Logika

2. Výroková logika

RNDr. Luděk Cienciala, Ph. D.

Tato inovace předmětu Úvod do logiky je spolufinancována Evropským sociálním fondem a Státním rozpočtem ČR, projekt č. CZ. 1.07/2.2.00/28.0216, "Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia".

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

alternativní značení spojek:

Symbol pro spojku	Alternativní Symboly
&	$\wedge$
$\rightarrow$	$\supset$, $\Rightarrow$
$\leftrightarrow$	$\equiv$, $\Leftrightarrow$

Konvence

- Složenou formuli nejvyššího řádu netřeba závorkovat.
- Logické spojky uspořádáme do prioritní stupnice ¬, &, ∨, →, ↔.
  - Ze dvou funktorů váže silněji ten, který je v uvedené stupnici umístěn více vlevo.
  - Tuto konvenci však příliš ”nezneužíváme” a závorky raději použijeme vždy, když chceme vyznačit strukturu formule.
  - V případě, že o prioritě vyhodnocení nerozhodnou ani závorky ani prioritní stupnice, vyhodnocujeme formuli zleva doprava.

- např. formuli $p \rightarrow q \rightarrow r \rightarrow s$ vyhodnocujeme tak, jakoby byla zapsána $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow s$.

- U vícečlenných konjunkcí nebo disjunkcí není třeba (vzhledem k jejich asociativitě – viz dále) uvádět závorky,
  - např. místo $(p \vee q) \vee r$ nebo $p \vee (q \vee r)$ lze psát pouze $p \vee q \vee r$. Tato konvence souvisí s předchozí konvencí
    - na pořadí vyhodnocování nezáleží a tedy lze standardně vyhodnocovat zleva doprava

- Maximální počet do sebe vnořených závorkových dvojic (,) vyskytujících se ve formuli udává **/hierarchický/ řád formule**.

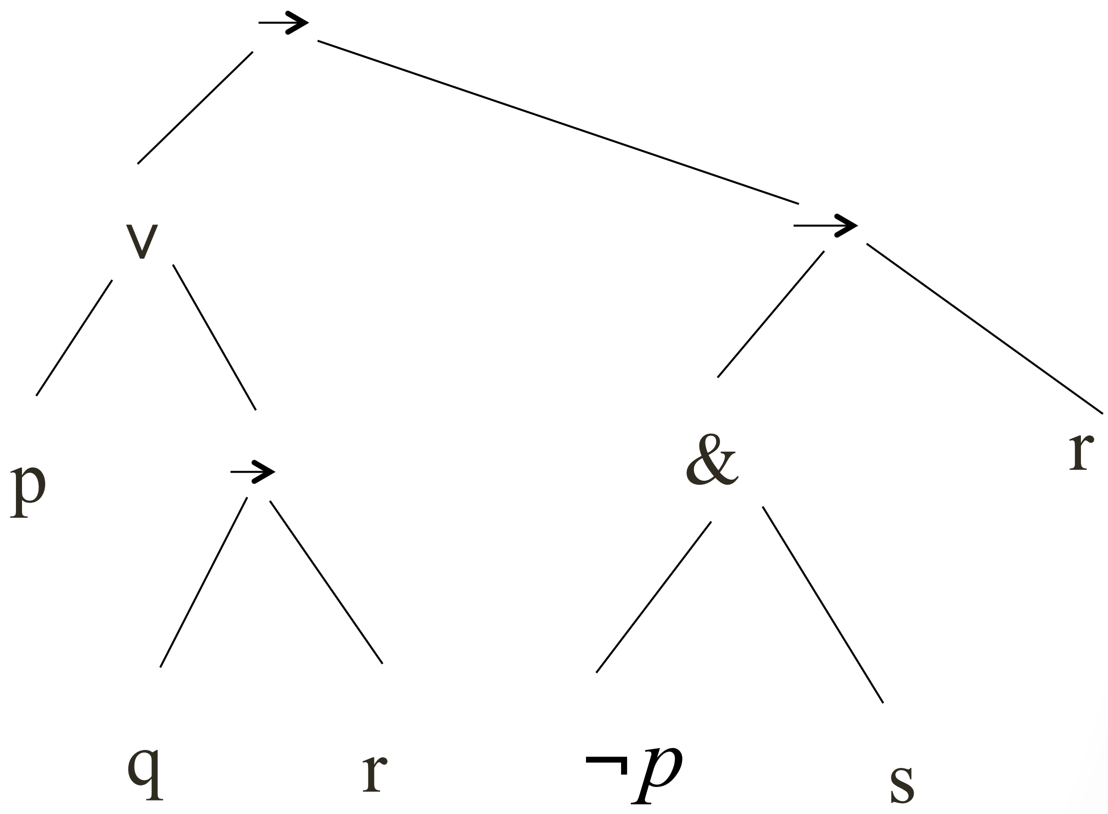
- V prvém sloupci je zobrazen postup konstrukce složené formule striktně podle definice
- V druhém s maximálním využitím konvencí šetřících závorky.
- V třetím sloupci je uveden hierarchický řád formulí uvedených v daném řádku.

Podle definice	S využitím konvencí	Hier.řád
p, q	p, q	0
$(\neg p)$, $(\neg q)$, $(p \,\&\, q)$	$\neg p$, $\neg q$, $p \,\&\, q$	1
$((\neg p) \vee (\neg q))$, $(\neg (p \,\&\, q))$	$\neg p \vee \neg q$, $\neg (p \,\&\, q)$	2
$(((\neg p) \vee (\neg q)) \leftrightarrow (\neg (p \,\&\, q)))$	$\neg p \vee \neg q \leftrightarrow \neg (p \,\&\, q)$	3

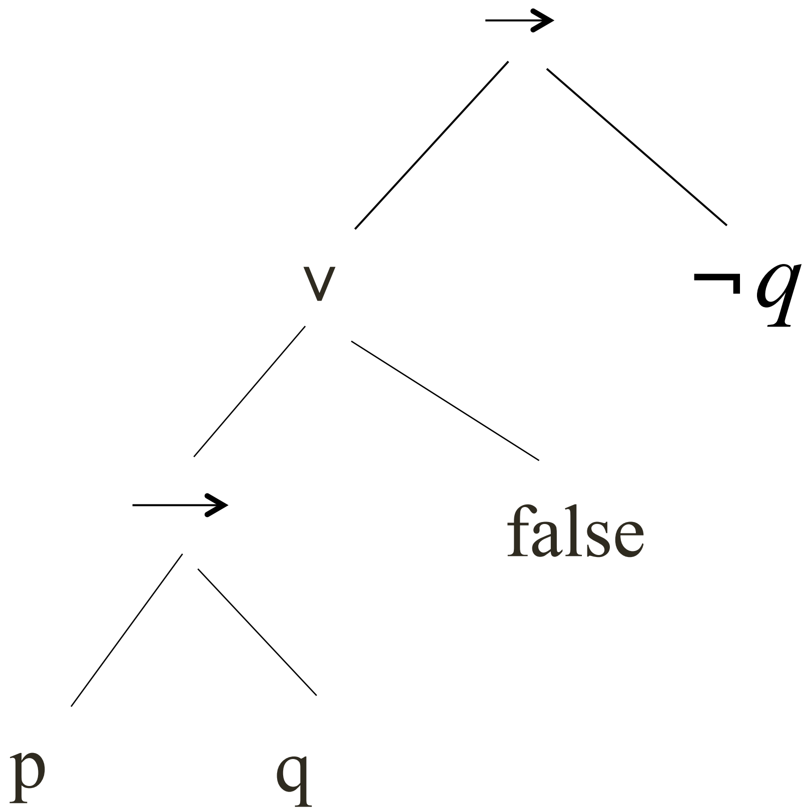
- Podformule definujeme jakou souvislou část formule, která je sama formulí. Každá formule je svou podformulí.
- Chceme-li hovořit o podformulích, které jsou různé od původní formule, používáme termín vlastní podformule.

- Konstrukci formule lze vyjádřit i graficky pomocí tzv. **formačního stromu formule**.

$$\left(p \vee \left(q \rightarrow r\right)\right) \rightarrow \left(\left(\neg p \wedge s\right) \rightarrow r\right)$$



Sestavte formuli z jejího formačního stromu:



$$((p \to q) \vee false) \to \neg q$$

- **Denotační sémantika** – stanoveno, jakým způsobem se jednotlivé prvky jazyka výrokové logiky interpretují – pravidla interpretace dobře utvořené formule.
- Oborem sémantické interpretace výrokové logiky je M = {true, false} – **sémantická doména**.

- **Pravdivostní ohodnocení (valuace) výrokových symbolů** je zobrazení *v*, které ke každému výrokovému symbolu přiřazuje pravdivostní hodnotu, tj. hodnotu z množiny {1,0}, která kóduje množinu {pravda, nepravda}.
- Pravdivostní ohodnocení všech výrokových symbolů jazyka definuje **model jazyka výrokové logiky**.

- **Pravdivostní funkce formule výrokové logiky** je funkce *w*, která ke každému pravdivostnímu ohodnocení výrokových symbolů přiřazuje pravdivostní hodnotu celé formule.

- Pravdivostní hodnota elementární formule je rovna pravdivostní hodnotě výrokového symbolu, tj.

  $w(\mathrm{p})_v = v(\mathrm{p})$ pro všechny výrokové proměnné p.

Jsou-li dány pravdivostní funkce formulí A, B :

A	B	$\neg A$	A & B	A v B	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Tabulková metoda interpretace formule

- nejjednodušší, je použitelná jen pro málo složité formule.

Interpretujte tabulkovou metodou formuli

$$\left(\left(p \vee q\right) \rightarrow true\right) \ \& \neg q$$

$$\left(\left(p \vee q\right) \rightarrow true\right) \& \neg q$$

		X	Y		
p	q	p ∨ q	X→ true	¬q	Y&¬q
0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0

Jaká bude pravdivost následujícího složeného výroku:

- Gen je biologická struktura nebo na Marsu je život.
  - První výrok je pravdivý, je i výsledný složený výrok pravdivý.

- Je-li formule A vytvořena z k různých výrokových symbolů, pak existuje celkem 2^k různých ohodnocení (valuací) v formule A.
- Každé ohodnocení v výrokových symbolů obsažených ve formuli A, pro které je hodnota pravdivostní funkce rovna 1, tedy $w(A)_v = 1$, se nazývá **model** této **formule**.

- *Formule* A výrokové logiky je **splnitelná**, je-li w(A)v = 1 pro nějaké ohodnocení v, neboli existuje aspoň jeden model formule A.

- Formule A výrokové logiky je **tautologií /logickým zákonem/**, je-li $w(A)_v = 1$ pro všechna ohodnocení *v*, neboli každé ohodnocení je modelem formule A.
- Skutečnost, že formule A je tautologií, označujeme zápisem $|= A$.

- Formule A výrokové logiky je **kontradikcí**, jestliže neexistuje takové ohodnocení výrokových symbolů, pro které by hodnota pravdivostní funkce formule A byla rovna 1, tj. $w(A)_v = 0$ pro všechna ohodnocení v, formule nemá model.

- Množina formulí *M* je **splnitelná**, jestliže existuje valuace *v* taková, že $w(A)_v = 1$ pro každou formuli $A \in M$. Takové ohodnocení *v* se pak nazývá **model množiny M.**
- Formule *A* **výrokově logicky vyplývá** z množiny formulí *M*, značíme $M \models A$, jestliže *A* je pravdivá v každém modelu množiny *M*.

Vyznačte, které z následujících formulí jsou kontradikce:

a) $\neg\neg(A \vee \neg B) \rightarrow (A \& \neg B)$
b) $A \& \neg A$
c) $A \vee \neg A$

- Odpověď: b)

Zjistěte, zda množina formulí $M = \{p \rightarrow r, q \rightarrow r, p \vee q\}$ je splnitelná:

p	q	r	$p \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$p \vee q$
1	1	1	**1**	**1**	**1**
1	1	0	0	0	1
1	0	1	**1**	**1**	**1**
1	0	0	0	1	1
0	1	1	**1**	**1**	**1**
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0
0	0	0	1	1	0

- Daná množina *M* je splnitelná a jejími modely jsou ohodnocení odpovídající 1., 3. a 5. řádku. Dále z tabulky vidíme, že z množiny *M* logicky vyplývá formule r. Pro každý model této množiny je r pravdivá.
- $p \rightarrow r, q \rightarrow r, p \vee q \models r$

některé důležité tautologie výrokové logiky

- Tautologie s jediným výrokovým symbolem:
  - $\models p \leftrightarrow p$
  - $\models p \vee \neg p$ zákon vyloučeného třetího
  - $\models \neg(p \,\&\, \neg p)$ zákon sporu
  - $\models p \leftrightarrow \neg\neg p$ zákon dvojí negace

- Algebraické zákony:
  - $\models (p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$ komutativní zákon pro ∨
  - $\models (p \mathbin{\&} q) \leftrightarrow (q \mathbin{\&} p)$ komutativní zákon pro &
  - $\models (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$ komutativní zákon pro ↔
  - $\models (p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ asociativní zákon pro ∨
  - $\models (p \mathbin{\&} q) \mathbin{\&} r \leftrightarrow p \mathbin{\&} (q \mathbin{\&} r)$ asociativní zákon pro &
  - $\models ((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r) \leftrightarrow (p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r))$ asociativní zákon pro ↔
  - $\models (p \vee q) \mathbin{\&} r \leftrightarrow (p \mathbin{\&} r) \vee (q \mathbin{\&} r)$ distributivní zákon pro &,∨
  - $\models (p \mathbin{\&} q) \vee r \leftrightarrow (p \vee r) \mathbin{\&} (q \vee r)$ distributivní zákon pro ∨, &

- Zákony pro implikaci:
  - $\models p \rightarrow (q \rightarrow p)$ zákon simplifikace
  - $\models (p \,\&\, \neg p) \rightarrow q$ zákon Dunse Scota
  - $\models (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ zákon kontrapozice
  - $\models (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \leftrightarrow ((p\&q) \rightarrow r)$ spojování předpokladů
  - $\models (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \leftrightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$ na pořadí předpokladů nezáleží
  - $\models (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$ hypotetický sylogismus
  - $\models ((p \rightarrow q) \,\&\, (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ tranzitivita implikace
  - $\models (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$Fregův zákon
  - $\models (\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$ reductio ad absurdum
  - $\models ((p \rightarrow q) \,\&\, (p \rightarrow \neg q)) \rightarrow \neg p$ reductio ad absurdum
  - $\models (p\&q) \rightarrow p$, $\models (p\&q) \rightarrow q$
  - $\models p \rightarrow (p \vee q)$, $\models q \rightarrow (p \vee q)$

- Zákony pro vzájemné převody funktorů:
  - $\models$ $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \ \& \ (q \rightarrow p)$
  - $\models$ $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \ \& \ q) \vee (\neg q \ \& \ \neg p)$
  - $\models$ $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
  - $\models$ $\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \ \& \ \neg q)$ Negace implikace
  - $\models$ $\neg(p \ \& \ q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ De Morganovy zákony
  - $\models$ $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \ \& \ \neg q)$ De Morganovy zákony

Věta o substituci

Nechť A je tautologie výrokové logiky utvořená z výrokových symbolů $p_1, p_2,\ldots,p_n$. Nechť formule B vznikne z tautologie A simultánním nahrazením výrokových symbolů $p_1, p_2,\ldots,p_n$ formulemi $A_1,A_2,\ldots,A_n$ (tj. substitucemi A_i za p_i pro $i = 1, 2,\ldots,n$). Potom formule B je rovněž tautologií.

Důkaz:

Uvažujme libovolné pravdivostní ohodnocení výrokových symbolů obsažených ve formuli B a nechť při tomto ohodnocení mají formule $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pravdivostní hodnoty $h_1, h_2, \ldots, h_n$. Udělíme-li tyto hodnoty výrokovým symbolům $p_1, p_2, \ldots, p_n$ formule A, budou mít formule A i B stejnou pravdivostní hodnotu. Vzhledem k tomu, že A je tautologie, bude tato pravdivostní hodnota vždy 1.

- Věta o substituci umožňuje vytvořit k dané tautologii neomezeně mnoho dalších tautologií, které mají s danou výchozí tautologií společný tvar.
- Nahradíme-li v tautologii výrokové symboly p, q, r,… metasymboly A, B, C,… dostaneme z konkrétní výchozí tautologie **schéma tautologií** daného tvaru.
- Např. z tautologie $(p \wedge q) \rightarrow p$ získáme tautologické schéma $(A \,\&\, B) \rightarrow A$

  $(p \,\&\, q) \rightarrow p$

  $(q \,\&\, q) \rightarrow q$, $(\neg p \,\&\, q) \rightarrow \neg p$,

  $[(p \leftrightarrow r) \,\&\, \neg q] \rightarrow (p \leftrightarrow r)$ atd.

Ekvivalence výrokových formulí

- Formule A, B jsou ekvivalentní (označujeme $A \Leftrightarrow B$), nejsou-li od sebe odlišitelné pomocí žádného ohodnocení prvotních proměnných obsažených v obou formulích, tj. dávají-li jejich interpretace při odpovídajícím ohodnocení prvotních proměnných stejné pravdivostní hodnoty.

Rozhodněte, které dvojice formulí jsou ekvivalentní. (důvod)

- $\neg\neg\neg(A \vee B)$, $\neg\neg(\neg A \& \neg B)$ ano(de Morganův zákon pro disjunkci)
- $\neg(\neg(A \& B))$, $\neg(\neg A \vee \neg B)$ ano(de Morganův zákon pro konjunkci)
- $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$, $((A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A))$ ne (první formule je tautologie, zatímco druhá nikoli)

Nechť A, B jsou formule výrokové logiky. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

a) Když A je tautologie, tak $\neg A$ je kontradikce.
b) Když A není splnitelná, tak $\neg A$ je tautologie.
c) Když A je kontradikce a B je tautologie, tak $A \vee B$ je tautologie.
d) Když $\neg A$ není splnitelná, tak A je kontradikce.

- Odpověď: a, b, c.

- **Literál** je výrokový symbol nebo jeho negace.
- **Elementární konjunkce** (EK) je konjunkce literálů.
- **Elementární disjunkce** (ED) je disjunkce literálů.

Normální formy výrokových formulí

- **Disjunktní normální formy formulí**
  - Disjunktivní normální forma obsahuje jen spojky negace, konjunkce a disjunkce.

- Výroková formule je v disjunktní normální formě, je-li disjunkcí několika podformulí (disjunktů) o nichž platí:
  - Každý disjunkt je konjukcí konečně mnoha literálů (prvotních proměnných nebo jejich negací)
  - V žádném disjunktu se sobě odpovídající pozitivní a negativní literály nevyskytují současně.

- Úplná disjunktivní normální forma je taková, v níž každý disjunkt obsahuje literály všech proměnných formule.
- Např. $a\&(b\vee\neg(\neg c\rightarrow a))$ je úplná disjunktivní normální forma následující formule $(a\&b\&\neg c)\vee(a\&b\&c)$

- **Úplná elementární disjunkce** (**ÚED**) dané množiny výrokových symbolů je elementární disjunkce, ve které se každý symbol z dané množiny vyskytuje právě jednou (buďto prostě nebo negovaný).
- **Disjunktivní normální forma** (**DNF**) dané formule je formule ekvivalentní s danou formulí a mající tvar disjunkce elementárních konjunkcí.

- **Úplná disjunktivní normální forma** (UDNF) dané formule je formule ekvivalentní s danou formulí a mající tvar disjunkce úplných elementárních konjunkcí.

Převeďte do úplné disjunktivní normální formy (a→b)∨(¬a&c)

(¬a&¬b&¬c)∨(¬a&¬b&c)∨(¬a&b&¬c)∨((¬a&b&c)∨(a&b&¬c)∨(a&b&c)

				X	Y	
a	b	c	¬a	a→b	¬a&c	X∨Y
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	1	0	1

- Každá výroková formule, která není kontradikcí, je ekvivalentní jisté formuli v disjunktivní normální formě.
- Dvě úplné disjunktivní normální formy téže formule se mohou lišit nejvýše pořadím složek v téže disjunkci nebo konjunkci.
- Disjunktivní normální forma kontradikce je prázdná disjunkce.