Logika

3. Konjunktivní normální formy

RNDr. Luděk Cienciala, Ph. D.

Tato inovace předmětu Úvod do logiky je spolufinancována Evropským sociálním fondem a Státním rozpočtem ČR, projekt č. CZ. 1.07/2.2.00/28.0216, "Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia".

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- **Konjunktivní normální formy formulí**
  - Výroková formule je v konjunktivní normální formě, je-li konjunkcí několika klauzulí(konjunktů) o nichž platí:
    - Každý konjunkt je disjunkcí konečně mnoha literálů
    - V žádném konjunktu se sobě odpovídající pozitivní a negativní literály nevyskytují současně.
    - Úplná konjunktivní normální forma je taková v níž každá klauzule obsahuje literály všech proměnných formule.

- **Úplná elementární konjunkce** (**ÚEK**) dané množiny výrokových symbolů je elementární konjunkce, ve které se každý symbol z dané množiny vyskytuje právě jednou (buďto prostě nebo negovaný).
- **Konjunktivní normální forma** (**KNF**) dané formule je formule ekvivalentní s danou formulí a mající tvar konjunkce elementárních disjunkcí.

- **Úplná konjunktivní normální forma** (**UKNF**) dané formule je formule ekvivalentní s danou formulí a mající tvar konjunkce úplných elementárních disjunkcí.
- ÚDNF a UKNF dané formule nazýváme **kanonickými (standardním) tvary** této formule.

Najděte normální úplnou konjunktivní formu formule $(\neg a \to c) \to (b \& (\neg c \to a))$

- Začátek stejný, jako bychom hledali úplnou disjunktivní normální formu, ale ne dané formule, ale její negace, nalezneme ji a pak opět znegujeme a využitím De Morganových pravidel převedeme do úplné konjunktivní normální formy formule původní.

Najděte normální úplnou konjunktivní formu formule
$(\neg a \rightarrow c) \rightarrow (b \& (\neg c \rightarrow a))$

			X	Y	Z		
a	b	c	$\neg a \rightarrow c$	$\neg c \rightarrow a$	b&Y	$X \rightarrow Z$	$\neg(X \rightarrow Z)$
0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	0

úplná disjunktivní normální forma je (¬a&¬b&c)v(a&¬b&¬c)v(a&¬b&c)Její negace (avbv¬c)&(¬avbvc)&(¬avbv¬c) = UKNF

			X	Y	Z		
a	b	c	¬a→c	¬c→a	b&Y	X→Z	¬(X→Z)
0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	0

Lze zjednodušit

- $(a \lor \mathbf{b} \lor \neg c) \& (\neg a \lor \mathbf{b} \lor c) \& (\neg a \lor \mathbf{b} \lor \neg c)$
- $((a \lor \neg c) \& (\mathbf{\neg a} \lor c) \& (\mathbf{\neg a} \lor \neg c)) \lor \mathbf{b}$
- $((a \lor \neg c) \& (\mathbf{\neg a} \lor (\mathbf{c \& \neg c}))) \lor b$
- $((a \lor \neg c) \& (\neg a \lor \mathbf{false})) \lor b$
- $((\mathbf{a} \lor \neg c) \& \mathbf{\neg a})) \lor b$
- $((\mathbf{a \& \neg a}) \lor (\neg c \& \neg a)) \lor b$
- $(\mathrm{false} \lor (\mathbf{\neg c} \& \neg a)) \lor \mathbf{b}$
- $(\neg c \lor b) \& (\neg a \lor b)$

- To vše lze provést přímo úpravami, tj náhradou výrokových spojek jinými spojkami, odpovídajícími této formě.
- Postup:
  - Přepis spojky $\leftrightarrow$ spojkami $\rightarrow$ a &
    $| = (X \leftrightarrow Y) \Leftrightarrow (X \rightarrow Y) \& (Y \rightarrow X)$
  - Přepis spojky $\rightarrow$ podle $| = (X \rightarrow Y) \Leftrightarrow (\neg X \vee Y)$
  - Použití dle potřeby De Morganových pravidel a pravidel distributivity.

Zadání:$(a \vee b) \rightarrow (a \& \neg b)$ - DNF

- implikaci vyjádříme jako disjunkci předpokladu a závěru
  $\neg(a \vee b) \vee (a \& \neg b)$
- použijeme de Morganův zákon pro disjunkci
  $(\neg a \& \neg b) \vee (a \& \neg b)$

Zadání: $(\neg a \rightarrow c) \rightarrow (b \& (\neg c \rightarrow a))$ - KNF

$\neg(a \lor c) \lor (b \& (c \lor a))$

$(\neg a \& \neg c) \lor (b \& (c \lor a))$

$((\neg a \& \neg c) \lor b) \& ((\neg a \& \neg c) \lor (c \lor a))$

$((\neg a \& \neg c) \lor b) \& (\neg(a \lor c) \lor (c \lor a))$

$((\neg a \& \neg c) \lor b) \& true$

$(\neg a \lor b) \& (\neg c \lor b)$

- **Věta:**

1. Každou formuli, která není kontradikcí, lze vyjádřit ve tvaru UDNF.
2. Každou formuli, která není tautologií, lze vyjádřit ve tvaru UKNF.

- **Důkaz:**

  Důkaz je konstruktivní - ukážeme, jak se požadované tvary naleznou.

- **Definice:**

  Soustava pravdivostních funkcí je ***funkcionálně úplná***, jestliže jejich superpozicí (skládáním) lze vytvořit libovolnou pravdivostní funkci o libovolném počtu argumentů.
- **Věta:**

  Následující soustavy pravdivostních funkcí jsou funkcionálně úplné:

  1. pravdivostní funkce příslušející funktorům {¬, &, ∨},
  2. pravdivostní funkce příslušející funktorům {¬, &} nebo {¬, ∨},
  3. pravdivostní funkce příslušející funktorům {¬, →},

- Množina spojek {&, v} není úplná.

- Alchymista je zavřen ve vězení, protože se mu stále nedaří přeměna olova ve zlato. Dostane pět motáků, z nichž první čtyři obsahují následující výroky:
  p – Podaří se ti přeměna olova ve zlato
  q – 1.4. bude tvůj švagr jmenován prokurátorem
  r – Po 1.4. bude soud.
  První moták zní: $p \wedge q \wedge r$
  Druhý moták zní: $p \wedge q \wedge \neg r$
  Třetí moták zní: $\neg p \wedge \neg q \wedge r$
  Čtvrtý moták zní: $\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$
  Pátý moták zní: Alespoň jeden z předchozích motáků je pravdivý.
  Otázka: Co se vlastně nebohý alchymista dověděl?

- $(p \mathbin{\&} q \mathbin{\&} r) \vee (p \mathbin{\&} q \mathbin{\&} \neg r) \vee (\neg p \mathbin{\&} \neg q \mathbin{\&} r) \vee (\neg p \mathbin{\&} \neg q \mathbin{\&} \neg r)$.
- Máme tedy nalézt formuli, k níž je tato UDNF ekvivalentní.
- Dostaneme:

  $(p \mathbin{\&} q \mathbin{\&} r) \vee (p \mathbin{\&} q \mathbin{\&} \neg r) \vee (\neg p \mathbin{\&} \neg q \mathbin{\&} r) \vee (\neg p \mathbin{\&} \neg q \mathbin{\&} \neg r)$
  $\Leftrightarrow (p \mathbin{\&} q) \mathbin{\&} (r \vee \neg r) \vee (\neg p \mathbin{\&} \neg q) \mathbin{\&} (r \vee \neg r) \Leftrightarrow$

  $(p \mathbin{\&} q) \vee (\neg p \mathbin{\&} \neg q) \Leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$
- <u>Odpověď</u>: Podaří se ti přeměna olova ve zlato tehdy a jen tehdy, když bude 1.4. tvůj švagr jmenován prokurátorem.