
  - Tedy term  $f(y)$  není substituovatelný za  $x$  v dané formulí  $A$ ,  
tj.  $p(x) \rightarrow \forall y q(x, y)$ .

# Převod z přirozeného jazyka do symbolického jazyka PL<sub>1</sub>.

- Jde o analýzu výrazů přirozeného jazyka v rámci PL<sub>1</sub>.
  - Volba predikátových (a funkčních) konstant je libovolná potud, že nesmí dojít ke "kolizi vlastností, funkcí či vztahů". Výrazy jako "všichni", "každý", "nikdo", apod. "překládáme" všeobecným kvantifikátorem  $\forall$ , výrazy jako "někdo", "někteří", apod. "překládáme" existenčním kvantifikátorem  $\exists$ .
  - Dále budeme předpokládat, že jde o jazyk nad homogenním universem, proto v následujících příkladech považujeme za universum diskursu (obor proměnnosti proměnných) množinu všech individuí. Pro přehlednost budeme používat velká písmena pro predikátové symboly.



- Analyzujte v jazyce PL1 následující výroky:
  1. Nikdo, kdo není zapracován (P), nepracuje samostatně (S).
  2. Ne každý talentovaný (T) spisovatel (Sp) je slavný (Sl).
  3. Pouze zaměstnanci (Z) používají výtahu (V).
  4. Ne každý člověk (C), který hodně mluví (M), nemá co říci (R).
  5. Někdo je spokojen (Sn) a někdo není spokojen.
  6. Někteří chytrí lidé (Ch) jsou líní (L).
  7. Všichni zaměstnanci (Z) používají výtahu (V).

- Jako pomůcka k řešení může sloužit tato zásada: Po všeobecném kvantifikátoru  $\forall$  následuje formule ve tvaru implikace ( $\rightarrow$ ), kdežto po existenčním kvantifikátoru formule ve tvaru konjunkce ( $\&$ ).

1. Nikdo, kdo není zapracován (P), nepracuje samostatně (S).

1.  $\forall x [\neg P(x) \rightarrow \neg S(x)]$

2. Ne každý talentovaný (T) spisovatel (Sp) je slavný (Sl).

2.  $\neg \forall x \{[T(x) \& Sp(x)] \rightarrow Sl(x)\}$

3. Pouze zaměstnanci (Z) používají výtahu (V).

3.  $\forall x [V(x) \rightarrow Z(x)]$

4. Ne každý člověk (C), který hodně mluví (M), nemá co říci (R).

4.  $\neg \forall x \{[C(x) \& M(x)] \rightarrow \neg R(x)\}$

5. Někdo je spokojen ( $S_n$ ) a někdo není spokojen.
5.  $\exists x S_n(x) \ \& \ \exists x \neg S_n(x)$
6. Někteří chytrí lidé ( $Ch$ ) jsou líní ( $L$ ).
6.  $\exists x [Ch(x) \ \& \ L(x)]$
7. Všichni zaměstnanci ( $Z$ ) používají výtahu ( $V$ ).
7.  $\forall x [Z(x) \rightarrow V(x)]$

# Sémantika PL<sub>1</sub> – interpretace formulí.

- Sémantika, neboli význam formulí predikátové logiky 1. řádu, je dána jejich interpretací. Než tento pojem přesně definujeme, uvedeme několik neformálních motivací a vysvětlení. Položíme-li si otázku, zda daná formule PL<sub>1</sub> je pravdivá či ne, pak taková otázka je v podstatě nesmyslná, pokud nevíme, co formule znamená, tedy jak je interpretována.

- Tak např. formule

$$\forall x p(f(x), x)$$

- může "říkat", že pro všechna přirozená čísla platí, že jejich druhá mocnina je větší než to číslo, nebo že pro všechny lidi platí, že jejich otec je starší než dotyčný člověk, pak je samozřejmě v takových interpretacích pravdivá.
- Může ale také znamenat, že pro všechna přirozená čísla platí, že jejich druhá mocnina je menší než to číslo, nebo že pro všechny lidi platí, že jejich otec je mladší než dotyčný člověk, pak je samozřejmě (v takové interpretaci) nepravdivá.

# V čem tedy spočívá interpretace formule?

- Nejprve musíme stanovit, "o čem mluvíme", tedy jaká je předmětná oblast – obor proměnnosti (individuových) proměnných, tj. zvolíme jistou *neprázdnou* množinu – ***universum diskursu***, jejíž prvky jsou ***individua***.
- Jelikož predikátové symboly mají vyjadřovat vztahy mezi těmito předměty – prvky universa, přiřadíme každému  $n$ -árnímu ***predikátovému symbolu*** jistou  $n$ -ární ***relaci*** (tj. podmnožinu Kartézského součinu) nad universem.
  - Speciálně, jedná-li se o unární predikátový symbol ( $n = 1$ ), pak přiřadíme podmnožinu universa.
- Podobně ***funkční symboly*** budou vyjadřovat  $n$ -ární ***funkce*** nad universem.
- Teprve poté, co je daná formule interpretována, můžeme ***vyhodnotit*** její ***pravdivost*** či nepravdivost ***v dané interpretaci***.

- Je zde však ještě jeden problém, a to jsou proměnné.
  - Proměnným jazyka PL<sub>1</sub> přiřazujeme **valuaci** individua, tj. prvky universa. (Proměnným jazyka PL<sub>2</sub> mohou být přiřazeny také vlastnosti či funkce.)
  - Jak uvidíme dále z definice sémantiky kvantifikátorů, pravdivostní hodnota formule nezávisí na hodnotě vázaných proměnných (pouze volné proměnné jsou "skutečné" proměnné).
  - Obsahuje-li však formule nějaké volné proměnné, můžeme vyhodnotit její pravdivost v interpretaci pouze v **závislosti na ohodnocení** (valuaci) **volných proměnných**.
  - Při některé valuaci může být formule v dané interpretaci pravdivá, při jiné nepravdivá.



- Tak např. formule

$$\forall x p(f(x), y)$$

- může být interpretována nad množinou celých čísel tak, že symbolu  $p$  je přiřazena relace větší nebo rovno ( $\geq$ ), symbolu  $f$  funkce druhá mocnina (tedy  $f(x)$  "znamená"  $x^2$ ).
- Pak formule "říká", že pro každé celé číslo  $x$  platí, že  $x^2$  je větší než nebo rovno jistému číslu  $y$ .
- Tedy pravdivost formule v této interpretaci závisí na ohodnocení (valuaci) proměnné  $y$ .
- Přiřadíme-li např.  $y$  číslo 5, je formule nepravdivá, přiřadíme-li třeba číslo -3 nebo 0, je formule pravdivá.
- Obecně bude formule pravdivá (v této interpretaci) pro každou valuaci proměnné  $y$ , která přiřadí  $y$  záporné číslo nebo nulu, nepravdivá pro všechny valuace, které přiřadí proměnné  $y$  číslo kladné.

- **Interpretace jazyka predikátové logiky 1. řádu** je tato trojice objektů (která je někdy nazývána *interpretační struktura*):
  - Neprázdna množina  $M$ , která se nazývá **universum diskursu** a její prvky jsou **individua**.
  - Interpretace funkčních symbolů jazyka, která přiřazuje každému  $n$ -árním funkčnímu symbolu  $f$  určité **zobrazení**  $f_M: M^n \rightarrow M$ .
  - Interpretace predikátových symbolů jazyka, která přiřazuje každému  $n$ -árním predikátovému symbolu  $p$  jistou  $n$ -ární relaci  $p_M$  nad  $M$ , tj. **podmnožinu Kartézského součinu**  $M^n$ .

# Poznámky

- Každý  $n$ -ární funkční symbol je tedy interpretován jako funkce, která přiřazuje  $n$ -tici individuí právě jedno individuum, tj. zobrazení z  $M \times \dots \times M$  do  $M$ . Speciálně:
  - je-li  $n = 0$ , pak se jedná o nulární funkční symbol, tedy o individuovou konstantu, které je přiřazen prvek universa – individuum
  - je-li  $n = 1$ , pak se jedná o unární funkční symbol, kterému je přiřazena funkce o jednom argumentu (např. nad množinou čísel  $x^2$ ,  $x + 1$ , nad množinou individuí otec( $x$ ), matka( $x$ ), atd.)
  - je-li  $n = 2$ , pak se jedná o binární funkční symbol, kterému je přiřazena binární funkce se dvěma argumenty (např. nad množinou čísel  $x + y$ ,  $x \cdot y$ , atd.)

- Každý  $n$ -ární predikátový symbol  $p$  je interpretován jako  $n$ -ární relace  $p_M$ , tj. podmnožina Kartézského součinu  $M \times \dots \times M$ , neboli zobrazení  $M \times \dots \times M \rightarrow \{1, 0\}$ . Tato relace  $p_M$  se nazývá **obor pravdivosti** predikátu. Speciálně:
  - je-li  $n = 0$ , pak se jedná o nulární predikátový symbol, kterému je přiřazena hodnota 1 nebo 0 (pravda, nepravda) tak, jak to již známe z výrokové logiky.
  - je-li  $n = 1$ , pak se jedná o unární predikátový symbol, kterému je přiřazena podmnožina universa  $M$ . (Vlastnosti tedy v PL<sub>1</sub> vyjadřujeme – poněkud nepřesně – jako podmnožiny universa.)
  - je-li  $n = 2$ , pak se jedná o binární predikátový symbol, kterému je přiřazena binární relace nad universem (např. relace větší, menší, apod.)

- Výroková logika je tedy speciálním (nejjednodušším) případem predikátové logiky, a to 0. řádu, ve které pracujeme pouze s nulárními predikáty a nepotřebujeme proto termy, funkční symboly, individuové proměnné ani universum diskursu (obor proměnnosti proměnných).
- Nulárním predikátům přiřazujeme pouze hodnoty pravda, nepravda.

- **Ohodnocení (valuace) individuových proměnných** je zobrazení  $e$ , které každé proměnné  $x$  přiřazuje hodnotu  $e(x) \in M$  (prvek univerza).
- **Ohodnocení termů**  $e^*$  indukované ohodnocením proměnných  $e$  je induktivně definováno takto:
  - $e^*(x) = e(x)$
  - $e^*(f(t_1, t_2, \dots, t_n)) = f_M(e^*(t_1), e^*(t_2), \dots, e^*(t_n))$ , kde  $f_M$  je funkce přiřazená v dané interpretaci funkčnímu symbolu  $f$ .

- Hodnotou (realizací) termu  $t$  v interpretaci  $I$  je tedy vždy jistý *prvek universa*.
- Tedy funkční symboly jsou "jména funkcí – zobrazení", termy jsou "jména prvků universa", zatímco predikátové symboly jsou "jména relací" a formule jsou "jména pravdivostních hodnot".

- **Definice:** *Pravdivost formule  $A$  v interpretaci  $I$  pro ohodnocení  $e$  individuových proměnných (což značíme  $\models_I A[e]$  – formule  $A$  je pravdivá v  $I$  pro  $e$ , nebo také  $A$  je splněna v  $I$  ohodnocením  $e$ ), je definována v závislosti na tvaru formule:*



- Je-li  $A$  atomická formule tvaru
  - a)  $p(t_1, \dots, t_n)$ , kde  $p$  je predikátový symbol (různý od  $=$ ) a  $t_1, \dots, t_n$  jsou termy, pak  $\models_I A[e]$ , jestliže platí  $\langle e^*(t_1), e^*(t_2), \dots, e^*(t_n) \rangle \in p_M$ , kde  $p_M$  je relace přiřazená interpretací  $I$  symbolu  $p$  – obor pravdivosti  $p$ . Tedy individua, která jsou hodnotou termů  $t_1, \dots, t_n$ , jsou v relaci  $p_M$ .
  - b)  $(t_1 = t_2)$ , pak  $\models_I A[e]$ , jestliže platí  $e^*(t_1) = e^*(t_2)$ , tj. oba termy jsou realizovány týmž individuem.

- Je-li  $A$  složená formule tvaru
  - a)  $\neg B$ , pak  $\models_I A[e]$  jestliže neplatí  $\models_I B[e]$
  - b)  $B \& C$ , pak  $\models_I A[e]$ , jestliže platí  $\models_I B[e]$  a  $\models_I C[e]$
  - c)  $B \vee C$ , pak  $\models_I A[e]$ , jestliže platí  $\models_I B[e]$  nebo  $\models_I C[e]$
  - d)  $B \rightarrow C$ , pak  $\models_I A[e]$ , jestliže neplatí  $\models_I B[e]$  nebo platí  $\models_I C[e]$
  - e)  $B \leftrightarrow C$ , pak  $\models_I A[e]$ , jestliže platí  $\models_I B[e]$  a  $\models_I C[e]$ , nebo neplatí  $\models_I B[e]$  a neplatí  $\models_I C[e]$

- je-li  $A$  formule tvaru
  - $\forall x B$ , pak  $\models_I A[e]$ , jestliže pro *libovolné* individuum  $i \in M$  platí  $\models_I B[e(x/i)]$ , kde  $e(x/i)$  je valuace stejná jako  $e$  až na to, že přiřazuje proměnné  $x$  individuum  $i$ .
  - $\exists x B$ , pak  $\models_I A[e]$ , jestliže pro *alespoň jedno* individuum  $i \in M$  platí  $\models_I B[e(x/i)]$ , kde  $e(x/i)$  je valuace stejná jako  $e$  až na to, že přiřazuje proměnné  $x$  individuum  $i$ .

- Je-li universum diskursu konečná množina  $M = \{a_1, \dots, a_n\}$ , pak platí následující ekvivalence formulí:
  - $\forall x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \& \dots \& A(a_n)$
  - $\exists x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee \dots \vee A(a_n)$ .
- Z definice kvantifikátorů je navíc zřejmé, že platí:
  - $\forall x A(x) \Leftrightarrow \neg \exists x \neg A(x)$ ,  $\exists x A(x) \Leftrightarrow \neg \forall x \neg A(x)$

- **Formule  $A$  je splnitelná v interpretaci  $I$** , jestliže existuje ohodnocení  $e$  proměnných takové, že platí  $\models_I A[e]$ .
- **Formule  $A$  je pravdivá v interpretaci  $I$** , značíme  $\models_I A$ , jestliže pro všechna možná ohodnocení  $e$  individuových proměnných platí, že  $\models_I A[e]$ .
- **Formule  $A$  je splnitelná**, jestliže existuje interpretace  $I$ , ve které je splněna, tj. jestliže existuje interpretace  $I$  a valuace  $e$  takové, že  $\models_I A[e]$ . Taková interpretace  $I$  a valuace  $e$ , tedy dvojice  $\langle I, e \rangle$ , pro kterou platí  $\models_I A[e]$ , se nazývá **model** formule.
- **Formule  $A$  je tautologií** (logicky pravdivá), značíme  $\models A$ , jestliže je pravdivá v každé interpretaci.
- **Formule  $A$  je kontradikcí**, jestliže nemá model, tedy neexistuje interpretace  $I$ , která by formuli  $A$  splňovala.

- **Model množiny formulí**  $\{A_1, \dots, A_n\}$  je taková interpretace  $I$  (a případně valuace  $e$  volných proměnných), která splňuje všechny formule  $A_1, \dots, A_n$ , tedy dvojice  $\langle I, e \rangle$ , pro kterou platí  $\models_I A_1[e], \dots, \models_I A_n[e]$ .
- **Formule  $B$  logicky vyplývá z formulí  $A_1, \dots, A_n$** , značíme  $A_1, \dots, A_n \models B$ , jestliže  $B$  je pravdivá v každém modelu množiny formulí  $A_1, \dots, A_n$ .
- Tedy pro každou interpretaci  $I$ , která splňuje formule  $A_1, \dots, A_n$  ( $\models_I A_1[e], \dots, \models_I A_n[e]$ ) platí, že splňuje také formuli  $B$  ( $\models_I B[e]$ ).

- *Formule  $A, B$  jsou (sémanticky) ekvivalentní, jestliže pro všechny interpretace  $I$  a všechny valuace  $e$  mají stejná pravdivostní ohodnocení. Skutečnost, že formule  $A, B$  jsou ekvivalentní zapisujeme:  $A \Leftrightarrow B$ .*

- **Věta :** Nechť platí:  $A$  je formule výrokové logiky sestavená z výrokových symbolů  $p_1, p_2, \dots, p_n$ ,  
 $B_1, B_2, \dots, B_n$  jsou libovolné formule predikátové logiky, formule  $A'$  vznikne z formule  $A$  náhradami proměnných  $p_1, p_2, \dots, p_n$  formulemi  $B_1, B_2, \dots, B_n$  (po řadě, tj.  $B_i$  za  $p_i$ ). Potom platí: je-li  $A$  tautologií výrokové logiky, je  $A'$  tautologií predikátové logiky.

### **Důkaz:**

Pravdivostní hodnota formule  $A$  nezávisí na pravdivostních hodnotách formulí  $p_1, p_2, \dots, p_n$  a tedy ani pravdivostní hodnota formule  $A'$  nezávisí na pravdivostních hodnotách formulí  $B_1, B_2, \dots, B_n$ .



- **Věta:** Necht' platí: Formule  $A$  obsahuje podformule  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , formule  $B_1, B_2, \dots, B_n$  jsou po řadě ekvivalentní s formulemi  $B_1', B_2', \dots, B_n'$  /tj.  $B_i \Leftrightarrow B_i'$ /, formule  $A'$  vznikne z formule  $A$  náhradami formulí  $B_1, B_2, \dots, B_n$  formulemi  $B_1', B_2', \dots, B_n'$  (po řadě, tj.  $B_i'$  za  $B_i$ ). Potom platí: je-li  $A$  tautologií predikátové logiky, je i  $A'$  tautologií predikátové logiky.

### **Důkaz:**

Ve formuli  $A$  nahrazujeme podformule formulemi se stejným pravdivostním ohodnocením (pro všechny  $(I, e)$ ). Tedy pravdivostní ohodnocení formule  $A'$  musí být pro všechny  $(I, e)$  stejné jako pravdivostní ohodnocení formule  $A$ . Je-li tedy  $A$  tautologií, je tautologií i  $A'$ .

## některé důležité tautologie predikátové logiky:

1.  $\models \forall x A(x) \rightarrow A(y)$  dictum de omni      speciálně  
 $\models \forall x A(x) \rightarrow A(x/t)$
2.  $\models A(y) \rightarrow \exists x A(x)$

### *De Morganovy zákony:*

3.  $\models \neg \forall x A(x) \leftrightarrow \exists x \neg A(x)$
4.  $\models \neg \exists x A(x) \leftrightarrow \forall x \neg A(x)$

♦ ***Zákony distribuce kvantifikátorů:***

5.  $\models \forall x[A(x) \rightarrow B(x)] \rightarrow [\forall xA(x) \rightarrow \forall xB(x)]$

6.  $\models \forall x[A(x) \rightarrow B(x)] \rightarrow [\exists xA(x) \rightarrow \exists xB(x)]$

7.  $\models \forall x[A(x) \& B(x)] \leftrightarrow [\forall xA(x) \& \forall xB(x)]$

8.  $\models \exists x[A(x) \& B(x)] \rightarrow [\exists xA(x) \& \exists xB(x)]$

9.  $\models [\forall xA(x) \vee \forall xB(x)] \rightarrow \forall x[A(x) \vee B(x)]$

10.  $\models \exists x[A(x) \vee B(x)] \leftrightarrow [\exists xA(x) \vee \exists xB(x)]$

- ♦ **Zákony prenexních operací** (předpokládáme, že formule A neobsahuje volnou proměnnou x):

11.  $|= \forall x[A \rightarrow B(x)] \leftrightarrow [A \rightarrow \forall xB(x)]$

12.  $|= \exists x[A \rightarrow B(x)] \leftrightarrow [A \rightarrow \exists xB(x)]$

13.  $|= \forall x[B(x) \rightarrow A] \leftrightarrow [\exists xB(x) \rightarrow A]$

14.  $|= \exists x[B(x) \rightarrow A] \leftrightarrow [\forall xB(x) \rightarrow A]$

15.  $|= \forall x[A \& B(x)] \leftrightarrow [A \& \forall xB(x)]$

16.  $|= \exists x[A \& B(x)] \leftrightarrow [A \& \exists xB(x)]$

17.  $|= \forall x[A \vee B(x)] \leftrightarrow [A \vee \forall xB(x)]$

18.  $|= \exists x[A \vee B(x)] \leftrightarrow [A \vee \exists xB(x)]$

- *Zákony komutace kvantifikátorů:*

19.  $\models \forall x \forall y A(x,y) \leftrightarrow \forall y \forall x A(x,y)$

20.  $\models \exists x \exists y A(x,y) \leftrightarrow \exists y \exists x A(x,y)$

21.  $\models \exists x \forall y A(x,y) \rightarrow \forall y \exists x A(x,y)$

- Necht' term  $t$  je substituovatelný za proměnnou  $x$ :
  22.  $\models \forall x A(x) \rightarrow A(x/t)$  ***zákon konkretizace***
  23.  $\models A(x/t) \rightarrow \exists x A(x)$  ***zákon abstrakce***
  24.  $\models \forall x A(x) \rightarrow \exists x A(x)$  ***zákon partikularizace***

- **Definice** : Necht' formule  $F$  je utvořena z elementárních formulí  $A, B, \dots$  pouze pomocí funktorů  $\neg, \&, \vee, \forall, \exists$ . Formulí  $F'$ , která vznikne z formule  $F$  vzájemnými záměnami funktorů  $\&$  a  $\vee$  a vzájemnými záměnami funktorů  $\forall$  a  $\exists$ , nazýváme *duální formulí* k formulí  $F$ .
- Vzhledem k tomu, že  $F'' = F$ , jsou formule  $F$  a  $F'$  *duálními navzájem*.

- **Věta:** Necht'  $L$  je jazyk predikátové logiky s danou interpretací  $I$ , v němž  $x$  je proměnná,  $A$  je formule.  $I \models A$ , právě když  $I \models \forall x A$ .

### Důkaz:

Necht'  $I \models A$ , tj.  $A$  je pravdivá v  $I$  při libovolném ohodnocení, tedy i pro takové ohodnocení  $e$ , v němž za  $x$  zvolíme libovolné individuum  $m$  z universa  $M$ . Platí tedy  $I \models \forall x A[e(x/m)]$  pro libovolně zvolené  $m$  a proto platí  $I \models \forall x A$ .

Dokážeme nepřímou: předpokládejme, že neplatí  $I \models \forall x A$ . Potom by muselo existovat ohodnocení  $e_0$  takové, že při němž by neplatilo  $I \models A[e_0]$ , tj. platilo by  $I \models \neg A[e_0]$ . To ale odporuje předpokladu, že  $I \models A[e]$  pro všechna  $e$ .



- **Věta:** Necht'  $A$  je formule jazyka  $L$  a  $I$  jeho interpretace. Potom  $A$  je nesplnitelná v  $I$ , právě když  $I \models \forall \neg A$ .

### **Důkaz:**

Je-li  $A$  nesplnitelná, tj. neplatí  $I \models A[e]$  pro libovolné  $e$ , platí tedy  $I \models \neg A[e]$  pro všechna  $e$  a proto platí  $I \models \neg A$ . Podle předcházející věty pak platí  $I \models \forall \neg A$ .

Dokážeme nepřímou: Kdyby  $A$  byla splnitelná v  $I$ , existovalo by ohodnocení  $e$  takové, že  $I \models A[e]$ , proto by nemohlo platit  $I \models \forall \neg A$ .

- **Věta:** Nechť  $A$  je formule jazyka  $L$  a  $I$  jeho interpretace. Potom  $A$  je splnitelná v  $I$ , právě když  $I \models \exists A$ .

### **Důkaz:**

Je-li  $A$  splnitelná, pak existuje takové ohodnocení  $e$ , že platí  $I \models A[e]$ . Zřejmě pak platí  $I \models \exists A[e]$ . Podle důsledku předchozího lemmatu je pak ale  $I \models \exists A$ , neboť  $\exists A$  je uzavřená formule.

Dokážeme nepřímou: kdyby  $A$  byla nesplnitelná, neexistovalo by ohodnocení  $e$  takové, že i  $I \models A[e]$ , tedy by neplatilo  $I \models \exists A[e]$  a proto ani  $I \models \exists A$ .