Logika

6. Axiomatický systém výrokové logiky

RNDr. Luděk Cienciala, Ph. D.

Tato inovace předmětu Úvod do logiky je spolufinancována Evropským sociálním fondem a Státním rozpočtem ČR, projekt č. CZ. 1.07/2.2.00/28.0216, “Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia”.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obecná charakteristika formálních systémů

- Formální axiomatický systém libovolné teorie (a speciálně také výrokové logiky) je zadán trojicí údajů:
  - jazykem,
  - množinou axiómů,
  - množinou odvozovacích pravidel.

- ***Jazyk teorie*** je množina všech (dobře utvořených) formulí jazyka.
- ***Množina axiómů*** teorie je vybraná podmnožina množiny všech formulí.
  - Axiómy představují základní teorémy teorie, které jsou považovány za výchozí.
- ***Odvozovací pravidla*** umožňují odvozovat (dokazovat) nové ***teorémy*** na základě axiómů a teorémů již dokázaných.

- ***Formální teorie*** (v širším slova smyslu) je tvořena axiómy a všemi formulemi, které lze z nich pomocí odvozovacích pravidel odvodit.
- Označíme-li jednotlivé zmiňované množiny jako

  A – množina axiómů (teorie v užším slova smyslu, ”v kostce”),

  T – množina teorémů (teorie v širším slova smyslu), DUF – množina všech dobře utvořených formulí (tj. jazyk)

  S – množina všech slov v abecedě jazyka, pak platí následující vztahy:

  $A \subset T \subset DUF \subset S$.

Postup budování axiomatické teorie (formálního systému či logického kalkulu) tedy sestává z těchto kroků:

- Vymezení jazyka teorie, který je dán
  - abecedou
  - gramatikou – pravidla, jak tvořit DUF
- Výběr jisté (vlastní) podmnožiny formulí jako axiómů
- Stanovení pravidel odvozování
- Demonstrace bezespornosti (korektnosti) teorie, tj. axiómů a pravidel
- Interpretace formulí

- **Množina axiómů** je:
  - Vždy neprázdná a musí být rozhodnutelná v množině DUF (jinak bychom nemohli v takovém systému nic dokazovat).
    - To znamená, že existuje algoritmus, který pro každou DUF určí, zda je to axióm nebo ne.
  - Může být konečná nebo nekonečná.
    - Konečná množina axiómů je triviálně rozhodnutelná.
    - Nekonečné množiny axiómů musí být charakterizovány algoritmem vytváření axiómů, nebo častěji konečnou množinou tzv. ***axiómových schémat***.
  - Axiómy jsou voleny tak, aby byly pravdivé v každé interpretaci – *tautologie*.

- Navíc stanovujeme tzv. **speciální axiómy,** které charakterizují přímo danou teorii (např. aritmetiku přirozených čísel a ty volíme tak, aby byly *pravdivé v zamýšlené interpretaci teorie*. (Výroková logika či predikátová logika 1. řádu – mohou být tedy považovány za teorie bez speciálních axiómů – ***logické kalkuly***.)

- **Množina odvozovacích pravidel** je:
  - Tvořena několika nebo dokonce jen jedním pravidlem (jsou-li axiómy reprezentovány schématy).
  - Odvozovací pravidla převádějí DUF na DUF a jsou volena tak, aby byla sémanticky ***korektní***, tj. aby ”zachovávala pravdivost” (jinak bychom obdrželi nekorektní systém, ve kterém je možno dokázat vše, a takový systém jistě není z praktického hlediska užitečný).
    - Odvozovací pravidla tedy umožňují vytvářet teorémy, tj. dokazatelné formule.
    - **Důkaz** je konečná posloupnost kroků – DUF, z nichž každá je buď axióm nebo vznikne z předchozích DUF pomocí odvozovacího pravidla. Posledním krokem je dokazovaná formule – teorém.

- Někdy bývá stanoven ještě jeden přirozený ”kosmetický” požadavek na množinu axiómů: Množina axiómů má být **nezávislá,** tj. žádný axióm není dokazatelný z ostatních axiómů.

- Přirozeným požadavkem je (syntaktická) **bezespornost (konzistence):** Alespoň jedna formule není dokazatelná (ve sporném systému dokážeme vše). (Ekvivalentním požadavkem v systémech obsahujících ¬, & je to, že není dokazatelná formule typu
  A & ¬A,

  případně v systémech s ¬, → formule typu ¬(A → A).)
- S tímto souvisí rovněž sémantická bezespornost, neboli **korektnost** systému: Každý teorém je logicky pravdivá formule (v případě teorie bez speciálních axiómů), nebo logicky vyplývá ze speciálních axiómů (předpokladů). Tedy ”to, co dokážeme, je pravdivé”. Označíme-li množinu speciálních axiómů jako SA, můžeme požadavek korektnosti zapsat schematicky:
- Jestliže |– T pak |= T, resp. jestliže SA |– T pak SA |= T.

- **Problém.** Je dokazatelnost totéž co (logická) pravdivost? Jinými slovy, jsou dokazatelné **přesně** ty výroky, které jsou (logicky) pravdivé?
  - D. **Hilbert** (význačný matematik počátku 20. století) očekával kladnou odpověď na výše uvedené otázky a vytyčil tzv. program axiomatizace matematiky.
  - Kurt **Gödel** (největší logik 20. století) dokázal **věty o úplnosti,** které dávají pozitivní odpověď na tyto otázky (pro výrokovou logiku a) pro predikátovou logiku 1. řádu, tedy "obrácené" tvrzení ke korektnosti:
    - Jestliže |= T pak |– T, resp. jestliže SA |= T pak SA |– T (tzv.silná věta o úplnosti).

- Hilbert však očekával ještě více, a to že všechny ”matematické pravdy” lze ”mechanicky” finitně dokázat (z vhodných axiomů), tedy že takové bezesporné teorie, které charakterizují aritmetiku přirozených čísel, jsou úplné v tom smyslu, že každá formule je v dané teorii **rozhodnutelná,** tj. na základě axiomů teorie můžeme dokázat buďto danou formuli nebo její negaci. Tedy že všechny formule, které jsou **pravdivé v** zamýšlené **interpretaci** nad množinou přirozených čísel jsou v této teorii dokazatelné.

- Gödelovy **věty o neúplnosti** dávají velice překvapivou odpověď – existují **pravdivé leč nedokazatelné výroky aritmetiky** přirozených čísel. Tedy Hilbertův program není (v plné šíři) uskutečnitelný.

- S (ne)úplností úzce souvisí problém **rozhodnutelnosti**: Existuje algoritmus, který o libovolné dobře utvořené formuli určí, zda je to teorém (dokazatelná DUF) čili (v korektním systému) logicky pravdivá formule?

- Dá se dokázat:
  - pro výrokovou logiku lze vyvinout kalkuly, které jsou
    - bezesporné
    - úplné
    - rozhodnutelné
  - pro predikátovou logiku 1. řádu lze vyvinout kalkuly, které jsou
    - bezesporné
    - úplné
    - jen parciálně rozhodnutelné (tj. pokud daná DUF je tautologie, pak algoritmus po konečném počtu kroků odpoví ANO, jinak nemusí vydat žádnou odpověď – může "cyklovat" či odpoví NE)
    - nelze vyvinout rozhodnutelný kalkul pro PL1 (problém **logické pravdivosti je v PL1 nerozhodnutelný**)
  - pro predikátovou logiku 2. řádu (a vyšších) lze vyvinout
    - bezesporné kalkuly
    - neúplný
    - nerozhodnutelný (ani parciálně)

- K charakteristice dokazatelnosti byly vytvořeny dva typy formálních systémů:
  - Gentzenova typu
  - Hilbertova typu

Formální systém Hilbertova typu

- **Definice:**
  - ***Jazyk***:
    - **Abeceda**
      - Výrokové symboly: p, q, r,… /případně s indexy/
      - Logické funktory: $\neg$, $\rightarrow$
      - Závorky: (,)   /případně [,],{,}/
    - **Gramatika (DUF)**:
      - p, q, r,… jsou formule.
      - Je-li A formule, pak $(\neg A)$ je formule.
      - Jsou-li A,B formule, pak $(A \rightarrow B)$ je formule.
      - Jiných formulí než podle (1), (2), (3) není.
    - ***Jazyk***: množina všech (dobře utvořených) formulí.
    - **Axiómová schémata:**
      - A1: $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
      - A2: $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
      - A3: $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$
    - **Odvozovací pravidlo:**   MP: $A, A \rightarrow B \vdash B$

- Definovaný axiomatický systém pracuje pouze s funktory

  $\neg, \rightarrow$.

  - Vzhledem k tomu, že pravdivostní funkce příslušné k těmto funktorům tvoří funkcionálně úplný systém, postačí tyto funktory k vytvoření sémanticky úplné logiky.

- Ostatní výrokotvorné funktory můžeme používat jako zkratky (zkracující a zpřehledňující zápis formulí) definované takto:
  - $A \& B =_{df} \neg(A \rightarrow \neg B)$
  - $A \vee B =_{df} \neg A \rightarrow B$
  - $A \leftrightarrow B =_{df} (A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A)$
    - Symboly &, ∨, ↔ nepatří do jazyka definovaného axiomatického systému, jsou to metasymboly sloužící k označování složených formulí jistého typu.

- **Definice:**

  Důkaz formule A ***za předpokladů*** $A_1, A_2, \ldots, A_k$ /$k \geq 0$/ je konečná posloupnost formulí $B_1, B_2,\ldots,B_n$ taková, že: Pro i = 1, 2,…,n -1 je B_i

    - buď předpoklad A_j ($j \in \{1,\ldots,k\}$)
    - nebo axióm
    - nebo formule, která vznikla aplikací pravidla MP na některé dvě formule z množiny $\{B_1, B_2,\ldots,B_{i-1}\}$.
    - B_n je dokazovaná formule A.

- Skutečnost, že formule A je dokazatelná za předpokladů $A_1, A_2, \ldots, A_k$ označujeme zápisem
  $A_1, A_2, \ldots, A_k \vdash A$.

- ***Důkaz formule*** A je důkaz s prázdnou množinou předpokladů (k = 0). Neboli, *důkaz formule A* je důkaz pouze z (logických) axiómů daného systému.
- ***Teorém*** je formule, pro kterou existuje důkaz (s prázdnou množinou předpokladů). Skutečnost, že formule A je teorémem označujeme zápisem |– **A**.

- Hilbertův systém je **korektní**, tedy sémanticky bezesporný.
  - Především, snadno ověříme, že všechny axiómy systému jsou ***tautologie***.
  - Jediné pravidlo systému (MP) “***zachovává pravdivost***” v tom smyslu, že formule B, která vznikne aplikací pravidla na formule A_1, A_2 z těchto formulí logicky vyplývá.

    Tedy platí: Pokud $A_1, A_2 \mid\!- B$, pak $A_1, A_2 \mid\!= B$. --- věta – Postova.

- Všimněme si, že z definice důkazu vyplývá, že i axióm je teorémem. Jeho důkaz je triviální: důkazem axiómu je axióm sám.

- Důkaz $B_1, B_2, \ldots, B_n$ formule A za předpokladů $A_1, A_2, \ldots, A_k$ je nejenom důkazem formule $A = B_n$, ale obsahuje i důkazy $B_1, B_2, \ldots, B_i$ všech formulí B_i pro $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

- Důkaz formule (schématu formulí) $\vdash A \rightarrow A$

Důkaz:

1. $\vdash A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$ A1
2. $\vdash (A\rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$ A2
3. $\vdash (A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$ MP na 1. , 2.
4. $\vdash A \rightarrow (A \rightarrow A)$ A1
5. $\vdash A \rightarrow A$ MP na 3. , 4.

- Důkaz formule $A \rightarrow C$ za předpokladů $A \rightarrow B$, $B \rightarrow C$:

  1. $A \rightarrow B$ 1.předpoklad
  2. $B \rightarrow C$ 2.předpoklad
  3. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ A2
  4. $(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$ A1 $A/(B \rightarrow C)$, B/A
  5. $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ MP:2,4
  6. $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ MP:5,3
  7. $A \rightarrow C$ MP:1,6

- Tedy: $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$.

- **Věta /o dedukci/:**

  $A_1, A_2,\ldots,A_k \mid\!- A \rightarrow B$ právě tehdy, když $A_1, A_2,\ldots,A_k, A \mid\!- B$.

  - (Speciálně pro k=0: $\mid\!- A \rightarrow B$ právě tehdy, když $A \mid\!- B$.)

- **Důkaz:**

  1. Nechť $A_1, A_2, \ldots, A_k \mid\!- A \rightarrow B$. Tedy existuje posloupnost formulí $B_1, B_2, \ldots, B_n$, která je důkazem formule $A \rightarrow B$ z předpokladů $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Důkazem formule B z předpokladů $A_1, A_2, \ldots, A_k, A$ bude pak posloupnost formulí $B_1, B_2, \ldots, B_n, A, B$, kde $B_n = A \rightarrow B$ a B je výsledkem aplikace pravidla MP na formule B_n a A.

2. Nechť $A_1, A_2,\ldots,A_k, A \vdash B$. Tedy existuje posloupnost formulí $C_1,C_2, \ldots,C_r = B$, která je důkazem formule B z předpokladů $A_1,A_2, \ldots,A_k, A$. Dokážeme, že formule $A \rightarrow C_i$ je platná pro všechna $i = 1, 2,\ldots,r$. Tím bude speciálně dokázáno také $A \rightarrow C_r$, což chceme dokázat. Důkaz provedeme matematickou indukcí podle délky důkazu.

- a) Je-li délka důkazu 1, pak pro jedinou formuli C1 důkazu mohou nastat tři případy:
  - C_1 je předpokladem A_i,
  - C_1 je axiómem,
  - C_1 je formulí A.

V prvých dvou případech důkazem formule $A \rightarrow C_1$ je posloupnost formulí:

1. C_1 předpoklad nebo axióm
2. $C_1 \rightarrow (A \rightarrow C_1)$ A1
3. $A \rightarrow C_1$ MP:1,2

V třetím případě je třeba dokázat $A \rightarrow A$. Důkaz této formule již dříve.

- b) Dokážeme, že z předpokládané platnosti formule $A \rightarrow C_n$ pro $n = 1, 2,\dots,i-1$ plyne její platnost také pro $n=i$.

  Pro C_i mohou nastat čtyři případy:

  - C_i je předpokladem A_i,
  - C_i je axiómem,
  - C_i je formulí A, C_i je bezprostředním důsledkem formulí C_j a $C_k = (C_j \rightarrow C_i)$, kde $j, k < i$. V prvých třech případech probíhá důkaz formule $A \rightarrow C_i$ stejným způsobem jako v bodě 1.

- V posledním čtvrtém případě je důkazem posloupnost formulí:

1. $A \rightarrow C_j$ indukční předpoklad
2. $A \rightarrow (C_j \rightarrow C_i)$ indukční předpoklad
3. $(A \rightarrow (C_j \rightarrow C_i)) \rightarrow ((A \rightarrow C_j) \rightarrow (A \rightarrow C_i))$ A2
4. $(A \rightarrow C_j) \rightarrow (A \rightarrow C_i)$ MP:2,3
5. $A \rightarrow C_i$ MP:1,4

Podle věty o dedukci každému teorému (a speciálně také axiómu) ve tvaru implikace odpovídá odvozovací pravidlo (příp. několik odvozovacích pravidel) a naopak. Tak např.:

Teorém:	Pravidlo
$\vdash A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$	$A, A \rightarrow B \vdash B$ /pravidlo MP/
$\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$ /ax.schéma A1/	$A \vdash B \rightarrow A$, a $A, B \vdash A$
$\vdash A \rightarrow A$ příklad	$A \vdash A$
$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$	$A \rightarrow B \vdash (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
příklad	$A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$

- $\vdash A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$, resp. $A, \neg A \vdash B$.

Důkaz:

1.	A	předpoklad
2.	$\neg A$	předpoklad
3.	$(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$	A3
4.	$\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$	A1
5.	$\neg B \rightarrow \neg A$	MP: 2,4
6.	$A \rightarrow B$	MP: 5,3
7.	B	MP: 1,6

- **Věta:** Z předpokladu $\neg B \rightarrow \neg A$ je dokazatelná formule $A \rightarrow B$.

Důkaz:

1. $\vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$ A3
2. $\neg B \rightarrow \neg A \vdash A \rightarrow B$

- $\vdash \neg a \rightarrow (a \rightarrow b)$

Důkaz:

1. $\vdash \neg a \rightarrow (\neg b \rightarrow \neg a)$ A1
2. $\neg a \vdash \neg b \rightarrow \neg a$ dedukce 1
3. $\vdash (\neg b \rightarrow \neg a) \rightarrow (a \rightarrow b)$A3
4. $\neg a \vdash (a \rightarrow b)$ MP na 2. a 3.
5. $\vdash \neg a \rightarrow (a \rightarrow b)$ dedukce na 4.

- $\neg\neg a \to a$

Důkaz:

1.	$\neg\neg a \to (\neg a \to \neg\neg\neg a)$	podle předchozího
2.	$\vdash (\neg a \to \neg\neg\neg a) \to (\neg\neg a \to a)$	A3
3.	$\neg\neg a \vdash \neg a \to \neg\neg\neg a$	dedukce na 1.
4.	$\neg\neg a \vdash \neg\neg a \to a$	MP na 2. a 3.
5.	$\neg\neg a \vdash a$	dedukce na 4.
6.	$\vdash \neg\neg a \to a$	dedukce na 5.

- $\vdash b \rightarrow \neg\neg b$

Důkaz:

1. $\vdash \neg\neg\neg b \rightarrow \neg b$ podle předchozího
2. $\vdash (\neg\neg\neg b \rightarrow \neg b) \rightarrow (b \rightarrow \neg\neg b)$ A3
3. $\vdash b \rightarrow \neg\neg b$ MP na 1. a 2.

- Věta o neutrální formuli:

Je-li U, A $\vdash$ B i U, $\neg$A $\vdash$ B, pak U $\vdash$ B.

Důkaz:

1. U, A $\vdash$ B předpoklad
2. U $\vdash$ A $\rightarrow$ B dedukce na 1.
3. U, $\neg$A $\vdash$ B předpoklad
4. U $\vdash$ $\neg$A $\rightarrow$ B dedukce na 3.
5. U,(A$\vee\neg$A) $\vdash$ B věta o důkazu rozborem případů
6. U, ($\neg$A $\rightarrow$ $\neg$A) $\vdash$ B přepis výrokové spojky $\vee$
7. U $\vdash$ ($\neg$A $\rightarrow$ $\neg$A) $\rightarrow$ B dedukci na 6.
8. $\vdash$ $\neg$A $\rightarrow$ $\neg$A věta
9. U $\vdash$ B MP na 7. a 8.

- **Věta (pomocná věta pro důkaz Postovy věty):**

  Nechť formule A je sestavena z výrokových symbolů p_1, $p_2,\dots,p_n$. Označme písmenem *v* pravdivostní ohodnocení (valuaci) těchto proměnných a zápisem w(A) pravdivostní ohodnocení formule A, jež je tímto ohodnocením indukováno. Potom platí:

  $p_1^{v}, p_2^{v}, \dots, p_n^{v} \mid\!- A^{v},$ /*/

  kde zápis A^{v} značí buď formuli $\neg A$ (je-li w(A) = 0 při ohodnocení *v*), nebo formuli A (je-li w(A) = 1 při ohodnocení *v*).

- **Důkaz:**

  Důkaz provedeme matematickou indukcí podle konstrukce formule A. Ve formálním systému může mít formule A právě jeden z následujících třech tvarů:

  1. $A = p$ elementární formule
  2. $A = \neg B$ složená formule ve tvaru negace
  3. $A = B \rightarrow C$ složená formule ve tvaru implikace

Indukční krok. Dokážeme, že z předpokladu platnosti vztahu /*/ pro komponenty B, C složené formule vyplývá platnost vztahu /*/ pro celé složené formule $\neg B$ a $B \rightarrow C$.

a) Složená formule má tvar $\neg B$. Podle indukčního předpokladu platí

$p_1^v, p_2^v, \ldots, p_n^v \mid\!- B^v$.

Máme dokázat $p_1^v, p_2^v, \ldots, p_n^v \mid\!- (\neg B)^v$.

K tomu, abychom to dokázali, stačí dokázat $B^v \mid\!- (\neg B)^v$.

Jsou dvě možnosti:

buď $w(B) = 0$ a pak $\neg B \mid\!- \neg B$

a nebo $w(B) = 1$ a pak $B \mid\!- \neg\neg B$.

Vztah $B^v \mid\!- (\neg B)^v$ je dokázaný.

b) Složená formule má tvar $B \rightarrow C$. Podle indukčního předpokladu platí

$p_1^v, p_2^v, \dots, p_n^v \vdash B^v$ a $p_1^v, p_2^v, \dots, p_n^v \vdash C^v$.

Máme dokázat $p_1^v, p_2^v, \dots, p_n^v \vdash (B \rightarrow C)^v$.

K tomu, abychom to dokázali, stačí dokázat $B^v, C^v \vdash (B \rightarrow C)^v$.

Čtyřem různým ohodnocením formulí B, C odpovídají následující čtyři pravidla, jejichž platnost třeba ověřit:

a) $\neg B, \neg C \vdash B \rightarrow C$

b) $\neg B, C \vdash B \rightarrow C$

c) $B, \neg C \vdash \neg(B \rightarrow C)$

d) $B, C \vdash B \rightarrow C$

Důkaz a),b):

1. $\neg B$	předpoklad
2. $\neg B \rightarrow (B \rightarrow C)$	teorém
3. $B \rightarrow C$	MP: 1,2

Důkaz c):

1. B předpoklad
2. $\neg C$ předpoklad
3. $((B \to C) \to C) \to (\neg C \to \neg(B \to C))$ ax.schéma A3
4. $B \to ((B \to C) \to C)$ teorém /ekvivalent MP/
5. $(B \to C) \to C$ MP: 1,4
6. $\neg C \to \neg(B \to C)$ MP: 5,3
7. $\neg(B \to C)$ MP: 2,6

Důkaz d):

1. C	předpoklad
2. $C \rightarrow (B \rightarrow C)$	ax.schéma A1
3. $B \rightarrow C$	MP: 1,2

- **Věta /Postova /: Úplnost a korektnost logického kalkulu výrokové logiky**
  Každá dokazatelná formule je tautologií a každá tautologie je dokazatelná, tj.
  $|\!-$ A právě tehdy, když $|\!=$ A.
  Obecněji platí:
  $A_1, A_2,\ldots,A_n \;|\!- B$ právě tehdy, když $A_1, A_2, \ldots, A_n \;|\!= B$.

- Nechť $|-$ A, dokážeme $|=$ A. (***Korektnost***)
  Formule A je buď axióm a nebo je dokazatelná z axiómů pomocí opakovaného používání odvozovacího pravidla MP.
  Je-li axiómem, pak je tautologií – o tom se přesvědčíme pro všechna tři axiómová schémata metodou pravdivostních funkcí /metodou 0-1/.
  Použití pravidla MP zachovává "tautologičnost": jsou-li formule B, $B \rightarrow C$ tautologiemi, pak také formule C musí být tautologií /kdyby pro nějaké pravdivostní ohodnocení výrokových symbolů bylo $w(B) = 1$ a při tom $w(C)=0$, pak by pro toto ohodnocení bylo $w(B \rightarrow C) = 0$ a formule $B \rightarrow C$ by nebyla tautologií/.
  Protože všechny teorémy lze odvodit z axiómů pomocí opakovaného užití pravidla MP, jsou všechny teorémy tautologiemi.

- Nechť $\models A$, dokážeme $\vdash A$. (***Úplnost***)

Protože formule A je tautologií, je $A^v = A$ pro všechna pravdivostní ohodnocení výrokových symbolů v.

Je tedy $p_1^v, p_2^v, \ldots, p_n^v \vdash A$

pro všechna ohodnocení v.

Platí tedy speciálně také $p_1, p_2^v, \ldots, p_n^v \vdash A$, $\neg p_1, p_2^v, \ldots, p_n^v \vdash A$.

Odtud podle věty o neutrální formuli dostáváme

$p_2^v, \ldots, p_n^v \vdash A$

pro všechna ohodnocení v. Speciálně opět platí

$p_2, \ldots, p_n^v \vdash A$,

$\neg p_2, \ldots, p_n^v \vdash A$

a počet předpokladů lze opět snížit o jeden.

Tímto způsobem lze pokračovat až nakonec po n krocích nalezneme $\vdash A$. Tautologie A je tedy dokazatelnou formulí.

- Formální systém je sporný, je-li v něm dokazatelná libovolná formule. Formální systém, který není sporný, je bezesporný.
- Věta: Je-li U sporná množina výrokových formulí, pak

  $U \vdash A$ i $U \vdash \neg A$.

  Důkaz: Je-li z U dokazatelná libovolná formule, pak zřejmě je z U dokazatelná jak formule A, tak i formule ¬A.

- Výroková logika je bezesporný formální systém.

  Důkaz: Předpokládejme, že formální systém výrokové logiky je sporný, musí tedy v něm být dokazatelná libovolná formule, tj. $\vdash A$ i $\vdash \neg A$. Podle Postovy věty by pak byly tautologiemi zároveň A i $\neg A$, což není z hlediska jejich sémantiky možné.

- Věta: Konečná množina formulí je bezesporná právě když je splnitelná.

- Důkaz:

1. Je-li $U = \{B_1, B_2, \dots. B_k\}$ bezesporná množina formulí, pak podle definice existuje formule A taková, že neplatí $U \vdash A$. Podle jedné z předchozích vět by tedy neplatilo $\vdash (B_1 \& B_2 \& \dots \& B_k) \rightarrow A$.
   Podle věty Postovy pak nemůže ani $\models (B_1 \& B_2 \& \dots \& B_k) \rightarrow A$. Musí existovat ohodnocení v, pro něž formule $(B_1 \& B_2 \& \dots \& B_k) \rightarrow A$ nabývá hodnotu. Takové ohodnocení musí formuli $B_1 \& B_2 \& \dots \& B_k$ a tedy i každému B_i přiřazovat hodnotu 1.

2. nepřímo:Je-li $U = \{B_1, B_2, ...B_k\}$ sporná, pak existuje formule A taková, že $U \vdash A \,\&\, \neg A$. Podle Postovy věty pak formule $(B_1 \,\&\, B_2 \,\&...\&\, B_k) \rightarrow A \,\&\, \neg A$ (označíme ji B) musí být tautologií. Pro libovolné ohodnocení *v*, pak $w = 1$. Protože však $w'(A\&\neg A) = 0$ vždy nemůže být i $(B_1\&B_2\&...\&B_k) = 1$,neboť by pak B nebyla tautologií. Z toho ale vyplývá, že existuje $1 \leq j \leq k$ takové, že $w(Bj) = 0$.

Gentzenovský formální systém výrokové logiky

- Disponuje pouze jedním axiómem a řadou odvozovacích pravidel tohoto tvaru:

$$\frac{S_1, \dots , S_n}{S}$$

- formule S je jako závěr odvozena z formulí $S_1, \dots, S_n$ – z předpokladů dedukce.

- Následující axióm není v pravém smyslu formulí výrokové logiky, ale množinou formulí.
- Axióm gentzenovského formálního systému výrokové logiky je množina formulí U obsahující komplementární pár atomických formulí $\{p, \neg p\} \in U$.

Odvozovací pravidla gentzenovského systému jsou dvojího typu:

- α - pravidla daná schématem

$$\frac{U_1 \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}}{U_1 \cup \{\alpha\}}$$

a tabulkou

α	α_1	α_2
A	$\neg\neg A$	
$A_1 \vee A_2$	A_1	A_2
$\neg(A_1 \& A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
$A_1 \rightarrow A_2$	$\neg A_1$	A_2
$A_1 \leftarrow A_2$	A_1	$\neg A_2$
$\neg(A_1 \leftrightarrow A_2)$	$\neg(A_1 \rightarrow A_2)$	$\neg(A_2 \rightarrow A_1)$

- β-pravidla daná schématem

$$\frac{U_1 \cup \{\beta_1\} \qquad U_2 \cup \{\beta_2\}}{U_1 \cup U_2 \cup \{\beta\}}$$

a tabulkou

β	β_1	β_2
$B_1 \& B_2$	B_1	B_2
$\neg(B_1 \vee B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$\neg(B_1 \rightarrow B_2)$	B_1	$\neg B_2$
$\neg(B_1 \leftarrow B_2)$	$\neg B_1$	B_2
$B_1 \leftrightarrow B_2$	$B_1 \rightarrow B_2$	$B_2 \rightarrow B_1$

- Důkaz v gentzenovském formálním systému výrokové logiky je posloupnost sekvencí formulí taková, že každá sekvence je buď axiómem nebo je odvozena z jednoho nebo dvou předcházejících členů posloupnosti pomocí některého odvozovacího pravidla.
- Je-li formule A posledním prvkem posloupnosti a, nazývá se posloupnost jejím důkazem a samotná formule A formulí dokazatelnou.
- Označení dokazatelné formule stejně jako v hilbertovském.

  $\vdash A$.

$\vdash (p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$

Důkaz:

1.	$\neg p, q, p$	axióm
2.	$\neg q, q, p$	axióm
3.	$\neg(p \vee q), q, p$	β-∨ na 1. a 2.
4.	$\neg(p \vee q), (q \vee p)$	α-∨ na 3.
5.	$(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$	α-→ na 4

- Je možno znázornit i graficky, je to v podstatě sémantické tablo konstruované opačným směrem, přičemž uzlové sekvence tvoří duální sekvence formulí.
- Sekvence literálů zavěšena listech sémantického stromu představovaly jejich konjunkce, zde se jedná o disjunkci literálů komplementárních.
- Daná pravidla jsou duální k pravidlům sémantického tabla.

$\vdash (p \vee (q \& r)) \rightarrow ((p \vee q) \& (p \vee r))$

1.	$\neg p, p, q$	axióm
2.	$\neg p, (p \vee q)$	α-v na 1.
3.	$\neg p, p, r$	axióm
4.	$\neg p, (p \vee r)$	α - v na 3
5.	$\neg p, (p \vee q) \& (p \vee r)$	β - & na 2. 4.
6.	$\neg q, \neg r, p, q$	axióm
7.	$\neg q. \neg r, (p \vee q)$	α-v na 6
8.	$\neg q, \neg r, p, r$	axióm
9.	$\neg q, \neg r, (p \vee r)$	α-v na 8.
10.	$\neg q, \neg r, (p \vee q) \& (p \vee r)$	β - & na 7. a 9.
11.	$\neg (q \& r), (p \vee q) \& (p \vee r)$	α-& na 10.
12.	$\neg (p \vee (q \& r)), (p \vee q) \& (p \vee r)$	β - v na 5. a 11.
13.	$(p \vee (q \& r)) \rightarrow ((p \vee q) \& (p \vee r))$	α- $\rightarrow$ na 12