

Logika

1. Úvod, Výroková logika

RNDr. Luděk Cienciala, Ph. D.

Tato inovace předmětu Úvod do logiky je spolufinancována Evropským sociálním fondem a Státním rozpočtem ČR, projekt č. CZ.1.07/2.2.00/28.0216, “Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia”.



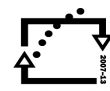
evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

- **Logika** se pokouší k objektům a pochodům lidského myšlení vytvořit adekvátní model pomocí určitých sobě vlastních prostředků. (stejně jako matematika nebo matematická informatika.)
- Model se vytváří na základě určitého zjednodušení (abstrakce) modelované reality, a to tak, aby vněm bylo obsaženo to nejdůležitější.

- Za zakladatele logiky a to logiky formální je považován Aristotelés.

- Formální logika je nejstarší pokus o modelování a modelové zkoumání zákonitostí vnímání a usuzování.
- Jde o logiku založenou na dvouhodnotové interpretaci pojmu pravdivosti. Tvrzení může být buď pravdivé nebo nepravdivé.

- Logika je především věda o správném usuzování, o umění správné argumentace.

- Obecně můžeme úsudek charakterizovat následujícím schématem:

Na základě pravdivosti výroků (soudů, tvrzení) $V_1, \dots, V_n$ soudím, že je pravdivý rovněž výrok V .

- předpoklady = premisy

- Různé druhy úsudků - ne všemi se zabývá logika.

Obecně se nezabývá tzv. pravděpodobnostními úsudky:

Slunce doposud vyšlo každý den.

Tedy: Slunce (pravděpodobně) vyjde i zítra.

Nezabývá se úsudky generalizací:

Všechny labutě, které jsme dosud viděli, jsou bílé.
Tedy: Všechny labutě jsou bílé.

Budeme se zabývat tzv. deduktivními úsudky:

- Definice: (logické vyplývání): Úsudek $P_1, \dots, P_n/Z$ je deduktivně správný (platný), značíme $P_1, \dots, P_n \models Z$, jestliže závěr Z logicky vyplývá z předpokladů $P_1, \dots, P_n$, tj. za všech okolností takových že jsou pravdivé všechny předpoklady $P_1, \dots, P_n$ je (za těchto okolností) pravdivý i závěr Z .

- Tedy jinými slovy: Za žádných okolností, nikdy se nemůže stát, aby byly všechny předpoklady $P_1, \dots, P_n$ pravdivé a zároveň závěr Z byl nepravdivý.

- Deduktivní usuzování v praktickém životě všichni více či méně používáme.
- Např. Víme, že všechny muchomůrky zelené jsou prudce jedovaté a zjistíme (např. za pomoci atlasu hub), že houba, kterou jsme našli, je muchomůrka zelená, pak jistě nebudeme tuto houbu ochutnávat a spolehne se na logiku, neboť to nám zaručuje, že houba, kterou jsme našli, je prudce jedovatá.

Příklady jednoduchých, správných deduktivních úsudků:

- ♦ Všechny kovy se teplem roztahují. Měď je kov.
Měď se teplem roztahuje.
- ♦ Je doma nebo odešel do kavárny. Je-li doma, pak nás očekává.
Jestliže nás neočekává, pak odešel do kavárny.
- ♦ Všechny muchomůrky zelené jsou prudce jedovaté. Tato tužka je muchomůrka zelená.
Tato tužka je prudce jedovatá.
- ♦ Všichni muži mají rádi fotbal a pivo. Někteří milovníci piva nemají rádi fotbal. Pepa má rád pouze milovníky fotbalu a piva.
Některé ženy nemá Pepa rád.

- Logika také zkoumá skladbu – konstrukci jednotlivých složených výrazů (soudů) z jejich podvýrazů.
- Jednou z disciplín logiky je proto rovněž tzv. logická analýza jazyka - spočívá v nalezení příslušné logické konstrukce vyjádřené daným výrazem.

- Ovšem ne všechny deduktivně správné úsudky můžeme ověřit pomocí daného logického systému.
- Proto hovoříme o expresivní síle logického systému, která je dána tím, do jaké míry podrobnosti můžeme analyzovat jednotlivé výrazy.

- Ideální logický systém by nám měl umožnit analyzovat premisy do takové hloubky, abychom mohli odvodit všechny závěry, které z těchto premis logicky vyplývají a ověřit všechny správné úsudky.

Příklady logických systémů podle jejich expresivní síly:

- ♦ Výroková logika umožňuje analyzovat pouze do úrovně elementárních výroků, jejichž strukturu již dále nezkoumá.
- ♦ Predikátová logika 1. řádu umožňuje analyzovat elementární výroky do úrovně vlastností jednotlivých objektů zájmu (tzv. individuí – prvků univerza diskursu) a jejich vztahů.
- ♦ Predikátové logiky vyšších řádů umožňují navíc analyzovat vlastnosti vlastností, vlastností funkcí, atd.

Vlastnosti deduktivních úsudků:

- Ověříme-li správnost (platnost) úsudku, nedokážeme tím pravdivost závěru!

1. Platný úsudek může mít nepravdivý závěr.

- Je doma nebo odešel do kavárny. Je-li doma, pak nás očekává.
Jestliže nás neočekává, pak odešel do kavárny.
 - Správnost úsudku nedokazuje, že dotyčný je v kavárně, jestliže nás neočekává, klidně mohl jít třeba do kina
 - V tom případě by ovšem zřejmě nebyla pravdivá první premisa.
 - To neznamena, že platný úsudek, jehož závěr není pravdivý, by byl bezcenný.

- Vždyť takovýto způsob běžně používáme, chceme-li demonstrovat, že někdo neříká pravdu.
- Představme si následující dialog:
 - Vy tedy tvrdíte, že $X_1, \dots, X_n$.
 - Avšak z vašich tvrzení plyne, že A.
 - Z A dále plyne, že B atd. až dostaneme závěr Z, který je evidentně nepravdivý.
 - Tedy vy tvrdíte Z, což není pravda.
 - Proto alespoň jedno z vašich původních tvrzení X_i není pravdivé.

2. Monotónnost: Jestliže $P_1, \dots, P_n \models Z$, pak $P_1, \dots, P_n, P_{n+1} \models Z$, pro libovolnou další premisu P_{n+1} . Tuto vlastnost nemají jiné úsudky, které nejsou deduktivní.

3. Tranzitivita: Jestliže $P_1, \dots, P_n \models Z$ a $Q_1, \dots, Q_m, Z \models Z'$,
pak $P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_m \models Z'$.

4. Reflexivita: Je-li B rovna jedné z premis $P_1, \dots, P_n$, pak $P_1, \dots, P_n \models B$.

Definice analytická pravdivost, kontradikce:

- Výrok V je analyticky pravdivý, značíme $\models V$, je-li pravdivý za všech okolností, vždy. (Množina předpokladů je prázdná, V nemůže být nepravdivý.)
- Množina $\{P_1, \dots, P_n\}$ výroků je sporná (kontradiktorní, nesplnitelná) jestliže nemůže nikdy za každých okolností nastat případ, že by byly všechny $P_1, \dots, P_n$ pravdivé, značíme $P_1, \dots, P_n \models$ (Tedy z této množiny logicky vyplývá jakýkoli výrok, i nepravdivý, proto musí být vždy alespoň jeden P_i nepravdivý)

5. Ze sporné množiny předpokladů vyplývá jakýkoli závěr.

- Všechny pravdivé matematické výroky jsou analyticky pravdivé.

- Matematikové formulují a **dokazují** tvrzení. Výsledkem jejich práce je tedy zpravidla (ne-li vždy) nalezení nějakého důkazu. Avšak důkazy a jejich analýza je to, co zajímá logiky, důkaz je rovněž jedním z nejdůležitějších logických pojmů.

Co je to důkaz?

- Obecně řečeno, **důkaz tvrzení A z předpokladů $P_1, \dots, P_n$** je posloupnost tvrzení $B_1, \dots, B_m$ taková, že:
 - $B_m = A$
 - pro každé $i \leq m$ platí, že B_i je buď
jeden z předpokladů P_j nebo B_i vznikne z předchozích $B_1, \dots, B_{i-1}$ uplatněním nějakého **odvozovacího pravidla**.

I. Výroková logika

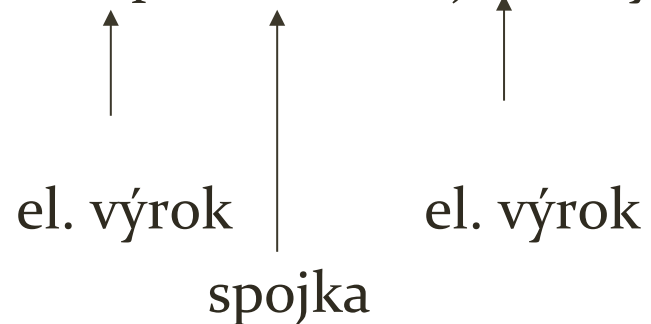
- **Výrok** - jazykový výraz, o němž má smysl prohlásit, zda je pravdivý či nepravdivý.

- Ne každá věta vyjadřuje výrok. Např. věta *Český král je holohlavý* nemůže být v současné době (kdy neexistuje český král) ani pravdivá, ani nepravdivá. Kdyby totiž nastal jeden z těchto případů, vyplývala by z ní existence českého krále!

- Výroky:
 - Jednoduché (elementární, atomické):
 - nejde dále rozložit na výroky jednodušší.
 - tvrzení, jehož žádná vlastní část již není výrokem
 - Složené:
 - má vlastní části – výroky.

- Složené výroky.

V Praze prší a v Brně je hezky.



- *Není pravda, že v Praze prší.*



- Množina všech atomických výroků o modelovaném světě tvoří **universum diskursu**.

- **Výroková logika zkoumá způsob skládání jednoduchých výroků pomocí logických spojek do výroků složených.**

- Jednoduché výroky vstupují do spojení pouze svou pravdivostní hodnotou a jsou navzájem nezávislé.
- Pravdivostní hodnota složeného výroku je tedy jednoznačně určena pravdivostními hodnotami jeho složek a druhem spojek, které tyto jednodušší složky spojují.

- Logické spojky byly zavedeny tak, aby měly v přirozených jazycích své protějšky.
- Pěti výrokovými spojkami nelze vyjádřit celou bohatost spojení vět v jazyce přirozeném.

Např.

- Logická disjunkce – může nebo nemusí být vylučující
 - Lucka si koupila šaty nebo boty.
 - Nemá spojka nebo vysloveně vylučující smysl.
 - Lucka udělala zkoušku z formálních jazyků na výbornou nebo na velmi dobrou.
 - Zde už vylučující smysl má.
 - Osobní auta mají přední nebo zadní náhon. (Nebo obojí)

- Logická konjunkce
 - Umyl se a najedl se.
 - Najedl se a umyl se.
 - Vyjadřuje spíše časovou následnost.
 - Jeví se zde vhodnější použít spojky implikace, která komutativní není.

- Pozn.
antecedent→konsekwent

Sledujme pravdivost.

1. Gen je biologická struktura.
 - pravdivý výrok
2. Gen není biologická struktura.
 - nepravdivý výrok
3. Na Marsu je život.
4. Ve vesmíru existuje život i mimo Zemi.
 - Co však můžeme konstatovat je fakt, že míra přesvědčení o pravdivosti věty 3. klesá, zatímco u věty 4. roste např. díky kosmickým výzkumům. Věty 3. a 4. jsou pravdivé, nebo nepravdivé, ale naše prostředky, jak zjistit jejich pravdivostní hodnotu, nejsou dostatečně silné.

5. Život je pravoúhlý.

6. Pravoúhlý život je když.

- Věta 6. není dobře sestavená, její skladba neodpovídá pravidlům skladby českého jazyka, nemá tudíž smysl cokoli říkat o její pravdivosti či nepravdivosti.
- Věta 5. je sice gramaticky správná, avšak zjevně nesmyslná vzhledem k vadnému použití predikátu pravoúhlý. Zde rovně nemá smysl uvažovat o její pravdivosti či nepravdivosti.
- Věta 6. odporuje syntaxi, zatímco věta 5. sémantice českého jazyka.

Syntax jazyka výrokové logiky

- Je v ní stanoveno, jakých symbolů abecedy jazyk používá a jsou předepsána pravidla zřetězování symbolů abecedy jazyka do útvarů zvaných formule jazyka.
- Jde tedy o soustavu syntaktických pravidel, umožňující konstruovat jistá zřetězení symbolů jazyka, která jsou jeho dobře utvořenými formulemi a patří proto do jeho slovníku.

Abeceda jazyka výrokové logiky:

- Symboly abecedy jazyka výrokové logiky patří výhradně do některé z následujících skupin elementárních symbolů:
 - symboly $a, b, c, \dots, a_1, b_1, c_1, \dots$ pro prvotní proměnné označující elementární výroky
 - symboly pro logické konstanty true a false
 - symboly pro logické spojky: negace, konjunkce, disjunkce, implikace, ekvivalence
 - pomocné symboly - závorky.

Syntaktická pravidla výrokové logiky

- Syntax jazyka výrokové logiky vychází z množiny symbolů
 - $a, b, c, \dots, a_1, b_1, c_1$ označujících výroky
 - true a false.
- Uvedené symboly představují atomické formule, ze kterých se vytvářejí další dobře utvořené výrokové formule podle pravidel.

Pravidla:

- ♦ **Základní pravidlo** – báze: Každá atomická formule je formulí.
- ♦ **Indukce**: Jsou-li X a Y formule, pak $\neg X$, $X \& Y$, $X \vee Y$, $X \rightarrow Y$ a $X \leftrightarrow Y$ jsou formule.
- ♦ **Generalizace**: všechny dobře utvořené formule jazyka výrokové logiky jsou výsledkem konečného počtu aplikací základního pravidla a pravidla indukce.
 - ♦ Pozn. Pozor X a Y zastupují libovolné formule.
 - ♦ metasymbody sloužící k označení formulí

- Příklad formule:

$$A \rightarrow (B \vee C)$$

- Výrazy, které nejsou formulemi:

$$\neg A \neg, A \vee (B \rightarrow) C)$$

- **Jazyk výrokové logiky** je množina všech formulí výrokové logiky.