# Logika

## 4. Splnitelnost a platnost, logický důsledek

RNDr. Luděk Cienciala, Ph. D.

Tato inovace předmětu Úvod do logiky je spolufinancována Evropským sociálním fondem a Státním rozpočtem ČR, projekt č. CZ. 1.07/2.2.00/28.0216, "Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia".

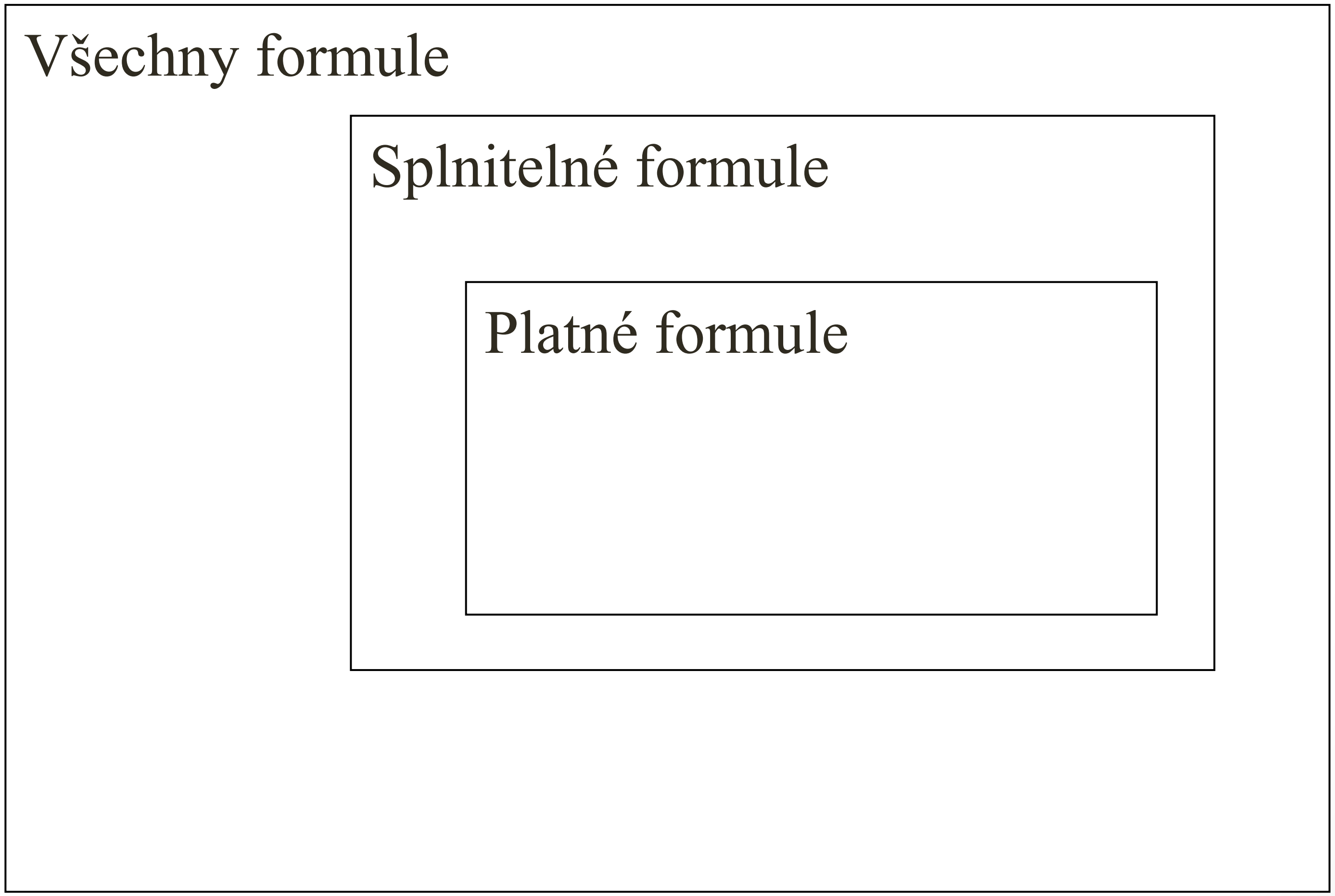
evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

# Splnitelnost a platnost formule

- Všechny atomické formule obsahující pouze prvotní proměnné jsou splnitelné.
- Atomická formule tvořená logickou konstantou true je tautologie, zatímco false je kontradikce neboli nesplnitelná atomická formule.
- Kontradikce jsou nesplnitelné neboli nekonsistentní formule.
- Platné formule jsou zároveň formulemi splnitelnými neboli konsistentními.

- Formule A je platná právě tehdy je-li ¬A nesplnitelná.
  - Toho se využívá při důkazech platnosti formulí. Převedeme na problém nesplnitelnosti její negace. Hovoříme o tak zvané proceduře popření.


Všechny formule
Splnitelné formule
Platné formule

- Pro rozhodování platnosti nebo splnitelnosti formule A se hovoří často o rozhodovacích algoritmech.
- Přitom se zde rozumí rozhodovací procedura, která skončí odpovědí ano, patří-li formule A do množiny platných (splnitelných) formulí, resp. skončí odpovědí ne, jestliže A do této množiny nepatří.

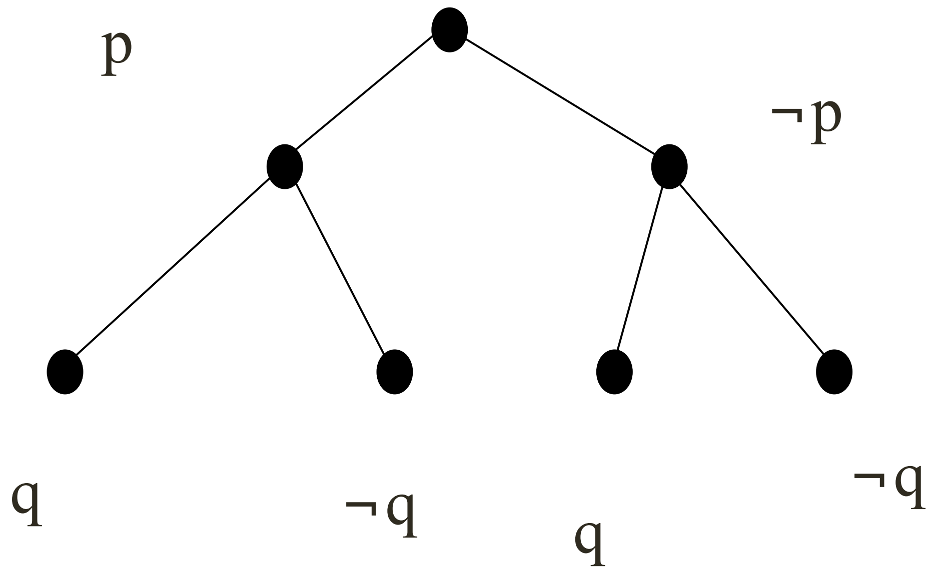
# Algoritmy rozhodování splnitelnosti a platnosti formulí

- Rozhodovací procedura splnitelnosti řeší zároveň i problém rozhodovací procedury platnosti formule, neboť formule je platná, právě když její negace je nesplnitelná.

# Rozhodování pomocí sémantické stromu

- Sémantický strom: každá proměnná p výrokové formule je v něm zastoupena dvojicí literálů.
  - pozitivní literál proměnné zastupuje jeho pravdivostní hodnotu true
  - negativní literál ¬p zastupuje jeho pravdivostní hodnotu false.
  - Strom složený z hran a uzlů tvoří systém větví procházejících uzly vždy od kořene až po list.

# Úplný sémantický strom

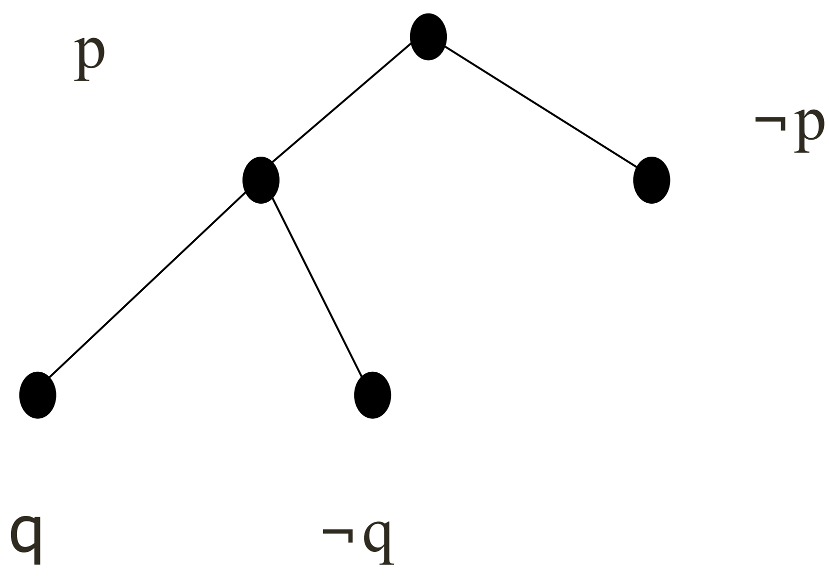


# Úplný sémantický strom

- Z každého uzlu sémantického stromu vycházejí právě dvě hrany příslušející pozitivnímu a negativnímu literálu téže výrokové proměnné.
- Každá větev úplného sémantického stromu od kořene až k listu představuje jedno z možných ohodnocení atomických proměnných vystupujících ve formuli.
- Koncovému listu pak přísluší výsledek interpretace formule při tomto ohodnocení.
- Žádná z větví neobsahuje více než jeden výskyt literálu téže proměnné.

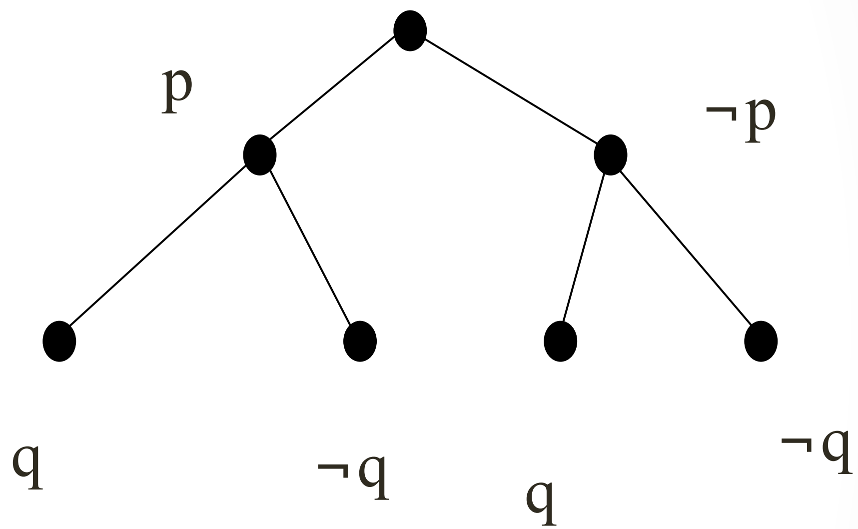
- Úplný sémantický strom zachycuje v případě konečné formule všechna možná ohodnocení jejích proměnných. Je-li množina proměnných nekonečná, je nekonečný i odpovídající sémantický strom.

# Neúplný sémantický strom



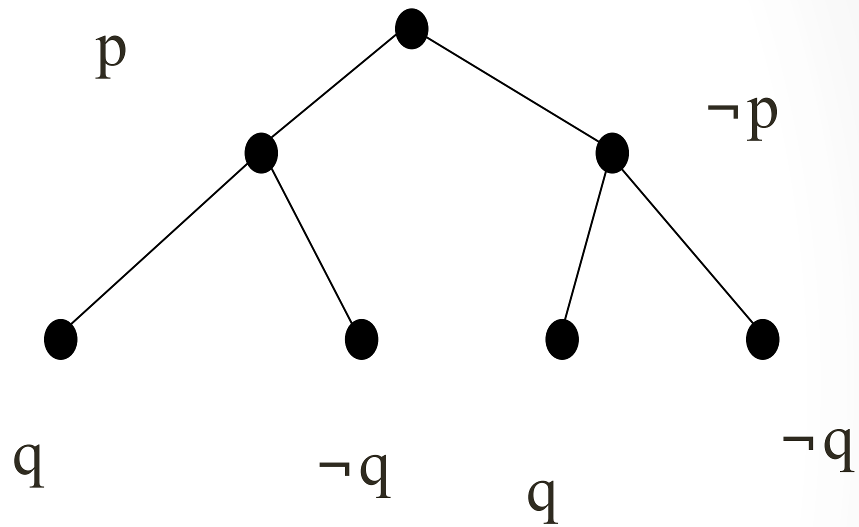
- Zkoušíme, ale všechna možná ohodnocení stejně jako u pravdivostní tabulky, až do té doby než naleznu větev, která vede k výsledku true.

Př. Sestavte sémantický strom formule a rozhodněte o splnitelnosti formule p& (¬q∨¬p)




- Sledování nejlevější větve nám dává hodnotu true pro p.
- Na druhé hladině true pro q.
- Takže tato větev nám dává hodnotu false.

# p&(¬q∨¬p)



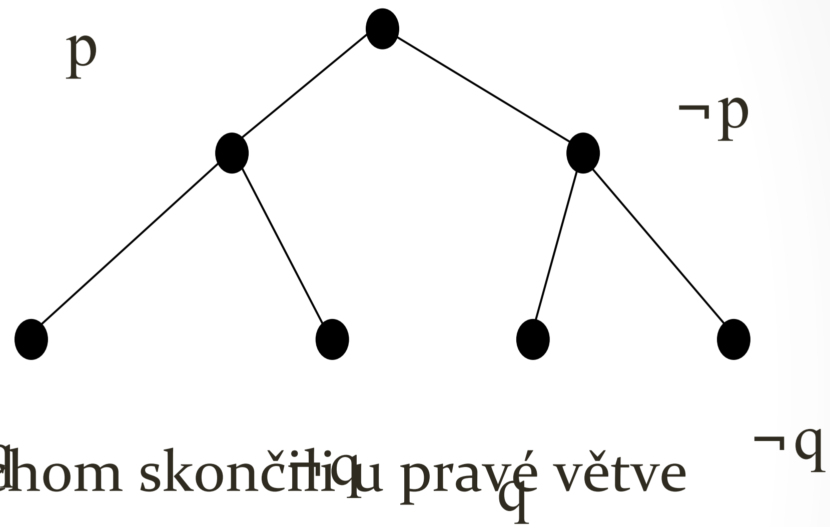

- Další větev pro p true a pro q false.
- Teď dostáváme hodnotu true.
- Dál nemusím pokračovat, daná formule je splnitelná.

- Je daná formule platná?
  - Není,  museli bychom u všech větví dostat true a nebo dokazovat nesplnitelnost formule, která je její negací.

# Quineův algoritmus

- Základní myšlenka: sledování větve sémantické stromu vždy končí tam, kde pokračování v průchodu větví již nevede ke změně výsledné pravdivostní hodnoty.

# p&(¬q∨¬p)

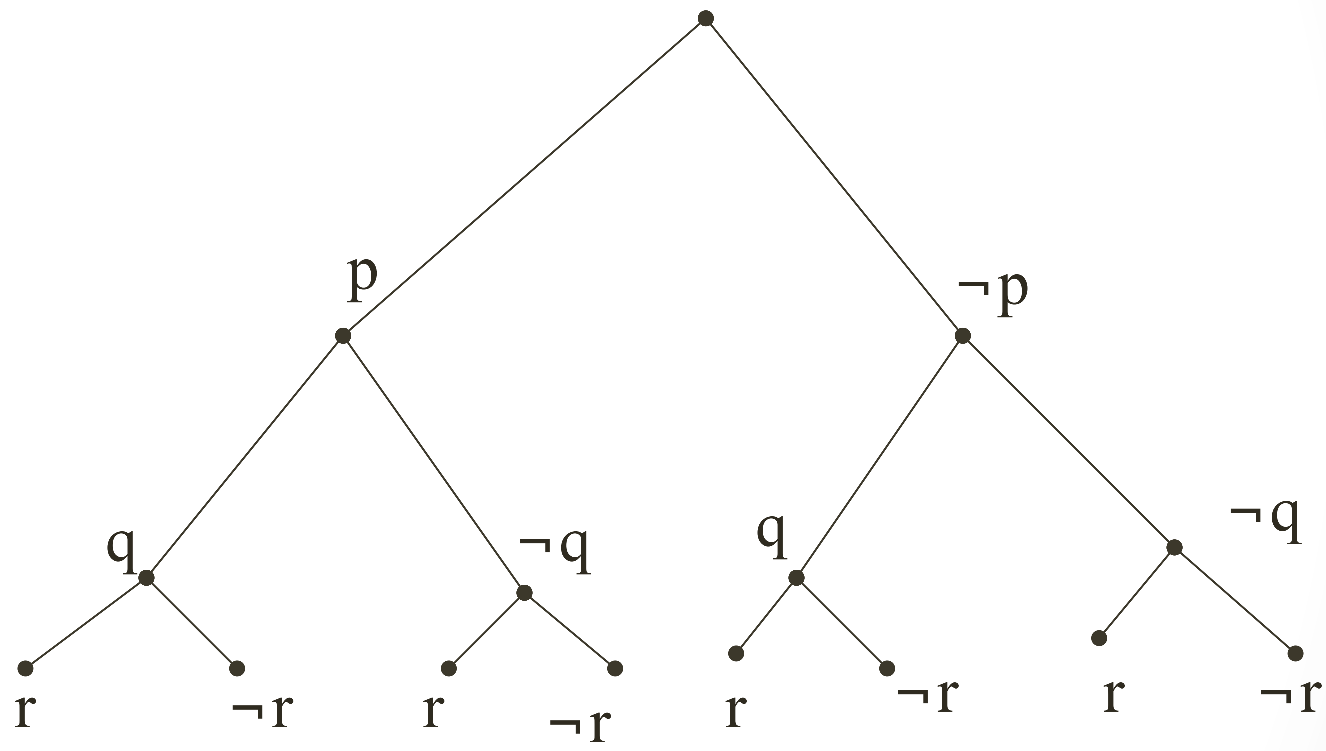



- U předchozího příkladu bychom skončili u pravé větve hned.

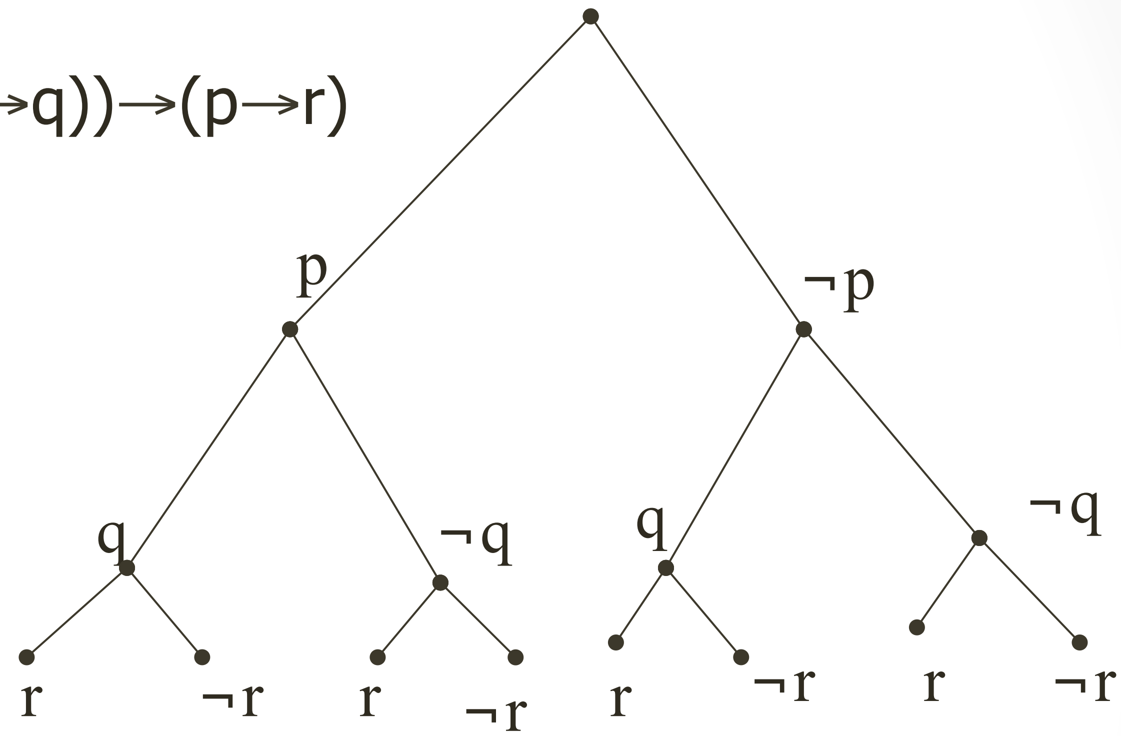
# $(((p \& q) \rightarrow r) \& (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow r)$

- obsahuje tři prvotní proměnné, uspořádání v sémantickém stromě není podstatné.
  - Vezmeme pořadí abecední.

$$(((p\&q)\rightarrow r)\&(p\rightarrow q))\rightarrow(p\rightarrow r)$$

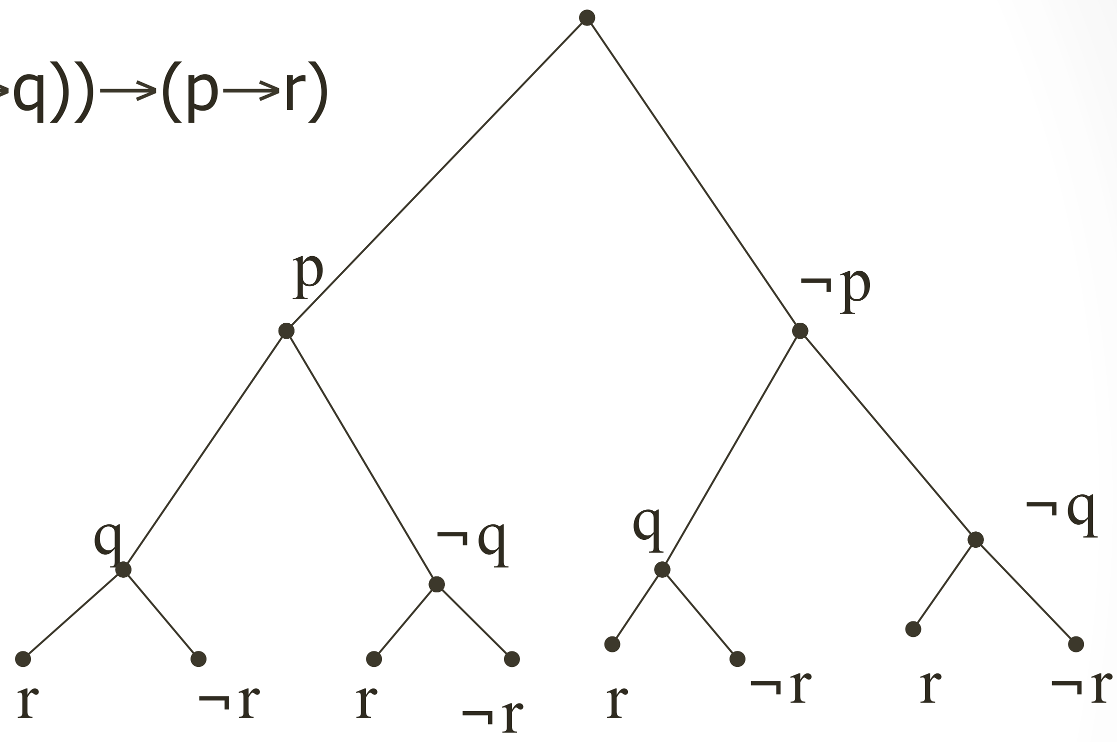


$(((p\&q)\rightarrow r)\&(p\rightarrow q))\rightarrow(p\rightarrow r)$

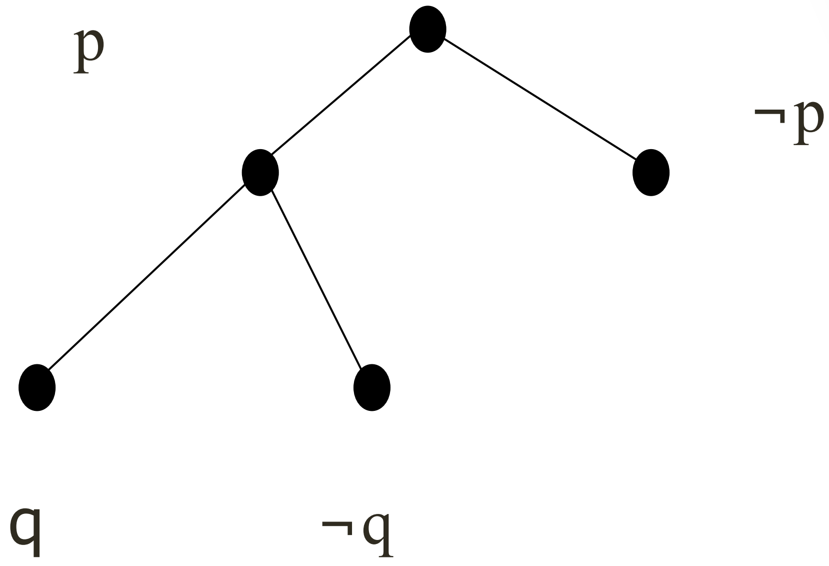



- Při sledování nejlevější větve sémantického stromu formule má p na první hladině true, což vede k redukci původní formule na $((q\rightarrow r)\&q)\rightarrow r$,
- na druhé hladině, kdy i q je true, se formule dále redukuje na $r\rightarrow r$, což je vždy true.

$(((p \& q) \rightarrow r) \& (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow r)$




- Při volbě false pro q vede redukce na druhé hladině k formuli false→r, což je rovněž vždy true.
- Pravá větev, kdy p je false, vede na první hladině k redukci formule ((false→r)&true)→true, která je vždy true bez ohledu na ohdnocení q a r.




- Pokud jsme aplikovali Quineův algoritmus na daný příklad se prohledávání úplného sémantické stromu o třech hladinách zredukovalo na prohledávání neúplného stromu z následujícího obrázku.

# Reductio ad absurdum

- Redukční algoritmus rozhodování platnosti formule je v podstatě jejím nepřímým důkazem.
- Algoritmus je aplikovatelný především na formule obsahující řadu výskytů spojky implikace.

- Dokažte platnost rezolučního principu:

$\underline{\quad a \vee b, \neg b \vee c}$

$a \vee c$

$A = ((a \vee b) \& (\neg b \vee c)) \rightarrow (a \vee c)$

Předpoklad, že výsledek interpretace formule A je nepravdivý, musí tedy platit

$I(A) = \text{false}$

1. $I(((a \vee b) \& (\neg b \vee c))) = \text{true}$
2. $I(a \vee c) = \text{false}$

Analýza $\quad I(a) = \text{false}$

$I(c) = \text{false}$

$I(((a \vee b) \& (\neg b \vee c))) = \text{false}$ ve sporu s 1.

# Tablová metoda

- Je jistou modifikací využití formačního stromu, znázornění postupného rozkladu formule až na její literály.
- Je především vhodná pro formule s hlavní spojkou &, stejně jako spojkou podformulí.
- V případě, že je tam ∨, pomocí de Morganových pravidel, u → a ↔ lépe použít nepřímého důkazu.

$\alpha$ - pravidla (pravidla pro spojku &) obsahuje pravidla přepisu výrokových spojek $\neg$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ vyskytujících se v dané formuli na spojku &.

| $\alpha$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ |
|---|---|---|
| $\neg\neg A$ | $A$ | |
| $A_1 \& A_2$ | $A_1$ | $A_2$ |
| $\neg(A_1 \vee A_2)$ | $\neg A_1$ | $\neg A_2$ |
| $\neg(A_1 \rightarrow A_2)$ | $A_1$ | $\neg A_2$ |
| $\neg(A_1 \leftarrow A_2)$ | $\neg A_1$ | $A_2$ |
| $A_1 \leftrightarrow A_2$ | $A_1 \rightarrow A_2$ | $A_2 \rightarrow A_1$ |

β-pravidla (pravidla pro spojku ∨) obsahuje pravidla přepisu výrokových spojek ¬, &, →, ↔ vyskytujících se v dané formuli na spojku ∨.

| $\beta$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ |
|---|---|---|
| $B_1 \vee B_2$ | $B_1$ | $B_2$ |
| $\neg(B_1 \& B_2)$ | $\neg B_1$ | $\neg B_2$ |
| $B_1 \rightarrow B_2$ | $\neg B_1$ | $B_2$ |
| $B_1 \leftarrow B_2$ | $B_1$ | $\neg B_2$ |
| $\neg(B_1 \leftrightarrow B_2)$ | $\neg(B_1 \rightarrow B_2)$ | $\neg(B_2 \rightarrow B_1)$ |

$(p \vee q) \&$
$(\neg p \& \neg q)$

| | | |
|---|---|---|
| $A_1 \& A_2$ | $A_1$ | $A_2$ |

$p \vee q, \neg p, \neg q$

| | | |
|---|---|---|
| $B_1 \vee B_2$ | $B_1$ | $B_2$ |

$p, \neg p, \neg q$

X

$q, \neg p, \neg q$

X

$p\&(\neg q \vee \neg p)$

| | | |
|---|---|---|
| $A_1\&A_2$ | $A_1$ | $A_2$ |

$p, \neg q \vee \neg p$

| | | |
|---|---|---|
| $B_1 \vee B_2$ | $B_1$ | $B_2$ |

$p, \neg q$      $p, \neg p$

○      X

# Splnitelnost a platnost formule v konjunktivní normální formě

- Převedením formule do její konjunktivní normální formy se problém splnitelnosti formule stane problémem současné splnitelnosti množiny jejich konjunktů (klauzulí).
- Za jednu z nejefektivnějších metod rozhodování splnitelnosti formule v klauzulární (konjunktivní normální) formě je pokládána rezoluční metoda – později.

# Dedukce ve výrokové logici

- Každé ohodnocení proměnných formule A, které vede k její interpretaci hodnotou true, představuje **model formule A.**
- **Model množiny formulí** U představuje každé takové ohodnocení prvotních proměnných vyskytujících se v U, které dává pro všechny formule množiny U výsledek interpretace true.

- Problém rozhodování, zdali určitá formule A vyplývá z množiny formulí U, se nazývá problém dedukce.
- Ve výrokové logice hovoříme o formuli A, vyplývající z množiny formulí U jako (tauto) logickém důsledku U.
  - Množina formulí U je v tomto pojetí speciální množinou předpokladů (speciálních axiómů), na níž je postavena určitá teorie.

- **Formule A je tautologickým důsledkem** množiny U formulí, platí-li pro všechny modely množiny formulí U, že formule A je v nich splněna (true), označujeme U|=A nebo formou zlomku:

$$\frac{U}{A}$$

- Potom teorii lze definovat takto:

  Je dána množina U výchozích formulí – speciálních axiómů (předpokladů) teorie.

- Množinu T(U) se nazývá teorií vybudovanou na U, je-li každý prvek množiny T(U) formulí, která je logickým důsledkem U platí tedy T (U) = {A | U |=A}

- Problém dedukce se většinou formuluje takto, že z množiny hypotéz $\{H_1, H_2, .. H_n\}$ vyplývá závěr Z.
- Množina hypotéz $U = \{H_1, H_2, .. H_n\}$ tedy tvoří speciální axiómy teorie a Z je jejím tautologickým důsledkem:
  - $\{H_1, H_2, .. H_n\} \models Z$.

- Je-li U $\models$Z, hovoříme o platnosti formule Z ve všech modelech množiny formulí U.

- Následující věta nám říká, že problém dedukce lze též vyjádřit jako tautologii:

  $\models (H_1 \& H_2 \& \,..\, \& H_n) \rightarrow Z$

- Věta: Nechť $H_1, H_2, .. H_n$ jsou výrokové formule. Jestliže Z je tautologickým důsledkem množiny formulí $\{H_1, H_2, .. H_n\}$, pak formule $(H_1 \& H_2 \& .. \& H_n) \rightarrow Z$ je tautologie.

- Důkaz: Nepřímý

  Existuje-li ohodnocení takové, že $I((H_1 \& H_2 \& .. \& H_n) \rightarrow Z) \Leftrightarrow false$, pak pro toto ohodnocení musí platit $I(Z) \Leftrightarrow false$ a zároveň $I(H_1 \& H_2 \& .. \& H_n) \Leftrightarrow true$. To však je ve sporu s předpokladem věty.

Př. Ukažte, že formule $y \vee z$ je tautologickým důsledkem formulí $x \vee y$ a $\neg x \vee z$

| x | y | z | x∨y | ¬x∨z | Modely | y∨z | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | - | 0 | |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | - | 1 | |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | M | 1 | * |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | M | 1 | * |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | - | 0 | |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | M | 1 | * |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | - | 1 | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | M | 1 | * |

- Formule y ∨ z je splněna pro všechny modely množiny předpokladů teorie {x∨y, ¬x∨z}. Dané řádky jsou označené hvězdičkou.

- Za množinu předpokladů teorie výrokové logiky lze považovat libovolnou neprázdnou splnitelnou množinu U formulí výrokové logiky. Kdyby tato množina formulí byla nesplnitelná, neměla by model a proto by jejím logickým důsledkem byla libovolná formule ( zároveň i její negace), což by vedlo ke sporné teorii.

Ukažte, zdali z daných předpokladů vyplývá daný závěr:
Když se ohlédl, spatřil ji. Spatřil ji. $\models$ Ohlédl se.

- $o \rightarrow s, s \models o$

| o | s | o→s | Modely | o |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | - | 0 |
| 0 | 1 | 1 | M | 0 |
| 1 | 0 | 0 | - | 1 |
| 1 | 1 | 1 | M | 1 |

- Druhý řádek, množina předpokladů je splněna, ale závěr nikoliv. Z daných předpokladů nevyplývá daný závěr.

# Když se ohlédl, spatřil ji. Nespatřil ji. $\models$ Neohlédl se.

- $o \rightarrow s, \neg s \models \neg o$

| o | s | o→s | ¬s | Modely | ¬o |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | M | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | - | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | - | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | - | 0 |

- Formule je logickým důsledkem předpokladů. Platí, že pro každý model množiny formulí, je formule splněna.

Kdyby jí to neřekl, nikdy by na to nepřišla. Kdyby se nebyla zeptala, nebyl by jí to řekl. Přišla na to. $\models$ Musela se zeptat.

- $\neg r \rightarrow \neg p,\ \neg z \rightarrow \neg r,\ p \models z$

| p | r | z | ¬r | ¬p | ¬z | ¬r→¬p | ¬z→¬r | modely | z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | M | 1 |