# Logika

5. Rezoluční princip

RNDr. Luděk Cienciala, Ph. D.

Tato inovace předmětu Úvod do logiky je spolufinancována Evropským sociálním fondem a Státním rozpočtem ČR, projekt č. CZ. 1.07/2.2.00/28.0216, "Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia".

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

# Rezoluční metoda ve výrokové logice (Automatické dokazování)

- Touto metodou dokazujeme **nesplnitelnost** dané formule (resp. množiny formulí) a je uplatnitelná na formuli v **konjunktivní normální formě (KNF).**

- Využívá dvou jednoduchých tvrzení:
  - Je-li formule A tautologie, pak formule ¬A je kontradikce a naopak. (Důkaz zřejmý.)
    - Symbolicky:

$$\models A \text{ právě když } \neg A \models$$

  - Rezoluční pravidlo odvozování: Nechť *l* je literál.

    Z formule (A ∨ *l*) ∧ (B ∨ ¬*l*) odvoď (A ∨ B).
    - Zapisujeme:

$$\frac{(A \vee l) \;\&\; (B \vee \neg l)}{(A \vee B)}$$

- Toto pravidlo není přechodem k ekvivalentní formuli, ale zachovává **splnitelnost.**

  **Důkaz:**
  - Nechť je formule $(A \lor l) \,\&\, (B \lor \neg l)$ splnitelná, tedy pravdivá při nějaké valuaci $v$.
  - Pak při této valuaci musí být pravdivé oba disjunkty (tzv. klausule) $A \lor l$ a $B \lor \neg l$.
  - Nechť je dále $v(l) = 0$. Pak $w(A) = 1$ a tedy $w(A \lor B) = 1$.
  - Nechť je naopak $v(l) = 1$. Pak $w(\neg l) = 0$ a musí být $w(B) = 1$, a tedy $w(A \lor B) = 1$.
  - V obou případech je tedy formule $A \lor B$ pravdivá v modelu původní formule, a tedy splnitelná.

- Uvědomme si, že důkaz byl proveden pro jakýkoli model *v*. Jinými slovy platí, že pravidlo zachovává i pravdivost:

  **(A ∨ *l*) & (B ∨ ¬*l*) |= (A ∨ B).**

- Jednotlivé disjunkty v KNF nazýváme **klausule,** a proto je KNF také nazývána **klausulární forma.**

# Postup řešení:

- **Důkaz, že formule A je tautologie**:
  - Formuli A znegujeme a převedeme do KNF.
  - Nyní uplatňujeme pravidlo rezoluce.
  - Pokud při postupném ”vyškrtávání” literálů s opačným znaménkem dospějeme k prázdné klausuli, je tato evidentně nesplnitelná, tedy také původní ¬A je nesplnitelná a A je tautologie.

- **Důkaz správnosti úsudku** $P_1,\ldots,P_n \models Z$.
  - Závěr Z znegujeme a dokazujeme, že množina $\{P_1,\ldots,P_n , \neg Z\}$ je sporná.
  - Jinými slovy, dokazujeme, že formule $(P_1 \,\&\, P_2 \,\&\, \ldots \,\&\, P_n) \rightarrow Z$ je tautologie, tedy že její negace $P_1 \,\&\, P_2 \,\&\, \ldots \,\&\, P_n \,\&\, \neg Z$ je kontradikce.

Ověříme platnost úsudku $p \rightarrow q,\ r \vee \neg q,\ \neg r\ /\ \neg p$. Jednotlivé klausule zapíšeme pod sebe (s negovaným závěrem) a uplatňujeme pravidlo rezoluce:

1. $\neg p \vee q$
2. $r \vee \neg q$
3. $\neg r$
4. $p$

--------------

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | alternativně: | |
| 5. $q$ | (1. a 4) | 5' $\neg p \vee r$ | (1.a 2.) |
| 6. $r$ | (2. a 5.) | 6' $\neg p$ | (5'a 3.) |
| 7. false | (3. a 6.) | 7' false | (6' a 4) |

# $h, \neg h \vee p \vee q, \neg p \vee c, \neg q \vee c \models c$

- $\{ h, \neg h \vee p \vee q, \neg p \vee c, \neg q \vee c, \neg c \}$

1. $h$
2. $\neg h \vee p \vee q$
3. $p \vee q$ — rezolventa 1, 2
4. $\neg q \vee c$
5. $p \vee c$ — rezolventa 3, 4
6. $\neg p \vee c$
7. $c$ — rezolventa 5, 6
8. $\neg c$
9. false — rezolventa 7, 8

$p \vee q,\ p \to r,\ q \to s \models r \vee s$

$\{p \vee q,\ \neg p \vee r,\ \neg q \vee s,\ \neg r,\ \neg s\}$

1. $p \vee q$
2. $\neg p \vee r$
3. $q \vee r$ rezolventa 1, 2
4. $\neg q \vee s$
5. $r \vee s$ rezolventa 3, 4
6. $\neg r$
7. $s$ rezolventa 5, 6
8. $\neg s$
9. false rezolventa 7, 8

Ověřte platnost úsudku
Je doma nebo odešel do kavárny.
Je-li doma, pak nás očekává.
Jestliže nás neočekává, pak odešel do kavárny.

- Označíme jednotlivé elementární výroky: d – ”je doma”, k – ”odešel do kavárny”,
  o – ”očekává nás” a formalizujeme:

| | |
|---|---|
| $d \vee k$ | 1. $d \vee k$ |
| $d \rightarrow o$ | 2. $\neg d \vee o$ |
| ------- | 3. $\neg o$ |
| $\neg o \rightarrow k$ | 4. $\neg k$ (klausule 3. a 4. tvoří negovaný závěr $\neg o \& \neg k$) |

-------------

5. d (1. a 4.)
6. o (2. a 5.)
7. false (3. a 6.)

## Dokažte, že formule $[(p \to q) \,\&\, \neg q] \to \neg p$ je tautologie.

- Formuli znegujeme a převedeme do klausulární formy:

  $[(\neg p \lor q) \,\&\, \neg q] \,\&\, p$

  Klausule:

1. $\neg p \lor q$
2. $\neg q$
3. $p$
4. $\neg p$ rezoluce 1.2.
5. false

- metoda automatického dokazování – nalezla široké uplatnění v počítačovém dokazování (je na ní, resp. na obecné rezoluci pro predikátovou logiku, založen např. programovací jazyk PROLOG), v expertních systémech a v dalších oblastech umělé inteligence.

Metoda automatického dokazování se opírá o tři principy:

- **Princip vyvrácení**, převádějící problém důkazu dané formule na problém důkazu nesplnitelnosti negace této formule.
- **Rezoluční odvozovací pravidlo** – jediné odvozovací pravidlo používané metodou.
- **Robinsonův rezoluční princip** umožňující vyvodit spor z nesplnitelné formule a tak dokázat její nesplnitelnost (a tím dokázat platnost původní formule).

- **Klauzule** je konečná disjunkce literálů.
- **Literál** je výrokový symbol nebo jeho negace.
- **Prázdná klauzule** je klauzule, která neobsahuje ani jeden literál.
- **Hornova klauzule** je klauzule s nejvýše jedním pozitivním (nenegovaným) literálem.
- **Klauzulární forma** dané formule je ekvivalentní formule ve tvaru konjunkce klauzulí.

## Speciální případy klauzulí:

- Klauzule bez antecedentů

  $\{\ \} \Rightarrow \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$
- Klauzule bez konsekventů, tj. Hornova klauzule se všemi literály negativními

  $\{q_1, q_2, \ldots, q_m\} \Rightarrow \{\ \}$
- Klauzule s jediným konsekventem, tj. Hornova klauzule s jediným pozitivním literálem

  $\{q_1, q_2, \ldots, q_m\} \Rightarrow \{p_1\}$, neboli $(q_1 \,\&\, q_2 \,\&\ldots\&\, q_m) \rightarrow p_1$
- Prázdná klauzule

  $\{\ \} \Rightarrow \{\ \}$

# Věta princip vyvrácení:

Formule B vyplývá z předpokladů $A_1, A_2, \dots, A_n$, značíme $A_1, A_2, \dots, A_n \models B$, právě tehdy, je-li formule $A_1 \,\&\, A_2 \,\&\dots\&\, A_n \,\&\, \neg B$ kontradikcí.

# Důkaz:

- Speciálně pro n=1:

1. $A \models B$
2. $A \rightarrow B$ je tautologií
3. $\neg A \vee B$ je tautologií
4. $\neg(A \,\&\, \neg B)$ je tautologií
5. $A \,\&\, \neg B$ je kontradikcí

- Následující tvrzení jsou ekvivalentní

1. $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$
2. $A_1 \,\&\, A_2 \,\&\ldots\&\, A_n \rightarrow B$ je tautologií
3. $\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \ldots \vee \neg A_n \vee B$ je tautologií
4. $\neg(A_1 \,\&\, A_2 \,\&\ldots\&\, A_n \,\&\, \neg B)$ je tautologií
5. $A_1 \,\&\, A_2 \,\&\ldots\&\, A_n \,\&\, \neg B$ je kontradikcí

# Věta /rezoluční odvozovací pravidlo/:

Jsou-li splnitelné klausule

$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_m \vee L,\ B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_n \vee \neg L,$

pak je splnitelná také klausule

$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_m \vee B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_n,$

neboli:

$$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_m \vee L,\ B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_n \vee \neg L \ \vdash$$
$$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_m \vee B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_n.$$

- Speciálně platí:
  - $m = 0, n = 0$: $L, \neg L \mid\!- $ false odvození sporu
  - $m = 0, n = 1$: $L, \neg L \vee B \mid\!- B$ pravidlo MP
  - $m = 1, n = 1$: $L \vee A, \neg L \vee B \mid\!- A \vee B$ zákl. tvar rezol. pravidla

- **Definice:**
  Nechť F je formule v klauzulárním tvaru (neboli konjunktivní množina klauzulí). Symbolem $R$(F) označme formuli F rozšířenou o všechny rezolventy všech rezoluce schopných dvojic klauzulí z F. **Rezolučním uzávěrem formule F n-tého řádu** nazveme formuli $R_n$(F) definovanou rekurzivně takto:
  - $R_0$(F) = F,
  - $R_i$(F) = $R$($R_{i-1}$(F)), i=1,2,…,n

# Věta /Robinsonův rezoluční princip/:

Formule F v klauzulárním tvaru je kontradikcí (nesplnitelná) právě tehdy, existuje-li přirozené číslo n takové, že $R_n$(F) obsahuje prázdnou klauzuli.

Dokažme nesplnitelnost následující konjunktivní množiny klauzulí
{p ∨ q, p ∨ r, ¬q ∨ ¬r, ¬p}
neboli následující konjunktivní normální formy
(p ∨ q) & (p ∨ r) & (¬q ∨ ¬r) & (¬p).

1. p ∨ q výchozí klauzule
2. p ∨ r výchozí klauzule
3. ¬q ∨ ¬r výchozí klauzule
4. ¬p výchozí klauzule

| Systematicky: | | Optimálně: | |
|---|---|---|---|
| 5. p ∨ ¬r | rezoluce: 1,3 | 5'. q | rezoluce: 1,4 |
| 6. q | rezoluce: 1,4 | 6'. r | rezoluce: 2,4 |
| 7. p ∨ ¬q | rezoluce: 2,3 | 7'. ¬q | rezoluce: 3,6 |
| 8. r | rezoluce: 2,4 | 8'.false | rezoluce: 5,7 |
| 9. p | rezoluce: 2,5 | | |
| 10. ¬r | rezoluce: 3,6 | | |
| 11. ¬q | rezoluce: 3,8 | | |
| 12. ¬r | rezoluce: 4,5 | | |
| 13. ¬q | rezoluce: 4,7 | | |
| 14. false | rezoluce: 4,9 | | |